СИСТЕМА АСТРОНОМІИ.

VI

ДОКТОРА

Митрофана Хандрикова,

ПРОФЕССОРА УНИВЕРСИТЕТА СВ. ВЛАДИМІРА.

КІЕВЪ.

Типографія и Литографія М. Фрица, Больш. Владим. ул., у памятника св. Ирины, собств. д.

1877.

По опредѣленію Совѣта Университета св. Владиміра печатать дозволяется.
8 марта 1876 года.

Ректоръ **А. Матвѣевъ.**

Координаты видимыхъ положеній свѣтилъ, выводимыя изъ непосредственныхъ наблюденій, служатъ начальными данными при рѣшеніи сдвали не самаго существеннаго вопроса математической астрономіи — вопроса объ изслѣдованіи орбитъ свѣтилъ и законовъ движенія въ этихъ орбитахъ. Въ настоящее время рѣшеніе этой задачи развито съ достаточной подробностію только въ примѣненіи къ свѣтиламъ искони составляющимъ солнечную систему и къ тѣмъ немногимъ кометамъ, которыя, двигаясь въ орбитахъ значительнаго эксцентриситета, періодически возвращаются къ Солнцу. О кометахъ, движущихся по параболическимъ кривымъ, мы не можемъ сказать того же, ибо наши наблюденія даютъ возможность изучить съ извѣстною подробностію только тѣ, сравнительно небольшія части орбитъ этихъ кометъ, которыя находятся вблизи перигелія. Такимъ образомъ мы видимъ, что въ настоящее время задача теоретической астрономіи весьма ограничена и заключается въ изслѣдованіи движенія немногихъ свѣтилъ, составляющихъ солнечную систему.

Теоретическія соображенія о поступательномъ движеніи свѣтилъ солнечной системы приводятся къ интегрированіе шести совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка. Не смотря на многія усилія ученыхъ, до сихъ поръ не удалось разыскать всѣхъ конечныхъ интеграловъ этихъ уравненій, и надо думать, что средства анализа, которыми мы теперь располагаемъ, недостаточны для выполненія интегрированія упомянутыхъ уравненій вопроса, а потому намъ остается искать простѣйшаго рѣшенія задачи только путемъ послѣдовательныхъ приближеній. Въ этой трудности интегрированія заключается также причина раздѣленія теоретической астрономіи на двѣ части. Въ одной изъ нихъ разсматривается такое движеніе планетъ и кометъ, которое имѣло бы мѣсто при дѣйствіи по закону Ньютона одной только центральной силы Солнца. Ко второй части теоретической астрономіи, названной Лапласомъ небесной механикой, относится изученіе тѣхъ возмущеній, которыя происходятъ въ движеніи даннаго свѣтила отъ вліянія другихъ свѣтилъ, составляющихъ солнечную систему и дѣйствующихъ на разсматриваемое также по закону Ньютона. Такъ какъ по этому принципу притяженіе обратно пропорціонально квадрату разстоянія и прямо пропорціонально массѣ, а массы всѣхъ планетъ весьма малы въ сравненіи съ массой Солнца, то въ первомъ приближеніи рѣшенія вопроса о движеніи планетъ и кометъ отвергаются члены порядка возмущающихъ массъ и для изслѣдованія сейчасъ упомянутыхъ движеній, приходится тогда интегрировать три совмѣстныхъ уравненія втораго порядка и первой степени. Это интегрированіе не представляетъ никакихъ трудностей

и три окончательные интеграла съ шестью произвольными постоянными легко получаются въ весьма простой и конечной формѣ. Для полнаго рѣшенія вопроса тогда остается только показать способъ опредѣленія изъ наблюденій шести упомянутыхъ произвольныхъ постоянныхъ, введенныхъ интегрированіемъ. Однако рѣшеніе этой задачи представляетъ весьма значительныя трудности, и можно сказать, что изложеніемъ пріемовъ опредѣленія изъ наблюденій упомянутыхъ постоянныхъ исчерпывается содержаніе первой части теоретической астрономіи.

Рѣшеніе вопроса объ опредѣленіи изъ наблюденій постоянныхъ, введенныхъ при интегрированіи уравненій эллиптическаго движенія, весьма часто привлекало къ себѣ вниманіе первокласныхъ геометровъ. Первое сравнительно точное опредѣленіе элементовъ орбиты земли и пяти большихъ планетъ было сдѣлано Кеплеромъ. Изысканія Кеплера, хотя и основывались на знаніи точныхъ законовъ движенія планетъ, однако не привели къ общему рѣшенію вопроса. Съ увѣренностію можно сказать, что Кеплеръ при своихъ изслѣдованіяхъ получилъ удовлетворительный результатъ только потому, что изъ старыхъ наблюденій ему было довольно точно извѣстно среднее суточное движеніе упомянутыхъ планетъ; кромѣ того Кеплеръ всегда могъ выбрать изъ многочисленныхъ наблюденій Тико де-Браге такія, которыя были бы наиболѣе благопріятны для опредѣленія того или другаго элемента. Открытіе Урана В. Гершелемъ въ 1781 г. нисколько не подвинуло впередъ изысканій общаго пріема вычисленія элементовъ планетныхъ орбитъ. Такъ какъ эксцентриситетъ орбиты Урана и ея наклоненіе къ эклиптикѣ не велики, то элементы этой орбиты были найдены съ удовлетворительной точностію въ томъ предположеніи, что планета движется по кругу въ плоскости эклиптики. Вообще при вычисленіи орбитъ нерѣдко начинали работу въ предположеніи, что описываемая свѣтиломъ кривая есть окружность и затѣмъ уже полученные элементы исправляли мало по малу до тѣхъ поръ, пока система ихъ не представляла наблюденій съ достаточною точностію. Хотя въ XVIII столѣтіи многіе ученые старались примѣнить высшій анализъ къ опредѣленію изъ наблюденій элементовъ планетныхъ орбитъ, но какъ скоро хотѣли имѣть прямое и общее рѣшеніе вопроса, то приходили къ уравненіямъ весьма высокихъ степеней и окончательные выводы представлялись тогда въ формѣ непримѣнимой на практикѣ. Къ такимъ результатамъ пришли между прочимъ Д'Аламбертъ и Лагранжъ *). Хотя Эйлеръ **) и искалъ рѣшенія пріемами нѣсколько отличными отъ тѣхъ, которые были употребляемы выше упомянутыми учеными, но не достигъ болѣе удовлетворительнаго результата.

Въ такомъ состояніи оставалось дѣло до начала текущаго столѣтія. Перваго Января 1801 года астрономъ Піацци въ Палермо открылъ первую малую планету, названную Церерой и это открытіе имѣло рѣшительное вліяніе на судьбу важнѣйшаго изъ вопросовъ теоретической астрономіи.

Открывъ Цереру, Піацци наблюдалъ ее до 11-го Февраля того же 1801 года, и по этимъ единственнымъ наблюденіямъ предстояло вычислить орбиту планеты и составить эфемериду для дальнѣйшихъ ея наблюденій; безъ этого трудно было ожидать,

---

*) *D'Alembert*. De la détermination de l'orbite des planètes. Berlin. 1747.
Lagrange. Gleichungen zur Bestimmung einer Kom.—oder Plan.—Bahn. 1789.
**) *L. Euler*. De motu planetarum et orbitarum determinatione. Petrp. 1734.
L. Euler. Nova methodus motum planetarum determ. Petrp. 1778.

что случайное открытіе Піацци повторится еще разъ и планета будетъ найдена снова. Крайне искуственныя средства, употреблявшіяся въ подобныхъ случаяхъ до того времени, были совершенно недостаточны для вычисленія орбиты этой планеты. Удовлетворительно точная система элементовъ не могла быть найдена для Цереры въ томъ предположеніи, что эта планета движется по круговому пути мало наклоненному къ эклиптикѣ. На помощь астрономамъ при рѣшеніи представившейся трудной задачи явился тогда молодой математикъ *Карлъ Фридрихъ Гауссъ.* Хотя работы, сдѣланныя до того Гауссомъ *), не имѣли прямаго примѣненія къ астрономіи, тѣмъ не менѣе этотъ величайшій изъ математиковъ скоро увидѣлъ въ изысканіяхъ, которыми онъ былъ занятъ около того времени, средство для рѣшенія представившагося труднаго вопроса. Задача, которую при этомъ поставилъ себѣ К. Ф. Гауссъ, заключалась въ изысканіи численнаго уравненія коническаго сѣченія, по которому должна двигаться Церера, представляя своимъ движеніемъ наблюденія Піацци. Такъ какъ попытки найти прямое рѣшеніе этого вопроса ни привели ни къ какому результату, то Гауссъ, оставивъ ихъ, прибѣгнулъ къ способу послѣдовательныхъ приближеній и этимъ путемъ достигъ такого метода вычисленія орбитъ, который вполнѣ удовлетворилъ потребностямъ практики. Пользуясь вычисленіемъ Гаусса, Ольберсъ и Цахъ нашли планету въ томъ мѣстѣ неба, которое указала новая теорія опредѣленія планетныхъ и кометныхъ орбитъ изъ трехъ наблюденій. Послѣ этого способъ Гаусса сталъ часто примѣняться къ вычисленію орбитъ другихъ вновь открытыхъ малыхъ планетъ и изысканія К. Ф. Гаусса, относящіяся къ вопросамъ о движеніи планетъ и кометъ около Солнца, составили содержаніе безсмертнаго творенія: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium.*

По способу, предложенному К. Ф. Гауссомъ, вычисленіе орбиты раздѣляется на двѣ части: въ одной опредѣляются по наблюдаемымъ положеніямъ свѣтила его разстоянія отъ земли или Солнца, но при этомъ не вычисляется ни одинъ изъ элементовъ орбиты. Вторая часть рѣшенія вопроса относится исключительно къ опредѣленію элементовъ по даннымъ разстояніямъ свѣтила отъ земли или Солнца въ трехъ наблюденіяхъ. Наибольшую трудность представляетъ первая часть работы и такъ какъ вопросъ объ опредѣленіи разстояній можетъ быть рѣшенъ не иначе какъ послѣдовательными приближеніями, то, отдѣливъ вычисленіе разстояній отъ вычисленія элементовъ, К. Ф. Гауссъ даетъ возможность при каждомъ приближеніи повторять только часть вычисленія, не доводя его до опредѣленія элементовъ; этимъ пріемомъ значительно сокращается вся работа.

Выше упомянутое сочиненіе К. Ф. Гаусса, въ которомъ подробно изложенъ способъ опредѣленія планетныхъ и кометныхъ орбитъ по извѣстному числу наблюденій, появилось въ 1809 году. Съ тѣхъ поръ многіе ученые старались упростить методу предложенную Гауссомъ, французскіе же геометры неоднократно предлагали въ замѣнъ ея способы, основанные на принципѣ разложенія тѣхъ или другихъ координатъ въ безконечные ряды, но не одинъ изъ этихъ способовъ не вошелъ въ общее употребленіе и не одинъ изъ нихъ не имѣютъ тѣхъ достоинствъ въ практическомъ отношеніи,

---

*) *C. F. Gauss.* Disquisitiones arithmeticae. 1801.

C. F. Gauss. Demonstratio nova omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. 1799.

какія представляетъ способъ Гаусса. Что касается до попытокъ упростить методу Гаусса въ отдѣльныхъ ея частяхъ, то нѣкоторыя изъ нихъ имѣли успѣхъ.

Кромѣ Гаусса вопросомъ объ опредѣленіи орбитъ по извѣстному числу наблюденій занимались: Моссоти, Бине, Мишаль, Коши, Чалисъ, Вилларсо и др. *). По большей части способы, предложенные упомянутыми учеными, основываются на разложеніи нѣкоторыхъ перемѣнныхъ величинъ, напр. долготы и широты свѣтила, въ ряды расположенные по степенямъ времени. Такъ напр. способъ Чаллиса представляетъ собою развитіе той методы, которую предлагаетъ Лапласъ для вычисленія кометныхъ орбитъ, и измѣненіе этой послѣдней, вводимыя Чаллисомъ, имѣютъ цѣлію увеличить точность перваго приближенія въ рѣшеніи вопроса. Способы Коши и Вилларсо также основываются на томъ или другомъ примѣненіи развитія координатъ въ безконечные ряды. Хотя названные нами геометры и думаютъ разложеніемъ извѣстныхъ функцій въ ряды достигнуть рѣшенія болѣе простаго и удобнаго чѣмъ то, которое предлагаетъ К. Ф. Гауссъ, но едвали можно безусловно согласиться съ тѣми доводами, которые приводятъ нѣкоторые изъ этихъ ученыхъ въ пользу способовъ вычисленія орбитъ, основанныхъ на упомянутомъ выше началѣ. При изложеніи своего метода Вилларсо говоритъ между прочимъ: Les methodes d'approximation, fondées sur l'emploi des developpements en séries, qui sont d'un si grand secours dans une foule d'applications des mathematiques, peuvent être generalement employées dans le probléme actuel et presentent des solutions faciles. En realité, les astres nouveaux ne sont jamais observés durant leur premiere apparition que dans une étendue fort restreinte de leur orbite. La Terre elle même ne décrit dans cet intervalle qu'une assez faible partie de son cours annuel, en sorte que dans ce même intervalle les coordonnées heliocentriques de l'astre et de la Terre peuvent être representées par des series ordonnées suivant les puissances du temps" **). Если это заключеніе справедливо относительно земли, то едвали оно будетъ всегда вѣрно для опредѣляемаго свѣтила, особенно если это послѣднее есть комета. При изложеніи своихъ способовъ, Вилларсо имѣетъ въ виду много различныхъ исключительныхъ случаевъ, но дѣлая послѣднее заключеніе, онъ какъ бы недопускаетъ возможности большаго геліоцентрическаго движенія между близкими одно отъ другаго по времени наблюденіями, но этотъ случай нерѣдко встрѣчается на практикѣ при опредѣленіи кометныхъ орбитъ.

Что касается до способа Бине, то онъ любопытенъ по своему чисто аналитическому характеру. Его можно разсматривать какъ представленіе способа Гаусса въ аналитическихъ формахъ и основное уравненіе теоріи предложенной Бине весьма легко приводится къ формѣ основнаго трансцендентнаго уравненія способа Гаусса ***).

Въ послѣднее время неоднократно были дѣлаемы попытки упростить способъ Гаусса въ отдѣльныхъ частяхъ, или покрайней мѣрѣ—представить иной, болѣе ана-

---

*) *Mossotti.* Nova analisi del problema di determinare le orbita dei corpi colesti. 1817—1819.
Binet. Sur la determination des orbites des planètes et des comètes. 1831.
Michal. Deux methodes pour determiner les orbites des planètes et des comètes. 1846.
Cauchy. Memoires sur la détermination des orbites des planètes et comètes. 1846—1848.
Challis. Method of calculating the orbit of a Planet or Comet from tree observed places. 1848.
Yvon Villarceau. Determination des orbites des planètes et des comètes. 1857.

**) См. Annales de l'observatoire de Paris. T. III, pg. 3.

***) См. Journal de l'ecole polytechnique. Tome XIII, pg. 264.

литическій его выводъ. Послѣ Вине первую изъ такихъ попытокъ сдѣлалъ Энке и мемуаръ касательно этого предмета подъ заглавіемъ: „Ueber die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen", напечаталъ въ прибавленіяхъ къ Берлинскому астрономическому календарю за 1854 годъ. Въ этомъ мемуарѣ мы не встрѣчаемъ существенныхъ упрощеній методы Гаусса, а видимъ только иную форму ея вывода. Едвали не бо́льшій интересъ представляетъ другой мемуаръ Энке, напечатанный имъ подъ тѣмъ же самымъ заглавіемъ въ Astron. Nachr. № 699. Въ этой статьѣ показано авторомъ весьма любопытное сближеніе между общимъ способомъ Гаусса и способомъ доктора Ольберса, предложеннымъ исключительно для вычисленія параболическихъ путей кометъ.

Нѣкоторыя полезныя измѣненія въ Гауссовой теоріи опредѣленія орбитъ сдѣлалъ П. А. Гансенъ и свои изысканія по этому предмету развилъ въ прекрасномъ мемуарѣ: Ueber die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen, помѣщенномъ въ Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Geselschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Мы увидимъ ниже, что довольно существенную часть опредѣленія разстояній свѣтила отъ земли или солнца составляетъ вычисленіе отношеній площадей секторовъ, описанныхъ радіусомъ векторомъ свѣтила, къ площадямъ соотвѣтствующихъ треугольниковъ. Въ способѣ Гаусса эти величины отношеній опредѣляются рѣшеніемъ кубическаго уравненія, и для упрощенія дѣла Гауссъ приводитъ упомянутое рѣшеніе въ зависимость отъ нѣкоторой таблицы, но какъ скоро промежутки временъ, отдѣляющія наблюденія довольно значительны, то аргументъ выходитъ за предѣлы таблицы, въ такомъ случаѣ этой послѣдней нельзя пользоваться и вычисленіе нѣсколько осложняется. П. А. Гансенъ приводитъ опредѣленіе упомянутыхъ отношеній къ вычисленію нѣкоторой непрерывной дроби, примѣнимому во всѣхъ случаяхъ. Кромѣ этого довольно существеннаго преобразованія мы находимъ въ мемуарѣ П. А. Гансена весьма любопытный разборъ различныхъ частныхъ случаевъ, встрѣчающихся при опредѣленіи планетныхъ орбитъ изъ трехъ наблюденій.

Большую часть вычисленія орбиты составляетъ опредѣленіе послѣдовательными приближеніями разстояній разсматриваемаго свѣтила отъ земли или солнца, а потому изысканія средствъ къ уменьшенію числа приближеній должно имѣть большое значеніе въ рѣшеніи вопроса объ опредѣленіи орбиты. Изъ занимавшихся упрощеніемъ методы Гаусса въ этомъ отношеніи имѣлъ едвали не наибольшій успѣхъ неаполитанскій астрономъ Ан. Гаспарисъ. Сущность преобразованія, даннаго Гаспарисомъ, заключается въ томъ, что онъ уже и въ первомъ приближеніи не принимаетъ отношеній площадей секторовъ, описанныхъ радіусомъ векторомъ, равными отношеніямъ площадей соотвѣтствующихъ треугольниковъ, но опредѣляетъ подобное отношеніе по радіусу вектору соотвѣтствующему среднему положенію свѣтила и удерживаетъ при этомъ члены третьяго порядка. Свои теоретическія соображенія Ан. Гаспарисъ примѣнилъ первоначально къ вычисленію орбиты Юноны по тѣмъ же наблюденіямъ, которыя употребляетъ для той же цѣли К. Ф. Гауссъ въ Theoria motus corporum coelestium; при этомъ оказалось, что преобразованіе, сдѣланное Гаспарисомъ, уже въ первой гипотезѣ приводитъ къ величинамъ, по точности соотвѣтствующимъ тѣмъ, которыя могутъ быть получены только въ третей гипотезѣ методы Гаусса *). Развивая свои теоретическія

*) См. Comptes rendus, tome LVI, pg. 443.

соображенія въ мемуарѣ „Elementi ellitici del orbita dell pianeta Silvia“, Ан. Гаспарисъ примѣняетъ ихъ къ вычисленію орбиты другой малой планеты и при этомъ приходитъ къ столь же удовлетворительному результату какъ и прежде.

Излагая свой способъ, К. Ф. Гауссъ по преимуществу имѣлъ въ виду примѣненіе его къ вычисленію планетныхъ орбитъ, всегда имѣющихъ форму эллипсиса съ незначительнымъ эксцентриситетомъ. Кометы, за весьма немногими исключеніями, движутся въ орбитахъ по формѣ мало отличныхъ отъ параболъ, поэтому при вычисленіи кометныхъ путей мы можемъ опредѣлять разстоянія разсматриваемаго свѣтила отъ солнца какъ радіусы векторы нѣкоторой параболы. Такая гипотеза о родѣ описываемаго свѣтиломъ коническаго сѣченія даетъ возможность представить вычисленіе кометнаго пути въ формѣ болѣе простой сравнительно съ вычисленіемъ планетной орбиты.

Первоначально рѣшеніемъ вопроса объ опредѣленіи кометныхъ орбитъ въ параболической гипотезѣ занимался Исаакъ Ньютонъ, но онъ достигъ рѣшенія этого вопроса путемъ сложныхъ геометрическихъ построеній. Послѣ Ньютона теоріей опредѣленія кометныхъ орбитъ занимался Лакайль, но его изысканія также не имѣютъ аналитическаго характера. При вычисленіи орбиты Лакайль простыми догадками опредѣлялъ разстоянія кометы отъ земли для времени двухъ крайнихъ наблюденій и дѣлалъ предположенія о числовыхъ величинахъ этихъ разстояній подъ тѣмъ лишь условіемъ, чтобы система элементовъ орбиты, вычисленная посредствомъ этихъ двухъ предполагаемыхъ разстояній, точно представляла положеніе кометы, соотвѣтствующее времени средняго наблюденія.

Аналитическій способъ въ первый разъ былъ примѣненъ къ вычисленію кометной орбиты въ 1744 году Леонардомъ Эйлеромъ, который изложилъ свою теорію въ сочиненіи Theoria motus Planetarum et Cometarum. Въ основаніи теоріи данной Эйлеромъ лежитъ то предположеніе, что комета описываетъ только малую дугу своего пути въ промежутокъ времени обнимающій наблюденія выбранныя для вычисленія орбиты. Сдѣлавъ такое предположеніе, Эйлеръ допускаетъ, что хорда соединяющая два крайнія положенія кометы дѣлится радіусомъ векторомъ средняго положенія на части пропорціональныя временамъ, отдѣляющимъ среднее наблюденіе отъ двухъ крайнихъ. Положивъ все это, Эйлеръ принимаетъ за неизвѣстное вопроса разстояніе кометы отъ земли, соотвѣтствующее среднему положенію; но для опредѣленія этого неизвѣстнаго онъ вводитъ въ вычисленіе координаты четвертаго наблюдаемаго положенія свѣтила. Такимъ образомъ Л. Эйлеръ для вычисленія кометной орбиты требуетъ данныхъ болѣе того, чѣмъ сколько въ дѣйствительности необходимо и достаточно для полнаго рѣшенія вопроса.

Одновременно съ Л. Эйлеромъ вопросомъ о вычисленіи кометныхъ орбитъ занимался Ламбертъ. Хотя его способъ основывается на томъ же положеніи какъ и способъ Эйлера, однако въ его сочиненіяхъ „Tractatus de orbitis cometarum“ и „Insiguieres orbium cometarum proprietates“, мы встрѣчаемъ одну изъ замѣчательнѣйшихъ теоремъ теоретической астрономіи. Эта теорема выражается уравненіемъ извѣстнымъ подъ именемъ уравненія Ламберта и представляющимъ зависимость между временемъ употребляемымъ кометою для прохожденія какой либо дуги своей орбиты, хордою стягивающею эту дугу и суммою радіусовъ векторовъ, соотвѣтствующихъ оконечностямъ дуги. Мы увидимъ ниже, что уравненіе Ламберта играетъ весьма важную роль въ вопросѣ о вычисленіи кометныхъ орбитъ.

Рѣшеніемъ упомянутаго сейчасъ вопроса занимались также Лагранжъ, Лапласъ и Лежандръ. Способъ Лагранжа развитъ въ мемуарахъ Берлинской Академіи Наукъ за 1778 и 1783 года. Трактатъ Лапласа, касающійся этого вопроса, напечатанъ первоначально въ мемуарахъ Парижской Академіи Наукъ за 1780 годъ; наконецъ теорія предлагаемая Лежандромъ составляетъ предметъ отдѣльнаго сочиненія, изданнаго подъ заглавіемъ: „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes". Хотя трактаты Лагранжа, Лапласа и Лежандра и имѣютъ несомнѣнныя аналитическія достоинства, но методы, предложенные въ нихъ для вычисленія кометныхъ орбитъ, нельзя считать удовлетворяющими потребностямъ практики. Лежандръ, упоминая о способѣ Лагранжа, говоритъ: „cette méthode n'aurait sans doute rien laissé a désirer, si son illustre auteur en eût fait l'application a des exemples, ce qui l'aurait conduit lui-même a y apporter les modifications nécessaires pour en rendre l'ausage facile dans la pratique", но самъ онъ хотя и примѣнилъ свои методы къ вычисленію нѣкоторыхъ кометныхъ орбитъ, однако не пришелъ къ результатамъ болѣе удовлетворительнымъ чѣмъ тѣ, которыхъ достигъ Лагранжъ.

Тотъ методъ, которымъ мы пользуемся теперь для вычисленія кометныхъ орбитъ, предложенъ В. Ольберсомъ. Примѣняя этотъ остроумный способъ на практикѣ, мы можемъ въ теченіи не многихъ часовъ найти систему элементовъ параболическаго пути разсматриваемой кометы. Простота способа Ольберса зависитъ отъ того, что онъ основанъ на предположеніи только въ извѣстной степени приближенномъ къ истинѣ. При вычисленіи разстоянія кометы отъ земли Ольберсъ допускаетъ, что отношеніе площадей секторовъ, описанныхъ радіусомъ векторомъ въ извѣстные промежутки времени, равно отношеніе площадей треугольниковъ, соотвѣтствующихъ этимъ секторамъ. Этимъ приближеннымъ положеніемъ Ольберсъ достигаетъ весьма простой формы отношенія разстоянія кометы отъ земли въ третьемъ наблюденіи къ подобному же разстоянію, соотвѣтствующему времени перваго наблюденія.

Понятно, что это допущеніе будетъ удовлетворительно близко къ истинѣ только тогда, когда промежутки времени, отдѣляющіе одно наблюденіе отъ другаго, будутъ не велики и когда, кромѣ того, въ теченіи малыхъ промежутковъ времени комета не будетъ имѣть большаго геліоцентрическаго движенія. Если же это условіе не выполняется въ данномъ случаѣ, то, не приступая къ вычисленію элементовъ, слѣдуетъ исправить величину отношенія разстояній кометы отъ земли въ первомъ и третьемъ наблюденіяхъ при помощи приближенно вычисленныхъ значеній радіусовъ векторовъ, соотвѣтствующихъ временамъ тѣхъ же наблюденій. Чтобы отдѣлить при этомъ вычисленіе разстояній отъ вычисленія элементовъ, необходимо имѣть способъ, по которому можно было бы безъ знанія элементовъ опредѣлить величину отношенія площадей треугольниковъ, соотвѣтствующихъ упомянутымъ секторамъ. Для рѣшенія задачи въ этомъ видѣ, можно указать нѣсколько пріемовъ, но наиболѣе изящный изъ нихъ предложенъ Ф. В. Бесселемъ и развитъ имъ въ мемуарѣ, помѣщенномъ во второй тетради журнала Astronomische Abhandlungen подъ заглавіемъ: „Beitrag zur Kometentheorie". Такимъ образомъ, упомянутыя теоретическія соображенія Бесселя являются существеннымъ дополненіемъ Ольберсова способа вычисленія кометныхъ орбитъ, и соединеніемъ того и другаго мы достигаемъ при вычисленіи кометной орбиты того же результата, къ которому приводятъ насъ послѣдовательныя гипотезы въ Гауссовомъ способѣ вычисленія планетныхъ орбитъ. Разница заключается только въ томъ, что отношеніе

площадей треугольниковъ въ эллиптической орбитѣ безъ знанія элементовъ можетъ быть вычислено не иначе какъ посредствомъ рядовъ, тогда какъ тоже самое для параболической орбиты выполняется, по способу Бесселя, въ конечной формѣ.

Докторъ В. Ольберсъ первоначально изложилъ свой способъ въ сочиненіи „Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen". Послѣ смерти Ольберса это сочиненіе съ нѣкоторыми дополненіями было издано директоромъ Берлинской обсерваторіи Энке. Кромѣ того Энке развилъ методу Ольберса въ любопытномъ мемуарѣ, помѣщенномъ въ прибавленіяхъ къ Берлинскому астрономическому календарю за 1833 годъ.

Итакъ мы имѣемъ въ настоящее время аналитическіе способы, данные Гауссомъ, Ольберсомъ и Бесселемъ для вычисленія планетныхъ и кометныхъ орбитъ по тремъ наблюдаемымъ положеніямъ свѣтила. Если бы результаты астрономическихъ наблюденій и другія величины, взятыя изъ астрономическихъ эфемеридъ для вычисленія орбиты, были совершенно точны, то и элементы орбиты, найденные по Гауссовой или Бессель-Ольберсовой методѣ, точно представляли бы наблюдаемыя положенія свѣтила, по крайней мѣрѣ близкія къ взятымъ для вычисленія орбиты. При такомъ условіи дальнѣйшими наблюденіями найденная система элементовъ могла бы только повѣряться, а не исправляться. Но такъ какъ изъ всѣхъ нашихъ измѣреній и наблюденій мы получаемъ величины только въ извѣстной степени приближенныя къ искомымъ, то неточность величинъ, лежащихъ въ основаніи всего вычисленія орбиты, извѣстнымъ образомъ вліяетъ на результатъ, и найденными по тремъ наблюденіямъ элементами будутъ представляться всѣ другія наблюденія того же свѣтила болѣе или менѣе неточно.

Разность наблюдаемыхъ и вычисленныхъ для временъ наблюденій положеній свѣтила становится обыкновенно тѣмъ значительнѣе, чѣмъ сравниваемыя съ наблюденіями, вычисленныя по эфемеридѣ мѣста болѣе удалены отъ тѣхъ, на которыхъ основано первоначальное опредѣленіе системы элементовъ.

Общая задача опредѣленія орбиты, не обращая вниманія на возмущенія, заключается въ томъ, чтобы найти систему элементовъ способную представить въ предѣлахъ погрѣшностей наблюденій всѣ положенія свѣтила, расположенныя въ извѣстной, сравнительно небольшой части орбиты. Такіе элементы называются обыкновенно *оскулирующими*, а орбиту представляемую ими можно назвать соприкасающейся съ дѣйствительно описанной кривой. Рѣшеніе вопроса объ опредѣленіи оскулирующихъ элементовъ заключается въ примѣненіи способа наименьшихъ квадратовъ къ вычисленію орбиты по многочисленнымъ наблюденіямъ. Если вычислимъ дифференціальные коеффиціенты, представляющіе собою вліяніе измѣненія элементовъ на измѣненія тѣхъ или другихъ координатъ свѣтила, то для рѣшенія вопроса легко составимъ столько линейныхъ уравненій, сколько будемъ имѣть отдѣльныхъ координатъ свѣтила опредѣленныхъ изъ наблюденій. Соединяя эти условныя уравненія по способу наименьшихъ квадратовъ, получимъ окончательныя уравненія въ числѣ равномъ числу опредѣляемыхъ поправокъ элементовъ. Итакъ, если по тремъ наблюденіямъ вычислена орбита, то остальнымъ рядомъ наблюденій она должна быть исправлена, и поправки должны быть найдены подъ тѣмъ условіемъ, чтобы сумма квадратовъ разностей наблюдаемыхъ и соотвѣтствующихъ имъ вычисленныхъ координатъ была наименьшая.

Форма дифференціальныхъ коэффиціентовъ, представляющихъ вліяніе измѣненія элементовъ на измѣненія координатъ, дана К. Ф. Гауссомъ въ его сочиненіи Theoria

motus corporum coelestium. При вычисленіи оскулирующихъ элементовъ за основную плоскость координатъ можетъ быть принята какъ эклиптика, такъ и экваторъ. Но простѣйшую форму упомянутые выше дифференціальные коэффиціенты, какъ показалъ Оппольцеръ *), принимаютъ тогда, когда не только положенія свѣтила, но и положеніе его орбиты будутъ отнесены къ экватору.

Тотъ же вопросъ объ опредѣленіи вѣроятнѣйшей орбиты или, что все равно, о вычисленіи системы оскулирующихъ элементовъ рѣшенъ съ большими подробностями для кометныхъ орбитъ въ сочиненіи Вейера, изданномъ подъ заглавіемъ: *G. D. E. Weyer.* Ueber die Differentialformeln für Cometenbahnen von grosser Excentricität.

Многія интересныя замѣчанія, касательно опредѣленія элементовъ вѣроятнѣйшей орбиты, можно также видѣть въ мемуарахъ: Клаузена, Леверье, Гётце и Ковальскаго **).

Въ первоначальномъ опредѣленіи орбиты планеты или кометы, а также и при вычисленіи системы вѣроятнѣйшихъ элементовъ предполагается, что на разсматриваемое свѣтило дѣйствуетъ одна только центральная сила Солнца. Въ дѣйствительности дѣло далеко не такъ просто. Всякое свѣтило, входящее въ составъ солнечной системы, двигаясь около Солнца, находится подъ непрерывнымъ вліяніемъ другихъ свѣтилъ, составляющихъ систему, и отъ нихъ претерпѣваетъ возмущенія. Опредѣленіе возмущеній составляетъ второе приближеніе въ рѣшеніи вопроса о движеніи планетъ съ ихъ спутниками и кометъ.

Мы уже сказали, что раздѣленіе трактата о движеніи свѣтилъ, составляющихъ солнечную систему, на двѣ части обусловливается аналитическими трудностями, встрѣчающимися при рѣшеніи разсматриваемаго вопроса; оно зависитъ отъ нашего неумѣнья интегрировать въ конечномъ видѣ общія уравненія возмущеннаго движенія. Съ тѣхъ поръ какъ Ньютонъ открылъ законъ всемірнаго тяготѣнія, вопросъ о возмущеніяхъ постоянно занимаетъ ученыхъ. Не смотря однако на это, мы до сихъ поръ не имѣемъ общаго и удобнаго на практикѣ пріема для рѣшенія этого важнаго астрономическаго вопроса.

Первыя попытки найти аналитическій способъ для вычисленія возмущеній принадлежатъ Эйлеру. Его первыя изысканія по этому предмету относятся къ вопросу о возмущенномъ движеніи луны и изложены въ мемуарѣ, изданномъ въ 1745 году подъ заглавіемъ: „Sur le mouvement des noeuds de la lune et sur la variation de son inclinaison a l'ecliptique". Черезъ восемь лѣтъ, именно въ 1753 году, Эйлеръ представилъ первую полную теорію луннаго движенія въ сочиненіи „Theoria motus lunae exhibens omnes ejns inaequalitates". Вмѣстѣ съ этимъ Эйлеръ занимался и другими вопросами теоріи возмущеній, такъ въ 1747 году онъ представилъ на конкурсъ, объ-

---

*) См. *Th. Oppolzer.* Entwickelung von Differentialformeln zur Verbesserung einer Planeten- oder Kometenbahn nach geocentrischen Orten. Sitzungberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. XLIX Band, III. Heft.

**) *Clausen.* Ueber die Formirung der Bedingungsgleichungen zur Verbesserung einer Planeten- oder Cometen Bahn. 1831.

Le-Verrier. Sur les erreurs produits dans le calcul des orbites par les erreurs des observations fondamentales. 1847.

Goetze. Ueber die Bestim. der Bedingungsgleichungen bei der Aufsuchung der Wahrsch. Elemente eines Himmelskörpers. 1849.

M. Kowalski. Sur le calcul de l'orbite elliptique ou parabolique d'apres un grand nobre d'observations. 1859.

явленный Парижской Академіей Наукъ, сочиненіе подъ заглавіемъ: „Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter". Въ этомъ сочиненіи Эйлеръ въ первый разъ даетъ дифференціальныя уравненія движенія трехъ тѣлъ, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Болѣе общія изслѣдованія о возмущеніяхъ Эйлеръ излагаетъ въ сочиненіи „Investigatio perturbationum, quibus planetarum motus ab actionem eorum mutuam officiuntur". Наконецъ въ четвертомъ томѣ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae явился мемуаръ Эйлера, въ которомъ положено основаніе теоріи, извѣстной теперь подъ именемъ способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ.

Одновременно съ Эйлеромъ, теоріей возмущеній занимались также Клеро и Д'Аламбертъ. Изслѣдованія перваго изъ нихъ замѣчательны въ двухъ отношеніяхъ: они въ первый разъ были примѣнены къ вычисленію кометныхъ возмущеній и кромѣ того въ нихъ можно видѣть основаніе тѣхъ обширныхъ изысканій, которыя гораздо позже были предприняты Гансеномъ и развиты имъ для вычисленія возмущеній малыхъ планетъ. Въ 1758 году ожидалось возвращеніе къ Солнцу Галлеевой кометы и Клеро думалъ вычислить возмущенія ея движенія по тому же методу, который онъ развилъ первоначально въ своей теоріи луны, но употреблявшіеся тамъ ряды, по причинѣ большаго эксцентриситета и наклоненія разсматриваемой кометной орбиты, въ этомъ случаѣ представляли весьма малую сходимость, поэтому Клеро для вычисленія кометныхъ возмущеній долженъ былъ употребить другой пріемъ и въ своемъ сочиненіи „Theorie du mouvement des comètes", вышедшемъ въ концѣ 1758 года, изложилъ свой методъ вычисленія кометныхъ возмущеній, въ основаніяхъ имѣющій много общаго съ той постановкой вопроса о вычисленіи возмущеній, которую предложилъ потомъ П. А. Гансенъ.

Второй періодъ изслѣдованія возмущеній начинается съ 1766 года, когда Лагранжъ въ Miscellanea Taurinensia помѣстилъ мемуаръ: „Sur differents problemes de Calcul integral". Послѣднее примѣненіе теоретическихъ соображеній, развитыхъ въ этомъ мемуарѣ, относится къ опредѣленію взаимныхъ возмущеній Юпитера и Сатурна. Но только черезъ десять лѣтъ начинаютъ появляться изысканія Лагранжа, имѣющія болѣе общій характеръ, именно въ 1776 году онъ напечаталъ въ запискахъ Берлинской Академіи Наукъ мемуаръ „Sur l'alteration des moyens mouvements de planètes", замѣчательный тѣмъ, что въ немъ въ первый разъ Эйлеровы уравненія возмущеннаго движенія преобразованы введеніемъ въ нихъ производныхъ такъ называемой пертурбаціонной функціи.

Къ этому же времени относятся первыя изслѣдованія въ теоріи возмущеній, сдѣланныя Лапласомъ. Первый мемуаръ былъ представленъ имъ въ Парижскую Академію Наукъ въ 1773 году, въ немъ Лапласъ говоритъ между прочимъ о вѣковыхъ неравенствахъ въ движеніи планетъ и сообщаетъ свое великое открытіе о неизмѣняемости отъ этихъ возмущеній большихъ полуосей планетныхъ орбитъ. Послѣ этого Лапласомъ и Лагранжемъ были сдѣланы многія преобразованія въ теоріи возмущеній. Важнѣйшимъ слѣдствіемъ этихъ преобразованій является доказательство прочности устройства солнечной системы относительно эксцентриситетовъ и наклоненій.

Когда первыя трудности въ разработкѣ теоріи возмущеній были побѣждены, тогда Лапласъ приступилъ къ соединенію всѣхъ изслѣдованій въ одно систематическое цѣлое и результатомъ этого явился многотомный трактатъ, изданный имъ подъ загла-

вісмъ: „Traité de mécanique céleste"; первый томъ этого знаменитаго сочиненія явился въ Сентябрѣ 1779 года. Затѣмъ изданіе небесной механики продолжалось почти непрерывно, въ 1802 году былъ изданъ третій томъ, въ 1805 г. четвертый. Что касается пятаго и послѣдняго тома, то онъ выходилъ по частямъ и окончепъ только въ 1825 году. Приводя въ систему первоначальныя свои изысканія въ области теоріи возмущеній, Лапласъ въ тоже время объобщалъ ихъ и подвергалъ дальнѣйшей обработкѣ. Такъ въ Августѣ 1808 года онъ представилъ въ Bureau de Longitudes разсужденіе, въ которомъ производныя элементовъ относительно времени представлены были въ зависимости отъ производныхъ пертурбаціонной функціи, взятыхъ по элементамъ, съ коэффиціентами независимыми отъ времени. Замѣчательно, что въ тоже самое засѣданіе коммиссіи долготъ, происходившее 17 Августа 1808 года, Лагранжъ представилъ сочиненіе, рѣшавшее вопросъ объ измѣненіи элементовъ эллиптической орбиты въ той же самой формѣ, къ какой было приведено рѣшеніе Лапласа. Различіе этихъ двухъ мемуаровъ заключалось въ томъ, что Лапласъ достигъ окончательныхъ выводовъ въ упомянутой выше формѣ посредствомъ частныхъ преобразованій прежде уже извѣстныхъ формулъ, тогда какъ рѣшеніе Лагранжа основано на новой общей теоріи интегрированія уравненій движенія, развитой имъ въ двухъ мемуарахъ, изданныхъ подъ заглавіемъ: „Sur la theorie generale des variations des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la Mécanique". Вопросъ объ интегрированіи уравненій движенія, разсматриваемый въ этихъ мемуарахъ съ самой общей точки зрѣнія, имѣетъ наибольшее примѣненіе въ небесной механикѣ и, можно сказать, что общая теорія измѣненія произвольныхъ постоянныхъ вызвана потребностями астрономіи.

По способу измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, вопросъ о вычисленіи возмущеній приводится въ зависимость отъ интегрированія извѣстнаго числа совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка и первой степени, между тѣмъ какъ первоначально для рѣшенія задачи требовалось интегрировать шесть совмѣстныхъ уравненій втораго порядка. Хотя порядокъ интегрируемыхъ уравненій пониженъ, но все таки примѣненіе методы Лагранжа не имѣетъ пока рѣшительныхъ послѣдствій для труднаго вопроса о вычисленіи возмущеній. Мы не можемъ интегрировать полученныя совмѣстныя уравненія перваго порядка и для рѣшенія задачи должны дѣлать допущенія только въ извѣстной степени приближенныя къ истинѣ.

Лапласъ, имѣя въ виду исключительно возмущенія большихъ планетъ, интегрировалъ полученныя дифференціальныя выраженія посредствомъ разложенія ихъ въ ряды по степенямъ эксцентриситетовъ орбитъ, или по степенямъ тангенсовъ наклоненій этихъ послѣднихъ къ плоскости эклиптики.

Большія планеты движутся почти въ круговыхъ орбитахъ, мало наклоненныхъ къ эклиптикѣ, а потому для нихъ упомянутые ряды имѣютъ значительную сходимость и вычисленіе возмущеній этихъ свѣтилъ по методѣ Лапласа и Лагранжа не представляетъ большихъ трудностей. Орбиты кометъ не имѣютъ сейчасъ упомянутыхъ двухъ свойствъ, а потому къ вычисленію возмущеній этихъ свѣтилъ аналитическіе способы, развитые Лагранжемъ и Лапласомъ, вовсе не примѣнимы. Въ этомъ заключается причина, по которой Лапласъ въ четвертомъ томѣ своей небесной механики вмѣсто аналитическаго пріема предлагаетъ примѣнять къ вычисленію кометныхъ возмущеній способъ механической квадратуры, т. е. интерполяціонный пріемъ, посредствомъ котораго можетъ быть найдена числовая величина даннаго опредѣленнаго ин-

теграла по нѣсколькимъ частнымъ значеніямъ подъинтегральной функціи. Способы Лагранжа и Лапласа нельзя считать также удобопримѣнимыми и къ вычисленію возмущеній многочисленныхъ астероидовъ, движущихся между орбитами Марса и Юпитера.

Во всякомъ случаѣ изысканія, сдѣланныя Лагранжемъ и Лапласомъ въ области небесной механики, имѣли важныя научныя послѣдствія. По методѣ вычисленія возмущеній, предложенной этими великими учеными, директоръ парижской обсерваторіи Леверье окончательно разработалъ теорію первыхъ четырехъ большихъ планетъ. На основаніи данныхъ имъ таблицъ Меркурія, Солнца, Венеры и Марса, вычисляются теперь эфемериды этихъ свѣтилъ, помѣщаемыя въ наиболѣе распространенныхъ астрономическихъ календаряхъ. Величайшее изъ астрономическихъ открытій текущаго столѣтія,—открытіе планеты Нептуна, сдѣланное Адамсомъ и Леверье, также находится въ извѣстной зависимости отъ обширныхъ изысканій Лагранжа и Лапласа, произведенныхъ ими въ области теоріи возмущеній.

Начало третьяго періода развитія теоріи возмущеній совпадаетъ съ появленіемъ послѣднихъ частей пятаго тома небесной механики. Около этого времени директоръ Готской обсерваторіи П. А. Гансенъ начинаетъ свои изысканія, относящіяся къ вопросу о вычисленіи возмущеній; онъ ищетъ рѣшенія одинаково примѣнимаго къ опредѣленію неравенствъ, какъ планетъ съ ихъ спутниками, такъ и кометъ, движущихся въ орбитахъ мало отличныхъ по формѣ отъ параболъ.

Преобразованія, которыя предстояло сдѣлать въ существующей теоріи возмущеній, приводились къ рѣшенію двухъ существенно различныхъ вопросовъ: 1) необходимо было общую задачу, приведенную Лагранжемъ къ интегрированію извѣстнаго числа уравненій перваго порядка и первой степени, поставить въ зависимость отъ выполненія простыхъ квадратуръ; а такъ какъ оказывается, что эти послѣднія не могутъ быть выполнены въ конечной формѣ, то 2) предстояло разложить пертурбаціонную функцію въ рядъ, имѣющій быструю сходимость во всѣхъ частныхъ случаяхъ.

Въ одномъ изъ первыхъ мемуаровъ относящихся къ теоріи возмущеній, именно въ мемуарѣ подъ заглавіемъ: „Commentatio de corporum coelestium perturbationibus" *), Гансенъ въ первый разъ показываетъ возможность примѣненія Лагранжева способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ къ вычисленію возмущеній долготы въ орбитѣ, радіуса вектора и широты свѣтила. Понятно, что чрезъ это уменьшается число интегрируемыхъ уравненій и достигается нѣкоторое упрощеніе въ рѣшеніи задачи. Въ этомъ же мемуарѣ П. А. Гансенъ предлагаетъ поставить вопросъ о вычисленіи возмущеній въ формѣ отличной отъ той, въ которой трактовали его Лагранжъ и Лапласъ. Болѣе полное развитіе этихъ теоретическихъ соображеній Гансена мы встрѣчаемъ потомъ въ его знаменитомъ трактатѣ, изданномъ отдѣльно подъ заглавіемъ: „Fundamenta nova investigationis orbitae verae quam Luna perlustrat. 1838".

Лагранжъ способомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, привелъ рѣшеніе вопроса о возмущеніяхъ къ интегрированію совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка и первой степени, но отдѣлить перемѣнныя въ этихъ уравненіяхъ, т. е. перейти отъ дифференціальныхъ уравненій къ квадратурамъ, до сихъ поръ не удалось. Чтобы обойти эту трудность, Гансенъ предлагаетъ искать вмѣсто измѣненій элементовъ такія двѣ функціи, которыя въ связи съ нѣкоторой системой постоянныхъ элементовъ, напр. съ системой оскулирующихъ элементовъ, могли бы вполнѣ служить

*) См. Astron. Nachr. №№ 258—260, 284—286, 295—297.

для опредѣленія возмущеннаго положенія свѣтила въ орбитѣ. Впрочемъ возможность такаго рѣшенія вопроса указалъ еще Клеро въ своемъ мемуарѣ: „Theorie de mouvement des comètes". Этотъ пріемъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій вопроса о возмущеніяхъ, первоначально предложенный Клеро и вполнѣ разработанный П. А. Гансеномъ, былъ примѣненъ этимъ послѣднимъ въ теоріи луны и въ вычисленіяхъ абсолютныхъ возмущеній малыхъ планетъ. Рѣшеніе этого послѣдняго вопроса П. А. Гансенъ излагаетъ въ обширномъ трактатѣ, изданномъ отдѣльно подъ заглавіемъ: „Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856—59".

Говоря о попыткахъ интегрировать уравненія возмущеннаго движенія въ конечномъ видѣ, нельзя не упомянуть о прекрасномъ мемуарѣ Якоби, касающемся этого же предмета и напечатанномъ подъ заглавіемъ: „Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps". Въ этомъ мемуарѣ Якоби показываетъ, что аналитическое рѣшеніе вопроса о трехъ тѣлахъ можетъ быть приведено: къ рѣшенію четырехъ конечныхъ уравненій, къ интегрированію трехъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, двухъ втораго и къ выполненію одной квадратуры.

Другая трудность, представляющаяся при рѣшеніи вопроса о вычисленіи возмущеній, заключается, какъ мы сказали, въ разложеніи пертурбаціонной функціи въ быстро сходящійся рядъ даже и для тѣхъ случаевъ, когда орбита разсматриваемаго свѣтила значительно наклонена къ эклиптикѣ и имѣетъ большой эксцентриситетъ. Рѣшенію этого вопроса Гансенъ посвятилъ нѣсколько мемуаровъ и предложилъ различные пріемы, посредствомъ которыхъ болѣе или менѣе удачно достигается упомянутая цѣль. При вычисленіи абсолютныхъ возмущеній малыхъ планетъ П. А. Гансенъ предлагаетъ одинъ изъ опредѣленныхъ интеграловъ, отъ которыхъ зависитъ каждый изъ коеффиціентовъ разложенія, выполнить аналитически, а другой—вычислить по способу механической квадратуры. Не довольствуясь однако этимъ, сравнительно удобнымъ на практикѣ пріемомъ вычисленія коеффиціентовъ разложенія пертурбаціонной функціи, П. А. Гансенъ даетъ для развитія ея въ періодическій рядъ чисто аналитическій способъ, подробности котораго изложены въ мемуарѣ: „Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2+r'^2-2rr'(\cos v \cos v'+\sin v \sin v' \cos J)$". На основаніи соображеній, развитыхъ въ этомъ сочиненіи, П. А. Гансенъ представляетъ пертурбаціонную функцію въ видѣ ряда расположеннаго по степенямъ отношенія радіусовъ векторовъ возмущающаго и возмущеннаго свѣтилъ. Надо однако замѣтить, что этотъ рядъ не имѣетъ достаточно быстрой сходимости уже и тогда, когда отношеніе большихъ полуосей орбитъ того и другаго свѣтила болѣе 0,5.

Говоря о разныхъ формахъ разложенія пертурбаціонной функціи, слѣдуетъ упомянуть объ одной изъ нихъ, предложенной профессоромъ Ковальскимъ въ его замѣчательномъ сочиненіи, изданномъ въ Казани подъ заглавіемъ: „Теорія движенія Нептуна". Имѣя въ виду возмущенія большой планеты, профессоръ Ковальскій разлагаетъ пертурбаціонную функцію по степенямъ эксцентриситетовъ и наклоненій, но это разложеніе существенно разнится отъ формъ предложенныхъ Лапласомъ и Леверье. Ряды, которыми пользовались эти геометры для выраженія истинной аномаліи по средней, развиты на основаніи извѣстной теоремы Лагранжа, а потому законъ составленія коеффиціентовъ довольно сложенъ. Для рѣшенія той же задачи профессоръ Ковальскій пользовался свойствами Бесселевой трансцендентной функціи и этимъ пріемомъ значительно уяснилъ законъ составленія коеффиціентовъ.

Если вычисленіе возмущеній представляетъ извѣстныя трудности, то эти послѣднія значительно увеличиваются при опредѣленіи неравенствъ въ движеніи кометъ. Можно сказать, что до Гансена не существовало аналитическаго пріема для рѣшенія этого вопроса и главное затрудненіе представлялось въ изысканіи надлежащаго способа разложенія пертурбаціонной функціи въ періодическій рядъ. Развитіе ея, примѣнимое при вычисленіи кометныхъ возмущеній, мы встрѣчаемъ въ первый разъ въ мемуарѣ Гансена напечатанномъ подъ заглавіемъ: „Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung. Gotha. 1843". Въ этомъ сочиненіи П. А. Гансенъ предлагаетъ ввести для возмущеннаго свѣтила вмѣсто средней эксцентрическую аномалію, тогда рѣшеніе вопроса становится зависимымъ отъ интегрированія такихъ дифференціальныхъ выраженій, въ которыя одновременно входятъ и эксцентрическая и средняя аномалія. Для интегрированія этихъ выраженій Гансенъ употребляетъ два пріема: одинъ основывается на введеніи Бесселевой трансцендентной функціи, въ другомъ примѣняются непрерывныя дроби.

Такъ какъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ введеніе эксцентрической аномаліи недостаточно усиливаетъ сходимость рядовъ, то Гансенъ даетъ еще одинъ способъ для вычисленія кометныхъ возмущеній и новое рѣшеніе вопроса, зависящее отъ весьма остроумнаго раздѣленія кометной орбиты на части посредствомъ введенія такъ называемыхъ частныхъ аномалій, изложилъ въ мемуарѣ „Sur la determination de perturbations qu'eprouvent les cometes. 1853". Способъ, предлагаемый здѣсь, состоитъ въ томъ, что координаты кометы въ различныхъ частяхъ ея орбиты выражаются функціями различныхъ перемѣнныхъ величинъ и при этомъ разстояніе кометы отъ возмущающей планеты представляется формой, состоящей изъ двухъ, существенно различныхъ, частей: одна зависитъ отъ введенной частной аномаліи кометы, другая содержитъ среднюю аномалію возмущающаго свѣтила. Понятно, что ряды, которыми представляются возмущенія, будутъ также функціями двухъ перемѣнныхъ величинъ, изъ которыхъ одна, именно частная аномалія кометы измѣняется непрерывно, измѣненія же другой величины, относящейся къ возмущающему свѣтилу, будутъ происходить скачками. Въ самомъ дѣлѣ, если мы опредѣлимъ время изъ выраженія средней аномаліи кометы, представленной въ зависимости отъ той или другой частной аномаліи и внесемъ это время въ выраженіе средней аномаліи возмущающаго свѣтила, то эта аномалія сдѣлается также функціею разсматриваемой частной аномаліи. Но при всякомъ новомъ обращеніи кометы около Солнца эта функція будетъ измѣняться на постоянную величину, представляющую собою среднюю аномалію планеты, соотвѣтствующую одному изъ тѣхъ моментовъ, которые отдѣляются одинъ отъ другаго на время цѣлаго обращенія кометы около Солнца. Чтобы устранить неудобство зависящее отъ нарушенія непрерывности въ одной изъ перемѣнныхъ величинъ, Г. Гильденъ въ мемуарѣ „Ueber eine Methode die Störungen eines Cometen vermittelst rasch convergirender Ausdrücke darzustellen", предлагаетъ разсматривать среднюю аномалію возмущающей планеты какъ эллиптическую амплитуду новой перемѣнной величины. Подробности этого преобразованія методы Гансена вмѣстѣ съ примѣненіями всей теоріи къ вычисленію возмущеній производимыхъ Юпитеромъ въ движеніи кометы Энке, можно видѣть въ весьма любопытномъ мемуарѣ Астена, изданномъ подъ заглавіемъ: „Ueber die Theorie des Encke'schen Cometen. 1872".

Уже болѣе столѣтія вопросъ о вычисленіи возмущеній занимаетъ ученыхъ. Много изящныхъ и остроумныхъ пріемовъ было предложено въ это время для разработки отдѣльныхъ частей теоріи; но смотря однако на это, мы до сихъ поръ не имѣемъ для вычисленія неравенствъ способа, удовлетворяющаго потребностямъ практики во всѣхъ частныхъ случаяхъ. Ни Лагранжъ методой измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, ни Якоби исключеніемъ узловъ изъ вопроса о трехъ тѣлахъ, ни Гансенъ остроумной постановкой вопроса не устранили тѣхъ трудностей въ рѣшеніи задачи о вычисленіи возмущеній, которыя встрѣтилъ, но не преодолѣлъ Лапласъ. Этотъ великій геометръ, названный творцомъ небесной механики, отказался отъ попытокъ найти аналитическій пріемъ для вычисленія возмущеній кометъ, но такъ какъ единственное средство опровергнуть или подтвердить гипотезу о существованіи возмущеній, зависящихъ отъ сопротивленія среды, заключается въ изученіи движенія кометъ, то въ послѣднее время главныя работы по теоріи возмущеній были направлены къ изысканію простѣйшаго аналитическаго пріема для вычисленія кометныхъ неравенствъ. Но едвали можно сказать, что эта цѣль достигнута въ настоящее время, ибо до сихъ поръ неокончены вычисленія всѣхъ абсолютныхъ возмущеній кометы Энке, для которой и была принята упомянутая гипотеза. Такимъ образомъ вопросъ о сопротивленіи эфира остается открытымъ.

Для вычисленія возмущеній малыхъ планетъ П. А. Гансенъ предложилъ особый способъ, представляющій весьма много любопытнаго въ теоретическомъ отношеніи, но въ примѣненіи на практикѣ этотъ способъ оказывается столь сложнымъ, что посредствомъ него до сихъ поръ вычислены всѣ абсолютныя возмущенія и составлены таблицы только одной изъ полутораста теперь извѣстныхъ малыхъ планетъ.

Надъ теоріей луны, независимо отъ многихъ другихъ первоклассныхъ геометровъ, Гансенъ трудился всю свою жизнь; главнымъ результатомъ его работъ явились новыя лунныя таблицы, въ которыхъ многіе надѣялись видѣть окончательное рѣшеніе задачи о движеніи луны, но надо думать, что этимъ надеждамъ еще не суждено осуществиться, ибо Гансеновы таблицы луны все болѣе и болѣе расходятся съ новѣйшими лунными наблюденіями.

Таковы результаты главнѣйшихъ послѣднихъ изысканій, сдѣланныхъ въ теоріи возмущеній. Причину неудачи слѣдуетъ приписать не той или другой постановкѣ вопроса, а прямо недостатку аналитическихъ средствъ, необходимыхъ для рѣшенія трудной задачи.

Ровно семдесятъ лѣтъ тому назадъ Лапласъ предложилъ употребить для вычисленія кометныхъ возмущеній способъ механической квадратуры *); теперь этотъ искуственный пріемъ все чаще и чаще примѣняется на практикѣ; посредствомъ него вычисляются возмущенія малыхъ планетъ, имъ же стараются многіе рѣшить и деликатный вопросъ о существованіи возмущеній, независящихъ отъ притяженія планетъ. Насколько точно и безспорно будетъ такое рѣшеніе — это другой вопросъ, но во всякомъ случаѣ способъ механической квадратуры имѣетъ теперь гораздо болѣе обширный кругъ примѣненій, чѣмъ думалъ Лапласъ.

Принимая во вниманіе все то что мы сказали о современномъ состояніи теоріи возмущеній, мы считаемъ совершенно достаточнымъ представить только общій очеркъ

*) См. Traité de mecanique céleste. Tome IV, pg. 193.

аналитическаго пріема вычисленія возмущеній, основаннаго на развитіи пертурбаціонной функціи въ рядъ по степенямъ эксцентриситетовъ и наклоненій. Что же касается до способа вычисленія специальныхъ возмущеній, то его, какъ наиболѣе употребительный въ настоящее время, мы имѣемъ въ виду развить съ нѣкоторыми подробностями. Все это вмѣстѣ съ общими понятіями о механической теоріи прецессіи и нутаціи составитъ предметъ пятой и послѣдней части нашего астрономическаго трактата.

М. Хандриковъ.

Кіевская
астрономическая обсерваторія.
Въ Мартѣ 1876 года.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ.

Дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія. Интегрированіе уравненій эллиптическаго движенія. Опредѣленіе изъ наблюденій постоянныхъ введенныхъ интегрированіемъ.

I.

Выводъ дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія. Интегрированіе уравненій эллиптическаго движенія.

1. Общій вопросъ теоретической астрономіи заключается въ опредѣленіи законовъ движенія свѣтилъ, составляющихъ солнечную систему и взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Ньютонъ показалъ, что сферическій однородный слой притягиваетъ матеріальную точку такъ, какъ бы вся его масса была сосредоточена въ центрѣ слоя. Понятно, что сплошная однородная сфера притягиваетъ внѣшнюю точку такимъ же образомъ, ибо всю массу такого тѣла можно раздѣлить на концентрическіе слои. Это положеніе значительно упрощаетъ теорію движенія свѣтилъ, составляющихъ солнечную систему, ибо, обращая вниманіе на большія разстоянія, отдѣляющія одно свѣтило отъ другаго, мы можемъ разсматривать ихъ какъ сферы, и такимъ образомъ вопросъ о движеніи планетъ приведется къ вопросу о движеніи системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ, находящихся подъ взаимодѣйствіемъ по закону Ньютона.

Итакъ, принимая планеты за матеріальныя точки, найдемъ уравненія ихъ движенія для даннаго закона дѣйствія силы.

Каждое свѣтило солнечной системы находится подъ дѣйствіемъ одной главной центральной силы и нѣсколькихъ второстепенныхъ возмущающихъ, которыя, вообще говоря, малы въ сравненіи съ главной. Извѣстно, что если какое нибудь явленіе производится совокупностью извѣстныхъ силъ, отдѣльное дѣйствіе которыхъ достаточно

мало, то совокупность дѣйствія всѣхъ этихъ малыхъ силъ можно разсматривать какъ сумму дѣйствій каждой силы отдѣльно. На основаніи этого соображенія, можно при рѣшеніи вопроса о движеніи какой либо планеты или кометы разсматривать спачала одну только возмущающую силу, объусловливающуюся дѣйствіемъ одной какой либо изъ всѣхъ остальныхъ планетъ. Примѣняя потомъ эти соображенія къ каждой изъ остальныхъ возмущающихъ планетъ, составимъ себѣ понятіе о возмущеніяхъ въ движеніи разсматриваемаго свѣтила, объусловливающихся совокупностію дѣйствія всѣхъ возмущающихъ планетъ.

Итакъ вопросъ о движенія планетъ и кометъ приводится къ вопросу о движеніи трехъ тѣлъ: Солнца, разсматриваемаго свѣтила и одной изъ возмущающихъ планетъ. Главный вопросъ небесной механики, представленный въ этомъ видѣ, извѣстенъ подъ именемъ задачи о трехъ тѣлахъ (Problème des trois corps).

Уравненія движенія свободной точки, имѣющей координаты x, y, z, какъ извѣстно, представляются въ формѣ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X; \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=Y; \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

гдѣ X, Y, Z суть суммы проложеній на оси координатъ всѣхъ силъ дѣйствующихъ на разсматриваемую точку. Чтобы примѣнить эти уравненія къ рѣшенію вопроса о трехъ тѣлахъ, составимъ для каждаго изъ этихъ послѣднихъ функціи X, Y, Z. Пусть массы трехъ разсматриваемыхъ тѣлъ будутъ m_0, m_1, m_2. Координаты этихъ массъ (сосредоточенныхъ въ центрѣ тяжести каждаго изъ разсматриваемыхъ тѣлъ), отнесенныхъ къ неподвижнымъ прямоугольнымъ осямъ, имѣющимъ произвольное начало и положеніе въ пространствѣ, пусть будутъ соотвѣтственно x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2. Составимъ сначала дифференціальныя уравненія движенія массы m_0. Что будемъ говорить о движеніи этой массы, то легко будетъ примѣнимо и къ двумъ другимъ. На массу m_0 дѣйствуютъ двѣ силы: одна отъ m_1, другая отъ m_2. Величина силы, дѣйствующей по закону Ньютона отъ массы m_1 на m_0, есть

$$\frac{k^2m_1}{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$$

гдѣ k^2 есть притяженіе единицы массы на единицѣ разстоянія. Подобнымъ же образомъ сила, дѣйствующая отъ m_2 на m_0, представится въ видѣ

$$\frac{k^2m_2}{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2+(z_0-z_2)^2}$$

Чтобы составить по этимъ силамъ функцію X, нужно обѣ эти силы проложить на ось x и взять сумму проложеній. Косинусы угловъ, которые составляютъ направленія этихъ силъ съ осью x, суть очевидно

$$\frac{-(x_0-x_1)}{\sqrt{(x_0-y_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}} \quad \text{и} \quad \frac{-(x_0-x_2)}{\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2+(z_0-z_2)^2}}$$

а потому въ уравненіи движенія массы m_0

$$X=\frac{k^2m_1(x_1-x_0)}{[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{k^2m_2(x_2-x_0)}{[(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2+(z_0-z_2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Если положимъ

$$U = \frac{k^2 m_0 m_1}{\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}} + \frac{k^2 m_0 m_2}{\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2+(z_0-z_2)^2}}$$
$$+ \frac{k^2 m_1 m_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}} \qquad (1)$$

то очевидно, что для массы m_0

$$X = \frac{1}{m_0}\frac{dU}{dx_0}$$

Подобнымъ же образомъ легко видѣть, что для той же массы m_0

$$Y = \frac{1}{m_0}\frac{dU}{dy_0}; \qquad Z = \frac{1}{m_0}\frac{dU}{dz_0}$$

Слѣдовательно уравненія движенія массы m_0 будутъ

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0}\frac{dU}{dx_0}; \qquad \frac{d^2y_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0}\frac{dU}{dy_0}; \qquad \frac{d^2z_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0}\frac{dU}{dz_0} \qquad (2)$$

Подобнымъ же образомъ движенія массъ m_1 и m_2 будутъ представляться уравненіями

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1}\frac{dU}{dx_1}; \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1}\frac{dU}{dy_1}; \qquad \frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1}\frac{dU}{dz_1}$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2}\frac{dU}{dx_2}; \qquad \frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2}\frac{dU}{dy_2}; \qquad \frac{d^2z_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2}\frac{dU}{dz_2}$$

Такимъ образомъ рѣшеніе вопроса объ абсолютномъ движеніи трехъ тѣлъ, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, приводится къ интегрированію девяти совмѣстныхъ уравненій втораго порядка. Число уравненій можетъ быть однако уменьшено тремя, если только за начало координатъ примемъ не неподвижную въ пространствѣ точку, а одну изъ подвижныхъ массъ, напр. массу m_2. Проведемъ черезъ центръ тяжести свѣтила m_2 прямоугольную систему осей параллельныхъ первоначальнымъ неподвижнымъ осямъ и назовемъ координаты массъ m_0 и m_1 относительно такихъ осей чрезъ $x, y, z; x', y', z'$; тогда

$$x = x_0 - x_2 \qquad\qquad x' = x_1 - x_2$$
$$y = y_0 - y_2 \qquad\qquad y' = y_1 - y_2$$
$$z = z_0 - z_2 \qquad\qquad z' = z_1 - z_2$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} - \frac{d^2x_2}{dt^2} \qquad\qquad \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{d^2x_2}{dt^2} \qquad (3)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} - \frac{d^2y_2}{dt^2} \qquad\qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} - \frac{d^2y_2}{dt^2}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_0}{dt^2} - \frac{d^2z_2}{dt^2} \qquad\qquad \frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2} - \frac{d^2z_2}{dt^2}$$

Примемъ массу m_2 за единицу, въ которой будемъ выражать массы другихъ разсматриваемыхъ свѣтилъ, и внесемъ вмѣсто вторыхъ производныхъ первоначальныхъ координатъ ихъ величины взятыя изъ уравненій (2) и имъ подобныхъ; тогда найдемъ, что дифференціальныя уравненія движенія массъ m_0 и m_1 относительно массы m_2 будутъ

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{m_0}\frac{dU}{dx_0} - \frac{dU}{dx_2}; & \frac{d^2x'}{dt^2} &= \frac{1}{m_1}\frac{dU}{dx_1} - \frac{dU}{dx_2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{1}{m_0}\frac{dU}{dy_0} - \frac{dU}{dy_2}; & \frac{d^2y'}{dt^2} &= \frac{1}{m_1}\frac{dU}{dy_1} - \frac{dU}{dy_2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{1}{m_0}\frac{dU}{dz_0} - \frac{dU}{dz_2}; & \frac{d^2z'}{dt^2} &= \frac{1}{m_1}\frac{dU}{dz_1} - \frac{dU}{dz_2} \end{aligned}$$

По первымъ изъ выраженій (3) видно, что

$$\begin{aligned} x - x' &= x_0 - x_1 \\ y - y' &= y_0 - y_1 \\ z - z' &= z_0 - z_1 \end{aligned}$$

Внося это въ выраженіе (1) и вмѣстѣ съ тѣмъ обращая вниманіе на первыя изъ выраженій (3), легко представимъ функцію U въ видѣ

$$(5)\qquad U = \frac{k^2 m_0\, m_1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{k^2 m_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{k^2 m_1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Выраженіе (1) есть функція координатъ x_0, x_1, x_2, y_0 и т. д., тогда какъ послѣднее выраженіе U содержитъ координаты x, x', y, y' и т. д., а потому тождественно имѣемъ

$$\begin{aligned} &\frac{dU}{dx_0}\cdot dx_0 + \frac{dU}{dx_1}\cdot dx_1 + \frac{dU}{dx_2}\cdot dx_2 + \frac{dU}{dy_0}\cdot dy_0 + \frac{dU}{dy_1}\cdot dy_1 + \frac{dU}{dy_2}\cdot dy_2 + \cdots \\ &\qquad = \frac{dU}{dx}\cdot dx + \frac{dU}{dx'}\cdot dx' + \frac{dU}{dy}\cdot dy + \frac{dU}{dy'}\cdot dy' + \frac{dU}{dz}\cdot dz + \frac{dU}{dz'}dz' \end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned} dx &= dx_0 - dx_2 & dx' &= dx_1 - dx_2 \\ dy &= dy_0 - dy_2 & dy' &= dy_1 - dy_2 \\ dz &= dz_0 - dz_2 & dz' &= dz_1 - dz_2 \end{aligned}$$

Внесемъ эти величины дифференціаловъ во вторую часть предыдущаго уравненія и, сравнивая коэффиціенты при одинакихъ дифференціалахъ въ полученномъ тождественномъ уравненіи, найдемъ

$$\frac{dU}{dx_0} = \frac{dU}{dx}; \qquad \frac{dU}{dx_1} = \frac{dU}{dx'}; \qquad \frac{dU}{dx_2} = -\left[\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dx'}\right]$$

и подобныя же выраженія для производныхъ взятыхъ относительно двухъ другихъ

координатъ. Посредствомъ этого уравненія (4) можно представить въ видѣ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{1}{m_0}+1\right)\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dx'}\,;\qquad \frac{d^2x'}{dt^2}=\left(\frac{1}{m_1}+1\right)\frac{dU}{dx'}+\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{1}{m_0}+1\right)\frac{dU}{dy}+\frac{dU}{dy'}\,;\qquad \frac{d^2y'}{dt^2}=\left(\frac{1}{m_1}+1\right)\frac{dU}{dy'}+\frac{dU}{dy} \qquad (6)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\left(\frac{1}{m_0}+1\right)\frac{dU}{dz}+\frac{dU}{dz'}\,;\qquad \frac{d^2z'}{dt^2}=\left(\frac{1}{m_1}+1\right)\frac{dU}{dz'}+\frac{dU}{dz}$$

Къ интегрированію этихъ шести совокупныхъ уравненій и приводится рѣшеніе задачи о трехъ тѣлахъ. Впрочемъ дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія представляются обыкновенно въ другой формѣ, зависящей не отъ функціи U, но отъ введенной Лагранжемъ *пертурбаціонной функціи*.

Изъ выраженія (5) легко получаемъ

$$\frac{dU}{dx}=\frac{-k^2m_0\,m_1\,(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{k^2m_0\,x}{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dU}{dx'}=\frac{k^2m_0\,m_1\,(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{k^2m_1\,x'}{[x'^2+y'^2+z'^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad (7)$$

Внося это въ первыя два изъ уравненій (6), легко приведемъ ихъ къ виду

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k^2\,(1+m_0)\,x}{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{-k^2m_1\,(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{k^2m_1\,x'}{[x'^2+y'^2+z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{k^2\,(1+m_1)\,x'}{[x'^2+y'^2+z'^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{k^2m_0\,(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{k^2m_0\,x}{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Полагая въ первомъ изъ этихъ уравненій

$$R=\frac{m_1}{1+m_0}\left[\frac{1}{\rho}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right] \qquad (8)$$

и подобнымъ же образомъ во второмъ

$$R'=\frac{m_0}{1+m_1}\left[\frac{1}{\rho}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r^3}\right]$$

гдѣ

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\; r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2};\; \rho=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

приводимъ два предыдущія дифференціальныя уравненія къ виду

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2\,(1+m_0)\,\frac{x}{r^3}=k^2\,(1+m_0)\,\frac{dR}{dx}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}+k^2\,(1+m_1)\,\frac{x'}{r'^3}=k^2\,(1+m_1)\,\frac{dR'}{dx'}$$

Въ подобныя же формы преобразовываются и другія уравненія изъ группы (6).

Итакъ дифференціальныя уравненія движенія свѣтила m_0 имѣютъ теперь видъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m_0)\frac{x}{r^3} = k^2(1+m_0)\frac{dR}{dx}$$

(9)
$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m_0)\frac{y}{r^3} = k^2(1+m_0)\frac{dR}{dy}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m_0)\frac{z}{r^3} = k^2(1+m_0)\frac{dR}{dz}$$

Въ этой формѣ они и извѣстны подъ именемъ дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія. Функція R введена Лагранжемъ и называется пертурбаціонной функціей.

Для рѣшенія задачи о трехъ тѣлахъ предыдущія уравненія должны быть интегрированы совмѣстно съ тремя уравненіями движенія свѣтила m_1, имѣющими видъ

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + k^2(1+m_1)\frac{x'}{r'^3} = k^2(1+m_1)\frac{dR'}{dx'}$$

(9_*)
$$\frac{d^2y'}{dt^2} + k^2(1+m_1)\frac{y'}{r'^3} = k^2(1+m_1)\frac{dR'}{dy'}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} + k^2(1+m_1)\frac{z'}{r'^3} = k^2(1+m_1)\frac{dR'}{dz'}$$

Такимъ образомъ рѣшеніе задачи о трехъ тѣлахъ приводится къ интегрированію шести совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій (6) или равнозначныхъ имъ уравненій (9) и (9_*). Первоначально найденныя девять уравненій вида (2) имѣли каноническую форму, тогда какъ ни уравненія (6), ни уравненія (9) и (9_*) этой формы не имѣютъ. Однако извѣстнымъ выборомъ положенія начала координатъ уравненія (6) легко могутъ быть приведены къ канонической формѣ и тогда рѣшеніе вопроса будетъ зависѣть отъ интегрированія шести совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій, имѣющихъ каноническую форму.

Для упомянутаго сейчасъ преобразованія уравненій (6), примемъ за начало осей координатъ, къ которымъ будемъ относить положенія трехъ разсматриваемыхъ свѣтилъ, центръ тяжести массъ m_2 и m_0. Если назовемъ чрезъ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ координаты этой точки относительно первоначальныхъ осей произвольныхъ по положенію, но неподвижныхъ въ пространствѣ, то по свойству центра тяжести будемъ имѣть

$$\bar{x} = \frac{x_0m_0 + x_2}{1+m_0}, \qquad \bar{y} = \frac{y_0m_0 + y_2}{1+m_0}, \qquad \bar{z} = \frac{z_0m_0 + z_2}{1+m_0}$$

При этомъ мы какъ прежде принимаемъ $m_2 = 1$. Назовемъ чрезъ ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' координаты массъ m_0 и m_1 отнесенныя къ новымъ осямъ параллельнымъ первоначальнымъ, но имѣющимъ начало въ центрѣ тяжести массъ m_0 и m_2, тогда

$$\xi = x_0 - \frac{x_0m_0 + x_2}{1+m_0}; \qquad \xi' = x_1 - \frac{x_0m_0 + x_2}{1+m_0}$$

Подобную же форму имѣютъ координаты η, η'; ζ, ζ'. По

$$x_1 - x_2 = x'; \qquad x_0 - x_1 = x - x'$$

а потому

$$\xi' = \frac{(1 + m_0)\, x' - x.m_0}{1 + m_0}$$

или

$$\xi' = x' - \frac{x \,.\, m_0}{1 + m_0}$$

И такъ

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{x}{1 + m_0}; &\qquad \xi' &= x' - \frac{x \,.\, m_0}{1 + m_0} \\
\eta &= \frac{y}{1 + m_0}; &\qquad \eta' &= y' - \frac{y \,.\, m_0}{1 + m_0} \\
\zeta &= \frac{z}{1 + m_0}; &\qquad \zeta' &= z' - \frac{z \,.\, m_0}{1 + m_0}
\end{aligned} \tag{10}$$

Разсматривая U сначала какъ функцію координатъ $x, y, z; x', y', z'$, а потомъ какъ функцію отъ $\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'$, имѣемъ тождественно

$$\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dx'} dx' + \frac{dU}{dy} dy + \cdots\cdots = \frac{dU}{d\xi} d\xi + \frac{dU}{d\xi'} d\xi' + \frac{dU}{d\eta} d\eta + \cdots\cdots$$

внеся сюда вмѣсто $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, $d\xi'$ и т. д. ихъ величины, найденныя по предыдущимъ выраженіямъ (10), и сравнивая коеффиціенты при одинакихъ дифференціалахъ, найдемъ

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{1 + m_0} \frac{dU}{d\xi} - \frac{m_0}{1 + m_0} \frac{dU}{d\xi'}; \qquad \frac{dU}{dx'} = \frac{dU}{d\xi'} \tag{11}$$

и т. д.

Дифференцируя выраженія (10), имѣемъ

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{1 + m_0} \frac{d^2x}{dt^2}; \qquad \frac{d^2\xi'}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} - \frac{m_0}{1 + m_0} \frac{d^2x}{dt^2}$$

и т. д.

Вставляя сюда вмѣсто производныхъ $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2x'}{dt^2}$ и т. д. ихъ величины изъ уравненій (6), найдемъ

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{dU}{dx} + \frac{1}{1 + m_0} \frac{dU}{dx'}; \qquad \frac{d^2\xi'}{dt^2} = \frac{1 + m_0 + m_1}{m_1 (1 + m_0)} \frac{dU}{dx'}$$

и т. д.

Обращая вниманіе на уравненія (11) и имъ подобныя, отсюда имѣемъ

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{m_0 (1 + m_0)} \frac{dU}{d\xi}; \qquad \frac{d^2\xi'}{dt^2} = \frac{1 + m_0 + m_1}{m_1 (1 + m_0)} \frac{dU}{d\xi'}$$

и т. д.

Слѣдовательно, если положимъ здѣсь

$$\frac{1}{m_0(1+m_0)}=\frac{1}{\mu}; \qquad \frac{1+m_0+m_1}{m_1(1+m_0)}=\frac{1}{\mu'}$$

то дифференціальныя уравненія движенія массъ m_0 и m_1 около упомянутаго центра тяжести будутъ

$$(12) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2}&=\frac{1}{\mu}\frac{dU}{d\xi} & \frac{d^2\xi'}{dt^2}&=\frac{1}{\mu'}\frac{dU}{d\xi'} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2}&=\frac{1}{\mu}\frac{dU}{d\eta} & \frac{d^2\eta'}{dt^2}&=\frac{1}{\mu'}\frac{dU}{d\eta'} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}&=\frac{1}{\mu}\frac{dU}{d\zeta} & \frac{d^2\zeta'}{dt^2}&=\frac{1}{\mu'}\frac{dU}{d\zeta'} \end{aligned}$$

Эти шесть уравненій имѣютъ каноническую форму и отъ интегрированія ихъ зависитъ рѣшеніе вопроса о возмущенномъ движеніи массъ m_0 и m_1.

2. Изъ двѣнадцати интеграловъ шести совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія до сихъ поръ въ конечной формѣ извѣстны только четыре, а потому задача о трехъ тѣлахъ можетъ быть рѣшена теперь не иначе какъ путемъ послѣдовательныхъ приближеній.

Такъ какъ массы всѣхъ планетъ малы въ сравненіи съ массой Солнца, то въ такомъ же отношеніи находятся и возмущающія силы относительно центральной, поэтому въ первомъ приближеніи рѣшенія вопроса можно принять массу возмущающаго свѣтила равною нулю, т. е. въ нашемъ случаѣ, разсматривая движеніе массы m_0 около массы m_2, принятой за единицу, можно положить $m_1=0$, тогда по уравненію (8) видимъ, что $R=0$ и уравненія (9) обращаются въ

$$(13) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}+k^2(1+m_0)\frac{x}{r^3}&=0 \\ \frac{d^2y}{dt^2}+k^2(1+m_0)\frac{y}{r^3}&=0 \\ \frac{d^2z}{dt^2}+k^2(1+m_0)\frac{z}{r^3}&=0 \end{aligned}$$

Эти уравненія извѣстны подъ именемъ дифференціальныхъ уравненій эллиптическаго движенія и отъ интегрированія ихъ зависитъ рѣшеніе вопроса о движеніи разсматриваемаго свѣтила, имѣющаго массу m_0, около Солнца, ибо будемъ предполагать далѣе, что за единицу массъ принята масса Солнца.

Помножимъ второе изъ этихъ уравненій на x, первое на y, потомъ—первое на z, третье на x и наконецъ третье на y, а второе на z и послѣ каждаго умноженія будемъ вычитать второе произведеніе изъ перваго, тогда получимъ

$$\begin{aligned} x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}&=0 \\ z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}&=0 \\ y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}&=0 \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравненія, найдемъ

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c_1$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = c_2 \qquad (14)$$

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c_3$$

гдѣ c_1, c_2, c_3 суть постоянныя величины введенныя интегрированіемъ. Разности $x.dy - y.dx$, $z.dx - x.dz$ и $y.dz - z.dy$, какъ извѣстно изъ геометріи, суть удвоенныя площади элементарныхъ секторовъ, описанныхъ во время dt на плоскостяхъ координатъ проложеніями на эти плоскости линіи, соединяющей центръ разсматриваемаго свѣтила съ началомъ координатъ, за которое мы приняли центръ Солнца. Назовемъ эти удвоенныя элементарныя площади чрезъ dp_1, dp_2, dp_3, тогда три предыдущія уравненія представятся въ видѣ

$$dp_1 = c_1.dt; \qquad dp_2 = c_2.dt; \qquad dp_3 = c_3.dt$$

Интегралы этихъ выраженій суть

$$p_1 = c_1.t; \qquad p_2 = c_2.t; \qquad p_3 = c_3.t$$

Такъ какъ положеніе осей координатъ, проходящихъ черезъ центръ Солнца, остается пока совершенно произвольнымъ, то заключаемъ, что площадь, описанная проложеніемъ упомянутой выше линіи на какую либо плоскость, пропорціональна времени, а слѣдовательно площадь, описанная въ пространствѣ самою этою линіею, также пропорціональна времени. Въ этомъ состоитъ первый законъ Кеплера.

Умножимъ первое изъ уравненій (14) на z, второе на y, третье на x и, взявъ сумму произведеній, получимъ

$$c_1 z + c_2 y + c_3 x = 0 \qquad (15)$$

Это есть первый изъ окончательныхъ интеграловъ уравненій эллиптическаго движенія. Онъ, какъ видимъ, представляетъ собою уравненіе плоскости проходящей черезъ начало координатъ; но такъ какъ за начало координатъ мы приняли при выводѣ уравненій (9), а слѣдовательно и уравненій (13), центръ Солнца, то заключаемъ, что свѣтило, находясь подъ дѣйствіемъ одного только центральнаго тѣла, притягивающаго по закону Ньютона, движется въ плоскости, проходящей чрезъ эту центральную точку, въ нашемъ случаѣ чрезъ центръ Солнца.

Легко показать, что три постоянныя величины, входящія въ найденный интегралъ (15), могутъ быть замѣнены только двумя дѣйствительно произвольными постоянными. Въ самомъ дѣлѣ, расположимъ произвольную до сихъ поръ плоскость xy въ плоскости эклиптики и проведемъ ось x въ точку весенняго равноденствія. Принимая въ предыдущемъ уравненія $z = 0$, получимъ изъ него уравненіе линіи пересѣченія плоскости орбиты свѣтила съ плоскостію эклиптики, которое слѣдовательно будетъ

$$c_2 y + c_3 x = 0$$

а такъ какъ отсюда имѣемъ

$$y = -\frac{c_3}{c_2} x$$

то заключаемъ, что $-\frac{c_3}{c_2}$ есть тангенсъ угла, который эта линія пересѣченія, или, какъ будемъ называть ее, линія узловъ составляетъ съ осью x. Означимъ этотъ уголъ чрезъ θ, тогда

$$\text{(16)} \qquad \operatorname{tang} \theta = -\frac{c_3}{c_2}$$

представитъ собою тангенсъ долготы узла орбиты. Если назовемъ чрезъ i уголъ наклоненія орбиты къ эклиптикѣ, которую приняли за плоскость xy, то извѣстно, что c_1 должна быть пропорціональна косинусу этого угла, именно

$$\cos i = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

а слѣдовательно

$$\sin i = \sqrt{\frac{c_2^2 + c_3^2}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

Но изъ уравненія (16) находимъ

$$\sin \theta = \frac{-c_3}{\sqrt{c_2^2 + c_3^2}}; \qquad \cos \theta = \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 + c_3^2}}$$

Слѣдовательно

$$\sin i . \sin \theta = \frac{-c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

$$\sin i . \cos \theta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

а потому, если положимъ для краткости

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = C$$

то найдемъ

$$\text{(17)} \qquad c_1 = C . \cos i; \qquad c_2 = -C . \sin i . \sin \theta; \qquad c_3 = C . \sin i . \cos \theta$$

Внося это въ интегралъ (15), представимъ его въ видѣ

$$\text{(18)} \qquad z . \cos i + y . \sin i . \cos \theta - x . \sin i . \sin \theta = 0$$

въ которомъ онъ, какъ и должно быть, содержитъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины, одна изъ нихъ, именно i представляетъ наклоненіе орбиты къ эклиптикѣ, а другая—долготу узла орбиты на эклиптикѣ.

Такъ какъ при дѣйствіи, по закону Ньютона, одной только центральной силы центръ разсматриваемаго свѣтила движется въ плоскости, то, при изыскапіи двухъ

остальныхъ окончательныхъ интеграловъ уравненій движенія, удобно расположить плоскость xy въ самой плоскости орбиты. Такъ какъ свѣтило постоянно остается въ этой плоскости, то для него $z = 0$, и движеніе въ плоскости xy вполнѣ опредѣлится первыми двумя изъ уравненій (13). Чтобы интегрировать эти два уравненія, умножимъ первое изъ нихъ на $2dx$, второе на $2dy$ и такъ какъ

$$r^2 = x^2 + y^2; \qquad r.dr = x.dx + y.dy$$

то, сложивъ два упомянутыя сейчасъ произведенія, легко получимъ

$$d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + 2k^2\mu \cdot \frac{dr}{r^2} = 0$$

гдѣ для краткости положено $1 + m_0 = \mu$. Интегралъ этого уравненія есть

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \frac{2k^2\mu}{r} + h = 0 \tag{19}$$

Подъ h разумѣемъ здѣсь постоянную величину введенную интегрированіемъ.

Умноживъ первое изъ уравненій (13) на y, второе на x, вычтемъ первое произведеніе изъ втораго; интегралъ полученнаго такимъ образомъ уравненія будетъ

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c \tag{20}$$

Замѣтимъ, что здѣсь подъ x и y разумѣемъ координаты свѣтила отнесенныя къ осямъ, расположеннымъ извѣстнымъ образомъ въ плоскости орбиты, а потому постоянная c введенная интегрированіемъ отличается отъ постоянной c_1, входящей въ первое изъ уравненій (14). Возвысивъ послѣднее уравненіе въ квадратъ и придавая затѣмъ къ обѣимъ частямъ сумму

$$x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + y^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

легко приведемъ все къ виду

$$(x^2 + y^2)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] - \left[x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right]^2 = c^2$$

или

$$r^2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] - r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2$$

откуда

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{c^2}{r^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

Внося это въ интегралъ (19), получимъ

$$c^2 + r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2k^2\mu.r + h.r^2 = 0$$

откуда

$$dt = \frac{r\,.\,dr}{\sqrt{2k^2\mu.r - h.r^2 - c^2}} \tag{21}$$

Разность $x\,.\,dy - y\,.\,dx$ есть удвоенная площадь сектора, описаннаго радіусомъ векторомъ разсматриваемаго свѣтила въ плоскости орбиты во время dt, а потому, если назовемъ чрезъ dv элементарный уголъ, пройденный этимъ радіусомъ векторомъ въ тоже время dt, то

$$x\,.\,dy - y\,.\,dx = r^2\,.\,dv$$

Слѣдовательно по уравненію (20) имѣемъ

$$dt = \frac{r^2}{c}\cdot dv \tag{22}$$

Сравнивая это съ выраженіемъ (21), получимъ

$$dv = \frac{c\,.\,dr}{r\sqrt{2k^2\mu.r - h.r^2 - c^2}}$$

что легко приводится къ виду

$$dv = \frac{\frac{c}{\sqrt{h}}\,\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2k^2\mu}{h.r} - 1 - \frac{c^2}{h.r^2}}}$$

Пусть

$$\frac{k^2\mu}{h} = a; \qquad \frac{c^2}{h} = a^2\,(1 - e^2) \tag{23}$$

тогда

$$dv = \frac{a\,.\sqrt{1-e^2}\;\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2a}{r} - 1 - \frac{a^2\,(1-e^2)}{r^2}}}$$

Помноживъ въ этомъ выраженіи числителя и знаменателя второй части на $\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}$, получимъ

$$dv = \frac{\frac{a}{e}\,(1-e^2)\,\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \left[\frac{a\,(1-e^2)}{re} - \frac{1}{e}\right]^2}}$$

Для интегрированія этого выраженія, введемъ сюда новое перемѣнное ψ подъ условіемъ

$$\psi = \frac{a\,(1-e^2)}{re} - \frac{1}{e}$$

тогда предыдущее обращается въ

$$dv = \frac{-d\psi}{\sqrt{1-\psi^2}}$$

интегралъ этого есть

$$v = arc.\cos\psi + \omega$$

гдѣ подъ ω разумѣемъ постоянную величину введенную интегрированіемъ. Итакъ

$$\psi = \cos(v-\omega)$$

Подставляя сюда вмѣсто ψ его предыдущую величину, легко находимъ

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos(v-\omega)} \tag{24}$$

Это есть второй конечный интегралъ уравненій эллиптическаго движенія. Онъ представляетъ собою полярное уравненіе описанной кривой; но такъ какъ это выраженіе r есть общая форма полярнаго уравненія коническаго сѣченія, фокусъ котораго находится въ началѣ координатъ, то заключаемъ, что при дѣйствіи одной центральной силы свѣтило описываетъ коническое сѣченіе, въ одномъ изъ фокусовъ котораго находится центръ Солнца. Такъ выражается второй законъ Кеплера.

Чтобы найти третій конечный интегралъ уравненій эллиптическаго движенія, обратимся къ уравненію (21). Представивъ его въ видѣ

$$dt = \frac{r.dr}{\sqrt{h}\sqrt{\frac{2k^2\mu}{h}r - r^2 - \frac{c^2}{h}}}$$

введемъ означенія (23), и тогда легко получимъ

$$dt = \frac{r.dr}{\sqrt{h}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}$$

Чтобы взять интегралъ этого выраженія, введемъ новое перемѣнное u подъ условіемъ

$$a - r = ae.\cos u \tag{25}$$

тогда

$$dt = [a - ae.\cos u]\frac{du}{\sqrt{h}} \tag{26}$$

интегрируя это, имѣемъ

$$t + l = \frac{a}{\sqrt{h}}[u - e.\sin u] \tag{27}$$

гдѣ l есть постоянная величина введенная интегрированіемъ. Такова форма третьяго конечнаго интеграла уравненій эллиптическаго движенія.

Опредѣлимъ теперь значенія постоянныхъ величинъ введенныхъ интегрированіемъ. Постоянными θ и i опредѣляется положеніе плоскости орбиты въ пространствѣ и значенія ихъ извѣстны.

Если назовемъ чрезъ f уголъ, который заключается между большою осью, или прямою, проведенною чрезъ фокусы коническаго сѣченія и радіусомъ векторомъ какой либо точки кривой, то полярное уравненіе этой послѣдней, какъ коническаго сѣченія, имѣетъ видъ

$$r = \frac{p}{1 + e.\cos f} \tag{28}$$

При $f = 0$ величина радіуса вектора, какъ видно, дѣлается наименьшею, именно

$$r = \frac{p}{1 + e}$$

точку кривой, соотвѣтствующую величинѣ $f = 0$, будемъ называть *перигеліемъ*, а точку, соотоѣтствующую $f = 180^0$ и слѣдовательно наибольшей величинѣ r, назовемъ *афеліемъ*. Уголъ f въ астрономіи называется *истинной аномаліей*. Сравнивая интегралъ (24) съ общимъ уравненіемъ (28) коническаго сѣченія, заключаемъ, что e есть эксцентриситетъ орбиты, a ея большая полуось и $v - \omega$ истинная аномалія разсматриваемаго свѣтила. Условимся считать уголъ v отъ линіи узловъ. Этотъ уголъ v, заключающійся между радіусомъ векторомъ свѣтила и линіей узловъ или пересѣченіемъ орбиты съ эклиптикой, называется *аргументомъ широты* свѣтила. Въ интегралѣ (24) истинная аномалія свѣтила представляется разностію $v - \omega$, а потому, условившись считать уголъ v какъ мы сейчасъ сказали, заключаемъ, что ω есть разстояніе перигелія орбиты отъ ея узла. Такимъ образомъ постоянною ω опредѣляется положеніе орбиты въ ея плоскости, а совокупностію постоянныхъ θ, i и ω вполнѣ *опредѣляется положеніе орбиты* въ пространствѣ.

Остается опредѣлить значеніе послѣдней постоянной величины l. Для этого найдемъ соотношеніе между истинной аномаліей и перемѣнной величиной u. Опредѣляя изъ уравненія (25) величину r и сравнивая ее съ величиною r, представленною интеграломъ (24), находимъ

$$a - ae.\cos u = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e.\cos(v - \omega)}$$

откуда

$$\cos(v - \omega) = \frac{\cos u - e}{1 - e.\cos u}$$

посредствомъ этого легко составляемъ

$$\begin{aligned} 2.\cos^2\left(\frac{v-\omega}{2}\right) &= \frac{(1 + \cos u)(1 - e)}{1 - e.\cos u} \\ 2.\sin^2\left(\frac{v-\omega}{2}\right) &= \frac{(1 - \cos u)(1 + e)}{1 - e.\cos u} \end{aligned} \tag{29}$$

Назвавъ истинную аномалію чрезъ f и помня, что $v - \omega = f$, сначала перемножимъ эти два уравненія, а потомъ вычтемъ второе изъ перваго, тогда обращая вниманіе на уравненіе (25), легко получимъ

$$\begin{aligned} r.\sin f &= a.\sqrt{1 - e^2}.\sin u \\ r.\cos f &= a.\cos u - ae \end{aligned} \tag{30}$$

Такова одна изъ формъ соотношенія между угломъ u и истинной аномаліей f. Чтобы получить вторую форму раздѣлимъ уравненія (29) одно на другое и тогда найдемъ

$$\tang \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tang \frac{u}{2} \tag{31}$$

Это уравненіе показываетъ, что если $f = 0$, то и $u = 0$; при $f = 180^0$, $u = 180^0$, другими словами, въ перигеліи и афеліи $f = u$.

Предположимъ, что орбита разсматриваемаго свѣтила имѣетъ эллиптическую форму. Опишемъ изъ центра этой кривой кругъ радіусомъ большой полуоси. Пусть въ P (фиг. 1) будетъ положеніе свѣтила на орбитѣ; опустимъ изъ P перпендикуляръ на большую ось и продолжимъ этотъ перпендикуляръ до пересѣченія съ описаннымъ кругомъ въ точкѣ C. На указываемой фигурѣ истинная аномалія свѣтила представляется угломъ PFb, если F есть фокусъ эллипсиса занимаемый центромъ Солнца. Означимъ уголъ COb чрезъ β, тогда изъ треугольника COB имѣемъ

$$OB = OC \cdot \cos\beta = a \cdot \cos\beta$$

кромѣ того

$$OB = OF + FB = ae + r \cdot \cos f$$

Сравнивая эти два выраженія линіи OB, получаемъ

$$a \cdot \cos\beta = ae + r \cdot \cos f$$

Слѣдовательно

$$r \cdot \cos f = a \cdot \cos\beta - ae$$

Сравнивая это со вторымъ изъ выраженій (30), видимъ, что $u = \beta$, а этотъ уголъ β называется *эксцентрической аномаліей*. Такимъ образомъ уравненіями (30) и (31) представляется соотношеніе между истинной и эксцентрической аномаліей свѣтила.

Если свѣтило находится въ перигеліи, то эксцентрическая аномалія, какъ мы видѣли, равна нулю, когда же послѣ цѣлаго обращенія свѣтило снова придетъ въ перигелій, то мы можемъ считать, что эксцентрическая аномалія достигла значенія 2π; поэтому если будемъ интегрировать уравненіе (26) по u между предѣлами 0 и 2π, то интегралъ первой части представитъ собою время полнаго обращенія свѣтила около Солнца, т. е. время протекшее между двумя послѣдовательными прохожденіями свѣтила чрезъ перигелій. Назовемъ это время чрезъ T, и взявъ интегралъ уравненія (26) между предѣлами 0 и 2π, найдемъ

$$T = \frac{a}{\sqrt{h}} \cdot 2\pi$$

Но по первому изъ уравненій (23)

$$h = \frac{k^2\mu}{a} = \frac{k^2(1+m_0)}{a}$$

Внося это въ предыдущее уравненіе, представимъ его въ видѣ

$$T^2 = \frac{a^3}{k^2(1+m_0)} 4\pi^2 \tag{32}$$

Для другой планеты, большая полуось орбиты которой есть a', время обращенія около Солнца T' и масса m_1, подобно этому будемъ имѣть

$$T'^2 = \frac{a'^3}{k^2(1+m_1)} 4\pi^2$$

Раздѣливъ одно изъ этихъ выраженій на другое, получимъ

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3(1+m_1)}{a'^3(1+m_0)}$$

Такъ какъ въ первомъ приближеніи рѣшенія вопроса о движеніи свѣтилъ, составляющихъ солнечную систему, мы пренебрегаемъ массами планетъ въ сравненіи съ массой Солнца, то въ этомъ выраженіи должны принять $m_0 = 0$ и $m_1 = 0$, тогда

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^2}{a'^3}$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что квадраты временъ обращенія планетъ и кометъ около Солнца относятся между собой какъ кубы большихъ полуосей ихъ орбитъ. Въ этомъ состоитъ третій законъ Кеплера.

Изъ выраженія (32) находимъ

$$\frac{k\sqrt{1+m_0}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi}{T}$$

а потому заключаемъ, что $\frac{k\sqrt{1+m_0}}{a^{\frac{3}{2}}}$ представляетъ дугу пройденную свѣтиломъ въ ту единицу времени, въ какой выражено время T. Такъ какъ T по большей части выражается въ суткахъ, то

(33) $$\frac{k\sqrt{1+m_0}}{a^{\frac{3}{2}}} = n$$

называется обыкновенно *среднимъ суточнымъ движеніемъ* свѣтила. Такъ какъ n есть величина постоянная для даннаго свѣтила, то можетъ возникнуть сомнѣніе касательно того, какимъ образомъ свѣтило, двигаясь по эллипсису, проходитъ въ каждыя сутки равныя пространства. Чтобы устранить это недоразумѣніе, достаточно замѣтить, что сказанное относится не къ дѣйствительному свѣтилу, а къ нѣкоторой воображаемой точкѣ, движущейся равномѣрно по кругу радіуса равнаго среднему разстоянію дѣйствительнаго свѣтила отъ Солнца. Эта воображаемая точка совпадаетъ съ дѣйствительнымъ свѣтиломъ только въ перигеліи и афеліи орбиты, ибо въ другихъ точкахъ пути истинная и эксцентрическая аномаліи различны между собою.

Подобно тому какъ въ случаѣ дѣйствительнаго свѣтила угловое перемѣщеніе его, считая отъ перигелія, называется истинной аномаліей, такъ точно и угловое перемѣщеніе этой воображаемой точки, считаемое отъ перигелія называется аномаліей средней планеты или просто *средней аномаліей*. Поэтому среднюю аномалію можно разсматривать какъ произведеніе средняго суточнаго движенія на число среднихъ су-

токъ протекшихъ отъ разсматриваемаго момента до предшествующаго ему прохожденія свѣтила черезъ перигелій. Итакъ если возмемъ интегралъ уравненія (26) въ предѣлахъ 0 и u, разумѣя подъ u значеніе эксцентрической аномаліи соотвѣтствующее какому нибудь времени t, а подъ τ время прохожденія свѣтила черезъ перигелій, то найдемъ

$$n(t-\tau)=u-e\,.\sin u$$

Если положимъ $n(t-\tau)=M$, то M представитъ собою среднюю аномалію, соотвѣтствующую времени t. И такъ

$$M=u-e\,.\sin u$$

Интегралъ (27) можно представить въ видѣ

$$n(t+l)=u-e\,.\sin u$$

Сравнивая это съ предыдущимъ, видимъ, что

$$M=n(t+l)$$

Слѣдовательно $t+l$ есть время протекшее отъ прохожденія свѣтила черезъ перигелій до разсматриваемаго момента; представленное въ этой формѣ, оно состоитъ изъ двухъ частей: одна l есть промежутокъ времени протекшій отъ прохожденія черезъ перигелій до произвольнаго момента принятаго за эпоху, отъ которой хотимъ считать время t, другая часть есть время протекшее отъ этой эпохи до разсматриваемаго момента. На основаніи этого постоянная l называется *эпохой*, а произведеніе nl— средней аномаліей эпохи.

И такъ три конечные интеграла уравненій эллиптическаго движенія имѣютъ видъ

$$z\,.\cos i+y\,.\sin i\,.\cos\theta-x\,.\sin i\,.\sin\theta=0$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\,.\cos(v-\omega)}$$

$$nt+M_0=u-e\,.\sin u$$

гдѣ $M_0=nl$. Въ эти три интеграла, какъ и должно быть, входятъ шесть произвольныхъ постоянныхъ величинъ, именно i, θ, ω, e, n и M_0. Эти постоянныя называются *элементами орбиты*. Три первыя изъ нихъ служатъ для полнаго опредѣленія положенія орбиты въ пространствѣ, тремя другими опредѣляется видъ и размѣры орбиты, а также положеніе свѣтила въ орбитѣ для всякаго времени. Видъ и размѣры орбиты зависятъ отъ ея эксцентриситета и длины большой полуоси, величина перваго есть e, вторая опредѣляется по данному n, ибо среднее суточное движеніе находится, какъ мы знаемъ, въ прямой зависимости отъ большой полуоси. Соотношеніе между этими величинами представляется уравненіемъ (33). Элементами n и M_0, т. е. среднимъ суточнымъ движеніемъ и средней аномаліей эпохи опредѣляется для всякаго времени средняя аномалія свѣтила, а слѣдовательно и положеніе этого послѣдняго въ орбитѣ. Эксцентриситетъ e часто замѣняется угломъ, синусъ котораго равняется e. Такимъ образомъ въ систему элементовъ вводится уголъ φ, опредѣляющійся изъ выраженія $e=\sin\varphi$. Эта величина φ называется *угломъ эксцентриситета*.

Интегралъ (24) показываетъ, что свѣтило, находясь подъ дѣйствіемъ одной только центральной силы, описываетъ коническое сѣченіе, которое можетъ быть эллипсисомъ, параболой и гиперболой. Планеты, искони принадлежащія солнечной системѣ, описываютъ около этого центральнаго тѣла сомкнутыя кривыя, движутся по эллипсисамъ съ незначительнымъ эксцентриситетомъ. Кометы не образуются въ солнечной системѣ, но приходятъ въ нее изъ отдаленныхъ мировыхъ пространствъ и въ солнечной системѣ могутъ двигаться по эллипсисамъ, параболамъ и гиперболамъ. Если назовемъ чрезъ U скорость свѣтила на орбитѣ и замѣтимъ, что

$$U^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

то изъ уравненія (19) видимъ, что

$$U = \sqrt{\frac{2k^2.\mu}{r} - h}$$

но

$$h = \frac{k^2\mu}{a}$$

поэтому

$$U = k\sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}$$

Мы знаемъ, что a положительна для эллипсиса, безконечна для параболы и отрицательна для гиперболы, а потому

на эллипсисѣ . . . . $U < k\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$

на параболѣ . . . . $U = k\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$

на гиперболѣ . . . . $U > k\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$

Отсюда заключаемъ, что комета тогда будетъ имѣть въ солнечной системѣ эллиптическую орбиту, когда, двигаясь къ Солнцу изъ отдаленныхъ пространствъ и достигнувъ теперь описываемой кривой, имѣетъ скорость меньшую $k\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$. Если же въ тотъ моментъ, когда комета начинаетъ двигаться около Солнца, скорость ея равна $k\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$, то орбита этого свѣтила будетъ параболическая, наконецъ если въ моментъ вступленія въ районъ дѣйствія Солнца комета имѣетъ скорость большую $k\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$, то подъ вліяніемъ центральной силы она опишетъ гиперболу.

По большей части кометы движутся по параболамъ, рѣдко—по эллипсисамъ и еще рѣже по гиперболамъ. Въ параболическомъ движеніи положеніе орбиты въ пространствѣ опредѣляется тѣми же элементами какъ и въ эллиптическомъ, но такъ какъ

въ параболѣ большая полуось обращается въ безконечность, то вмѣсто элемента a для кометной орбиты вводится разстояніе ея перигелія отъ Солнца; такъ что если назовемъ разстояніе перигелія отъ Солнца чрезъ q и замѣтимъ, что для параболы $e = 1$, то для параболическаго движенія интегралъ (24) представится въ видѣ

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{(v - \omega)}{2}}$$

Кромѣ того вмѣсто эпохи вводится въ разсматриваемомъ случаѣ время прохожденія кометы черезъ перигелій. Такимъ образомъ если назовемъ чрезъ T время прохожденія черезъ перигелій, то элементы параболической орбиты представятся системою пяти постоянныхъ: i, θ, ω, q и T. Три первыя имѣютъ тоже значеніе какъ и въ эллиптическомъ движеніи.

Въ различныя выраженія, которыя мы здѣсь привели, кромѣ другихъ постоянныхъ входитъ постоянная k. По выраженію (32) она представляется въ видѣ

$$k = \frac{2\pi . a^{\frac{3}{2}}}{T . \sqrt{1 + m_0}}$$

Этой формой и слѣдуетъ пользоваться для опредѣленія величины k, для этого стоитъ только вмѣсто a, T и m_0 внести въ предыдущее выраженіе ихъ значенія относящіяся къ такой планетѣ, для которой эти величины a, T и m_0 наиболѣе точно извѣстны. За такую планету слѣдуетъ считать землю, для которой

$$T = 365\,2503835 \text{ сред. сутокъ}$$

$$m_0 = \frac{1}{354710}, \qquad a = 1$$

а потому

$$\log k = 8.2355814414$$

$$k = 0.01720209895$$

Величина k извѣстна подъ именемъ постоянной величины солнечной системы, или еще подъ именемъ Гауссовой постоянной величины, ибо точное значеніе ея въ первый разъ дано К. Ф. Гауссомъ въ его сочиненіи Theoria motus corporum coelestium.

II.

Опредѣленіе изъ наблюденій постоянныхъ величинъ, входящихъ въ интегралы уравненій эллиптическаго движенія.

3. Общее рѣшеніе вопроса объ опредѣленіи элементовъ орбиты планеты или кометы по извѣстному числу наблюденій въ первый разъ предложено К. Ф. Гауссомъ и первоначально примѣнено имъ къ вычисленію орбиты Цереры.

Если разстоянія свѣтила отъ земли или Солнца, соотвѣтствующія опредѣленнымъ моментамъ времени, извѣстны, то вычисленіе системы элементовъ орбиты не представляетъ трудностей, поэтому существенную часть разсматриваемаго теперь вопроса составляетъ опредѣленіе упомянутыхъ разстояній.

Для вычисленія орбиты, т. е. для опредѣленія шести элементовъ за данныя вопроса слѣдуетъ считать координаты наблюдаемыхъ съ земли положеній свѣтила, и такъ какъ каждое положеніе опредѣляется двумя координатами: склоненіемъ и прямымъ восхожденіемъ, или широтой и долготой, то трехъ геоцентрическихъ положеній, вообще говоря, будетъ достаточно для опредѣленія шести упомянутыхъ неизвѣстныхъ, ибо выражая каждую изъ названныхъ координатъ въ зависимости отъ элементовъ, мы получили бы шесть уравненій съ шестью неизвѣстными величинами, но исключеніе неизвѣстныхъ изъ этихъ уравненій весьма затруднительно, а потому приходится рѣшать разсматриваемый вопросъ послѣдовательными приближеніями на основаніи какого либо болѣе или менѣе искуственнаго пріема.

Чтобы прослѣдить соображенія, на которыхъ основываетъ Гауссъ вычисленіе разстояній свѣтила отъ земли или Солнца, посмотримъ прежде всего къ чему приводится опредѣленіе этихъ разстояній. Пусть въ S (фиг. 2) будетъ находиться центръ Солнца. Опишемъ около этой точки произвольнымъ радіусомъ сферу. Пусть въ P и T будутъ находиться въ извѣстный моментъ центры разсматриваемаго свѣтила, напр. планеты и земли. Назовемъ разстояніе SP планеты отъ Солнца чрезъ r, разстояніе PT планеты отъ земли пусть будетъ Δ, разстояніе же ST земли отъ Солнца означимъ чрезъ R. Изъ центра Солнца планета видна на сферѣ небесной по направленію SP въ точкѣ p; изъ центра земли планета представляется на той же сферѣ въ точкѣ p' и наконецъ земля изъ центра Солнца видна на сферѣ небесной въ точкѣ t. Такимъ образомъ точка p есть для даннаго времени геліоцентрическое положеніе пла-

неты, точка p' есть соотвѣтствующее геоцентрическое положеніе того же свѣтила и наконецъ точка t есть геліоцентрическое положеніе земли, соотвѣтствующее тому же данному моменту. Если чрезъ точки S, P и T проведемъ плоскость, то эта послѣдняя пересѣчется со сферой небесной по большому кругу, на которомъ расположены точки p, p' и t, т. е. соотвѣтствующія одному и тому же времени геоцентрическое положеніе планеты, ея геліоцентрическое положеніе и геліоцентрическое положеніе земли.

Означимъ уголъ SPT чрезъ z и уголъ PTt—чрезъ δ. При сдѣланныхъ означеніяхъ изъ треугольника SPT находимъ

$$\frac{r}{\sin\delta}=\frac{R}{\sin z}=\frac{\Delta}{\sin(\delta-z)}$$

откуда

$$r=\frac{R\,.\sin\delta}{\sin z};\qquad \Delta=\frac{R\,.\sin(\delta-z)}{\sin z}\tag{34}$$

При вычисленіи планетной или кометной орбиты R есть данная величина; что касается до δ, то этотъ уголъ, какъ скоро увидимъ, весьма просто опредѣляется по другимъ даннымъ величинамъ вопроса, полученнымъ изъ непосредственныхъ наблюденій. Такимъ образомъ опредѣленіе разстояній свѣтила отъ земли и Солнца приводится къ вычисленію того угла z, подъ которымъ съ разсматриваемаго свѣтила представляется разстояніе земли отъ Солнца.

Соображенія, на которыхъ К. Ф. Гауссъ основываетъ опредѣленіе угла z, составляютъ существенную часть теоріи опредѣленія планетныхъ и кометныхъ орбитъ изъ трехъ наблюденій. Эти соображенія заключаются въ слѣдующемъ:

Представимъ себѣ опять, что около центра Солнца произвольнымъ радіусомъ описана сфера. Такъ какъ плоскость эклиптики проходитъ чрезъ центръ Солнца, то она пересѣчется съ этой сферой по большому кругу EQ (фиг. 8). Пусть три геліоцентрическія положенія земли, соотвѣтствующія временамъ трехъ разсматриваемыхъ наблюденій свѣтила, находятся на этомъ большомъ кругѣ въ точкахъ A, A' и A''. Плоскость орбиты разсматриваемаго свѣтила также проходитъ чрезъ центръ Солнца, а потому и она пересѣчется съ упомянутой сферой по большому кругу. Пусть PP' будетъ дуга этого круга; точка P его пересѣченія съ эклиптикой будетъ ничто иное какъ одинъ изъ узловъ орбиты. Предположимъ, что P есть восходящій узелъ, т. е. тотъ, проходя черезъ который, планета или комета приближается къ сѣверному полюсу эклиптики. Пусть геліоцентрическія положенія свѣтила соотвѣтствующія временамъ трехъ наблюденій будутъ находиться въ точкахъ C, C', C'' расположенныхъ на большомъ кругѣ PP'. Если соединимъ большими кругами геліоцентрическія положенія планеты съ геліоцентрическими положеніями земли, т. е. соединимъ точки: A съ C, A' съ C', A'' съ C'', то эти большіе круги пересѣкутся въ точкахъ D, D' и D'' и на этихъ кругахъ будутъ находиться соотвѣтствующія геоцентрическія положенія планеты, ибо этими кругами, какъ мы замѣтили, будутъ представляться пересѣченія со сферой небесной плоскостей, проведенныхъ чрезъ геоцентрическое и геліоцентрическое положеніе планеты, а также и чрезъ геліоцентрическое положеніе земли. Пусть геоцентрическія положенія планеты, соотвѣтствующія временамъ трехъ наблюденій находятся въ точкахъ B, B', B''. Если чрезъ два крайнія положенія B и B'' прове-

демъ большой кругъ, то онъ, вообще говоря, не пройдетъ чрезъ среднее положеніе B' и пересѣчется съ кругомъ $A'D$ въ нѣкоторой точкѣ B_*.

Каковы бы не были три угла α, β, γ, они всегда будутъ удовлетворять тождественному уравненію вида

$$\sin\alpha \,.\, \sin(\gamma-\beta) + \sin\beta \,.\, \sin(\alpha-\gamma) + \sin\gamma \,.\, \sin(\beta-\alpha) = 0 \tag{35}$$

Поэтому мы можемъ подставить въ это уравненіе на мѣсто α, β, γ какія угодно части выше упомянутыхъ, большихъ круговъ. Пусть напр. $\alpha = NC$; $\beta = NC'$; $\gamma = NC''$, тогда

$$\begin{aligned} \gamma-\beta &= NC''-NC' = C''C' \\ \alpha-\gamma &= NC-NC'' = -CC'' \\ \beta-\alpha &= NC'-NC = C'C \end{aligned}$$

Внося это въ уравненіе (35), дадимъ ему видъ

$$\sin NC \,.\, \sin C'C'' - \sin NC' \,.\, \sin CC'' + \sin NC'' \,.\, \sin CC' = 0 \tag{36}$$

Изъ точекъ C, C', C'' проведемъ большіе круги перпендикулярные къ кругу NB''. Означимъ дуги Ca, $C'a'$ и $C''a''$ этихъ круговъ чрезъ L, L' и L''. Тогда изъ треугольниковъ NCa, $NC'a'$ и $NC''a''$ имѣемъ

$$\frac{\sin NC}{\sin L} = \frac{\sin NC'}{\sin L'} = \frac{\sin NC''}{\sin L''}$$

Внося въ уравненіе (36) вмѣсто $\sin NC$, $\sin NC'$ и $\sin NC''$ величины имъ пропорціональныя, найдемъ

$$\sin L \,.\, \sin C'C'' - \sin L' \,.\, \sin CC'' + \sin L'' \,.\, \sin CC' = 0 \tag{37}$$

Дуги PC, PC', PC'' суть аргументы широты свѣтила соотвѣтствующіе временамъ трехъ наблюденій; дуги CC', CC'' и $C'C'$ могутъ быть разсматриваемы какъ разности этихъ аргументовъ широты, и эти разности очевидно будутъ равны разностямъ истинныхъ аномалій свѣтила соотвѣтствующихъ тѣмъ же моментамъ времени. Въ самомъ дѣлѣ, означимъ для временъ трехъ наблюденій аргументы широты чрезъ u, u', u''; три соотвѣтствующія истинныя аномаліи пусть будутъ v, v', v''. Пусть наконецъ разстояніе перигелія отъ узла орбиты будетъ какъ прежде ω, тогда

$$PC = u = v + \omega; \qquad PC' = u' = v' + \omega; \qquad PC'' = u'' = v'' + \omega$$

откуда

$$\begin{aligned} C''C' &= PC'' - PC' = u'' - u' = v'' - v' \\ CC'' &= PC'' - PC = u'' - u = v'' - v \\ CC' &= PC' - PC = u' - u = v' - v \end{aligned}$$

Пусть

$$v'' - v' = 2f; \qquad v'' - v = 2f'; \qquad v' - v = 2f''$$

тогда уравненіе (37) приметъ видъ

$$\sin L \,.\, \sin 2f - \sin L' \,.\, \sin 2f' + \sin L'' \,.\, \sin 2f'' = 0 \qquad (38)$$

Означимъ разстоянія свѣтила отъ Солнца, соотвѣтствующія временамъ трехъ наблюденій, чрезъ r, r', r''. Удвоенная площадь треугольника, заключающагося между радіусами векторами r, r' и хордой, соединяющей первое положеніе свѣтила на орбитѣ со вторымъ, пусть будетъ n''. Подобнымъ же образомъ означимъ чрезъ n' удвоенную площадь треугольника, заключающагося между радіусами векторами r и r'' и соотвѣтствующей хордой. Пусть наконецъ n будетъ удвоенная площадь треугольника, заключающагося между радіусами векторами r', r'' и хордой, соединяющей второе положеніе свѣтила на орбитѣ съ третьимъ. Пусть въ S (фиг. 4) будетъ центръ Солнца, въ P и P' положенія планеты или кометы на орбитѣ, соотвѣтствующія временамъ перваго и втораго наблюденія. Тогда $SP = r$; $SP' = r'$; $PSP' = v' - v = 2f''$. Если опустимъ изъ P перпендикуляръ Pm на SP', то удвоенная площадь треугольника PSP' будетъ $n'' = SP' . Pm$ или

$$n'' = rr' . \sin 2f''$$

подобно этому

$$n' = rr'' . \sin 2f'; \qquad n = r'r'' . \sin 2f$$

Если умножимъ уравненіе (38) на $\frac{rr'r''}{\sin L''}$, то понятно, что при сдѣланныхъ означеніяхъ оно приведется къ виду

$$rn \frac{\sin L}{\sin L''} - r'n' \frac{\sin L'}{\sin L''} + r''n'' = 0 \qquad (39)$$

Такъ какъ положенія точекъ C, C', C'' намъ неизвѣстны, то и дуги L, L' L'' также должны считаться за неизвѣстныя величины. Легко видѣть однако, что неизвѣстныя величины r, r', r'', L, L', L'', входящія въ это уравненіе, могутъ быть замѣнены одною неизвѣстною, которую мы, не относя ко времени какого либо опредѣленнаго наблюденія, означили чрезъ z; теперь подъ z мы будемъ разумѣть величину этого угла, соотвѣтствующую времени средняго наблюденія.

Проведемъ изъ точекъ D, D', D'' большіе круги перпендикулярные къ кругу NB''. Означивъ части bD, $b'D'$ и $b''D''$ этихъ круговъ чрезъ k, k', k'', тогда изъ треугольниковъ aBC, $b''D''B$ и $b'D'D$ получимъ

$$\frac{\sin L}{\sin BC} = \frac{\sin k''}{\sin BD''} = \frac{\sin k}{\sin BD}$$

Подобно этому треугольники $a'B_*C'$, $B_*b''D''$ и B_*Db даютъ

$$\frac{\sin L'}{\sin B_*C'} = \frac{\sin k''}{\sin D_*D''} = \frac{\sin k}{\sin B_*D}$$

Наконецъ изъ треугольниковъ $a''B''C''$, $B''b'D'$ и $D''bD$ находимъ

$$\frac{\sin L''}{\sin B''C''} = \frac{\sin k'}{\sin B''D'} = \frac{\sin k}{\sin B''D}$$

Положенія точекъ A, A', A'' и B, B', B'' (фиг. 3) извѣстны, а потому и положенія большихъ круговъ, проведенныхъ чрезъ эти точки, также извѣстны, извѣстны и мѣста точекъ D, D', D'', въ которыхъ пересѣкаются эти круги, а слѣдовательно можно считать извѣстными и величины дугъ BD'', BD', B_*D'', B_*D, $B''D'$ и $B''D$. Что касается до величинъ BC, B_*C' и $B''C''$, то онѣ неизвѣстны, ибо мы не знаемъ положенія точекъ C, C', C''.

Будемъ пользоваться предыдущими пропорціями для опредѣленія отношеній

$$\frac{\sin L}{\sin L''} \quad \text{и} \quad \frac{\sin L'}{\sin L''}$$

и представимъ эти послѣднія въ такихъ формахъ, которыя не зависили бы отъ величинъ k, k' и k''. Имѣя это въ виду, находимъ изъ перваго и втораго ряда отношеній

$$\sin L = \frac{\sin DC \,.\, \sin k'}{\sin BD'}; \qquad \sin L'' = \frac{\sin B''C''.\sin k'}{\sin B''D'}$$

откуда

$$\frac{\sin L}{\sin L''} = \frac{\sin BC \,.\, \sin B''D'}{\sin BD' .\sin B''C''}$$

Второй и третій рядъ предыдущихъ отношеній дастъ

$$\sin L' = \frac{\sin B_*C'.\sin k}{\sin B_*D}; \qquad \sin L'' = \frac{\sin B''C''.\sin k}{\sin B''D}$$

Слѣдовательно

$$\frac{\sin L'}{\sin L''} = \frac{\sin B_*C'.\sin B''D}{\sin B_*D \,.\, \sin B''C''}$$

Внося найденныя величины отношеній въ уравненіе (39), приведемъ его къ виду

$$(40) \qquad \frac{r.n}{r''}\,\frac{\sin BC.\sin B''D'}{\sin BD'.\sin B''C''} - \frac{r'n'}{r''}\,\frac{\sin B_*C'.\sin B''D}{\sin B_*D.\sin B''C''} + n'' = 0$$

Означимъ чрезъ ω отступленіе средняго геоцентрическаго положенія свѣтила отъ большаго круга, проведеннаго черезъ два крайнія положенія, т. е. примемъ $B'B_* = \omega$; но такъ какъ $B_*C' = B'C' - B_*B'$, то при сдѣланныхъ означеніяхъ

$$B_*C' = z - \omega$$

Если для средняго положенія по первому изъ уравненій (34) имѣемъ $r'.\sin z' = R'.\sin \delta'$, то подобно этому для двухъ крайнихъ положеній

$$r.\sin BC = R.\sin \delta; \qquad r''.\sin B''C'' = R''.\sin \delta''$$

гдѣ R и R'' суть разстоянія земли отъ Солнца, соотвѣтствующія временамъ перваго и третьяго положенія, кромѣ того замѣтимъ, что δ и δ'' суть ничто иное какъ дуги AB и $A''B''$ (фиг. 3). Имѣя все это, легко представимъ уравненіе (40) въ видѣ

$$n\,\frac{R.\sin\delta.\sin B''D'}{R''.\sin\delta''.\sin BD'} - n'\,\frac{r'.\sin(z-\omega)\sin B''D}{R''.\sin\delta''.\sin B_*D} + n'' = 0$$

Исключая отсюда r' посредствомъ выраженія

$$r' = \frac{R'.\sin\delta'}{\sin z}$$

и полагая для краткости

$$\frac{R.\sin\delta}{R''.\sin\delta''}\cdot\frac{\sin B''D'}{\sin BD'} = a; \qquad \frac{R'.\sin\delta'}{R''.\sin\delta''}\cdot\frac{\sin B''D}{\sin B_*D} = b \tag{41}$$

легко приводимъ предыдущее выраженіе къ виду

$$a.n - b.n'\frac{\sin(z-\omega)}{\sin z} + n'' = 0 \tag{42}$$

Это уравненіе и должно служить для вычисленія неизвѣстной величины z. Въ него входятъ, кромѣ того, неизвѣстныя величины n, n', n''; но эти послѣднія К. Ф. Гауссъ замѣняетъ такими двумя функціями, которыя могутъ быть вычисляемы послѣдовательными приближеніями. Одна изъ этихъ функцій есть

$$P = \frac{n''}{n}$$

Сдѣлавъ такое положеніе, представимъ предыдущее уравненіе въ видѣ

$$\frac{(an+n'')(P+1)}{(P+1)} - n'b\cdot\frac{\sin(z-\omega)}{\sin z} = 0$$

Но такъ какъ $Pn = n''$, то это легко приводится къ виду

$$(n''+n)\frac{P+a}{P+1} = n'b\,\frac{\sin(z-\omega)}{\sin z}$$

Пусть другая функція Q опредѣляется подъ условіемъ

$$\frac{n''+n}{n'} = \frac{Q}{2r'^3} + 1 \tag{43}$$

тогда предыдущее обращается въ

$$\frac{Q}{2r'^3} + 1 = b\,\frac{(P+1)}{P+a}\,\frac{\sin(z-\omega)}{\sin z}$$

или въ

$$\frac{Q.\sin^4 z}{2R'^3\sin^3\delta'} = \frac{b.(1+P)}{P+a}\sin(z-\omega) - \sin z$$

Придавая и вычитая въ послѣднемъ членѣ подъ знакомъ синуса по ω, легко приведемъ все къ виду

$$\frac{Q.\sin^4 z}{2R'^3\sin^3\delta'} = \sin\omega\left[\frac{\dfrac{b(1+P)}{a+P} - \cos\omega}{\sin\omega}\sin(z-\omega) - \cos(z-\omega)\right]$$

Пусть

$$(44)\qquad \frac{\dfrac{b.(1+P)}{a+P}-\cos\omega}{\sin\omega}=\operatorname{cotg}\sigma$$

тогда предыдущее уравненіе приводится къ виду

$$\frac{Q.\sin^4 z}{2R'^3.\sin^3\delta'}=\frac{\sin\omega}{\sin\sigma}\sin(z-\omega-\sigma)$$

положимъ здѣсь

$$(45)\qquad \frac{1}{2R'^3\sin^3\delta'.\sin\omega}=c;\qquad M=Q.c.\sin\sigma$$

тогда будемъ имѣть

$$(46)\qquad M.\sin^4 z=\sin(z-\omega-\sigma)$$

уравненіе служащее для опредѣленія искомой величины z. Такъ какъ это уравненіе четвертой степени, то имѣетъ четыре корня, которые простыми пробами легко и скоро могутъ быть розысканы. Легко видѣть который изъ корней соотвѣтствуетъ опредѣляемой орбитѣ. Изъ этихъ четырехъ корней должны быть отвергнуты всѣ тѣ, которые имѣютъ величину бо́льшую 180°, ибо для этихъ корней $\sin z$ есть отрицательная величина, а такъ какъ

$$r'=\frac{R'.\sin\delta'}{\sin z}$$

то при $z>180^0$ радіусъ векторъ r' имѣетъ отрицательное значеніе, что не соотвѣтствуетъ вопросу, ибо радіусъ векторъ свѣтила есть величина существенно положительная. Кромѣ того изъ четырехъ корней должны быть отвергнуты тѣ, которые болѣе δ', ибо при $z>\delta'$ мы нашли бы по второму изъ уравненій (34) отрицательную величину для ρ', что опять не соотвѣтствуетъ вопросу. Наконецъ изъ корней долженъ быть отвергнутъ тотъ, который по величинѣ равенъ δ'. При $z=\delta'$ первое изъ уравненій (34) даетъ $r'=R'$, а потому корень $z=\delta'$ соотвѣтствуетъ не искомой орбитѣ, но орбитѣ земли. Такимъ образомъ изъ четырехъ корней по большей части остается одинъ, который можетъ быть принятъ для вычисленія орбиты. Если же окажется, что въ числѣ четырехъ корней находятся два по величинѣ меньшіе δ', то три наблюденія, лежащія въ основаніи вычисленія, могутъ быть представлены двумя различными орбитами, и тогда необходимо взять четвертое наблюденіе для того чтобы узнать, какую изъ двухъ вычисляемыхъ орбитъ дѣйствительно описываетъ свѣтило.

4. Какъ скоро z надлежащимъ образомъ опредѣлено, то вычисленіе радіусовъ векторовъ свѣтила, соотвѣтствующихъ временамъ двухъ крайнихъ наблюденій, не представляетъ трудностей. Для опредѣленія радіуса вектора r соотвѣтствующаго первому наблюденію проведемъ изъ точекъ C и C'' (фиг. 3) большіе круги перпендикулярно къ кругу $A''D$ и положимъ $m'C''=x$; $mC=y$. Кромѣ того означимъ углы $A''DA'$, $A''DA$ и $A'D'A$ чрезъ ε, ε', ε''; тогда изъ треугольниковъ $C''m'D$ и CmD' имѣемъ

$$\sin x=\sin\varepsilon.\sin C''D;\qquad \sin y=\sin\varepsilon'.\sin CD'$$

Но $CD = A'D - A'D' + B'C' = A'D - \delta' + z$, слѣдовательно

$$\sin x = \sin \varepsilon \,.\, \sin (A'D - \delta' + z)$$

Если назовемъ уголъ $A''C''C$ чрезъ w'', то изъ треугольниковъ $mC''C$ и $m'C''C'$ имѣемъ

$$\sin x = \sin C'C'' \sin w'' = \sin 2f \,.\, \sin w'' = \frac{n}{r'r''} \sin w''$$

$$\sin y = \sin CC'' \sin w'' = \sin 2f' \,.\, \sin w'' = \frac{n'}{rr''} \sin w''$$

Сравнивая эти выраженія съ соотвѣтствующими имъ предыдущими, имѣемъ

$$\frac{n}{r'r''} \sin w'' = \sin \varepsilon \sin (A'D - \delta' + z)$$

$$\frac{n'}{rr''} \sin w'' = \sin \varepsilon' \,.\, \sin \xi$$

гдѣ полагаемъ $CD' = \xi$. Раздѣливъ одно изъ этихъ уравненій на другое, найдемъ

$$r \,.\, \sin \xi = \frac{n'r'}{n} \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} \sin (z + A'D - \delta') \tag{47}$$

Одного этого уравненія для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ r и ξ недостаточно, а потому пользуясь извѣстнымъ соотношеніемъ

$$r \,.\, \sin BC = R \,.\, \sin \delta$$

составимъ другое. Изъ фиг. 3 видно, что $BC = CD' + AB - AD' = \xi - AD' + \delta$. Если положимъ $AD' - \delta = k$, то предыдущее уравненіе представится въ видѣ

$$r \,.\, \sin (\xi - k) = R \,.\, \sin \delta \tag{48}$$

пусть для краткости

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n'r'}{n} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} \sin (z + A'D - \delta') = p \\ &\frac{R \,.\, \sin \delta}{\sin k} = \varkappa \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

тогда уравненія (47) и (48) примутъ видъ

$$r \,.\, \sin \xi = p$$
$$r \,.\, \sin (\xi - k) = \varkappa \sin k$$

умноживъ первое изъ этихъ уравненій на $\cos k$ и вычтя изъ произведенія неизмѣненное второе, легко найдемъ

$$r \,.\, \cos \xi = p \,.\, \operatorname{cotg} k - \varkappa \tag{50}$$

если прибавимъ къ этому уравненіе

$$r \,.\, \sin \xi = p \tag{51}$$

то будемъ имѣть два необходимыя и достаточныя уравненія для вычисленія двухъ неизвѣстныхъ величинъ r и ξ. Величина p опредѣляется по первому изъ выраженій (49), которое зависитъ отъ совершенно неизвѣстныхъ величинъ n' и n, однако эти послѣднія могутъ быть замѣнены множителемъ содержащимъ функцію P. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ уравненіе (42) на n и помня, что $\frac{n''}{n} = P$, легко представимъ его въ видѣ

$$\frac{n'}{n} = \frac{(a + P)\sin z}{b.\sin(z - \omega)}$$

Но такъ какъ

$$r' = \frac{R'.\sin\delta'}{\sin z}$$

то

$$\frac{n'r'}{n} = \frac{(a + P)\,R'.\sin\delta'}{b.\sin(z - \omega)} \tag{52}$$

И такъ p должно быть опредѣлено изъ выраженія

$$p = \frac{(a + P)\,R'.\sin\delta'}{b.\sin(z - \omega)}\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'}\sin(z + A'D - \delta') \tag{53}$$

Совершенно подобнымъ же образомъ опредѣлится по данному z радіусъ векторъ, соотвѣтствующій времени третьяго наблюденія.

Проведемъ изъ точекъ C' и C'' (фиг. 3) большіе круги перпендикулярные къ кругу AD' и положимъ $C'h = x'$, $C''h' = y'$, тогда изъ треугольниковъ $C'hD''$ и $C''h'D'$ имѣемъ

$$\sin x' = \sin\varepsilon''.\sin C'D''; \qquad \sin y' = \sin\varepsilon'.\sin C''D'$$

Пусть $C''D' = \xi''$; кромѣ того изъ фиг. 3 видимъ, что

$$C'D'' = A'D'' - A'B' + B'C' = A'D'' - \delta' + z.$$

Слѣдовательно

$$\sin x' = \sin\varepsilon''.\sin(A'D'' - \delta' + z)$$
$$\sin y' = \sin\varepsilon'.\sin\xi''$$

Если означимъ уголъ $D'CC''$ чрезъ w, то изъ треугольниковъ $C''h'C$ и $C'hC$ имѣемъ

$$\sin x' = \sin w.\sin C'C = \sin 2f''.\sin w = \frac{n''.\sin w}{rr'}$$

$$\sin y' = \sin w.\sin C''C = \sin 2f'.\sin w = \frac{n'.\sin w}{rr''}$$

Слѣдовательно

$$\frac{n''.\sin w}{rr'} = \sin \varepsilon'' \sin (A'D'' - \delta' + z)$$

$$\frac{n'.\sin w}{rr''} = \sin \varepsilon' \sin \xi''$$

Раздѣлимъ первое изъ этихъ уравненій на второе, получимъ

$$r''.\sin \xi'' = \frac{n'r'}{n''} \frac{\sin \varepsilon''}{\sin \varepsilon'} \sin (A'D'' - \delta' + z)$$

Но для времени третьяго наблюденія

$$r''.\sin B''C'' = R''.\sin \delta''$$

Изъ фиг. 3 видимъ, что $B''C'' = C''D' + A''B'' - A''D' = \xi'' + \delta'' - A''D'$
Пусть $A''D' - \delta'' = k''$, тогда

$$r''.\sin (\xi'' - k'') = R''.\sin \delta''$$

если положимъ

$$\frac{r'n'}{n''} \frac{\sin \varepsilon''}{\sin \varepsilon'} \sin (A'D'' - \delta' + z) = p''$$

то для опредѣленія r'' и ξ'' будемъ имѣть уравненія

$$r''.\sin \xi'' = p''$$
$$r''.\sin (\xi'' - k'') = R''.\sin \delta''$$

Пусть наконецъ

$$\frac{R''.\sin \delta''}{\sin k''} = \varkappa''$$

тогда, умноживъ первое уравненіе на $\cos k''$ и вычтя изъ него неизмѣненное второе, получимъ

$$r''.\cos \xi''.\sin k'' = p''.\cos k'' - \varkappa''.\sin k''$$

или

$$r''.\cos \xi'' = p''.\operatorname{cotg} k'' - \varkappa''$$

Такимъ образомъ для опредѣленія r'' и ξ'' имѣемъ два уравненія

$$\begin{aligned} r''.\sin \xi'' &= p'' \\ r''.\cos \xi'' &= p''.\operatorname{cotg} k'' - \varkappa'' \end{aligned} \qquad (54)$$

Въ выраженіе p'' входитъ множитель $\frac{n'r'}{n''}$, но такъ какъ $\frac{n''}{n} = P$, то

$$\frac{n'r'}{n''} = \frac{1}{P} \cdot \frac{n'r'}{n}$$

Но обращая вниманіе на уравненіе (52), приводимъ это къ виду

$$\frac{n'r'}{n''} = \frac{(P+a)}{P} \frac{R'.\sin \delta'}{b.\sin (z - \omega)}$$

Слѣдовательно для вычисленія p'' имѣемъ выраженіе

$$p''=\frac{(P+\omega)}{P}\cdot\frac{R'.\sin\delta'}{b.\sin(z-\omega)}\cdot\frac{\sin\varepsilon''}{\sin\varepsilon'}\sin(A'D''-\delta'+z) \tag{55}$$

Какъ скоро разстоянія свѣтила отъ Солнца опредѣлены и вмѣстѣ съ ними вычислены углы ξ, z и ξ'', то не трудно опредѣлить и разстоянія свѣтила отъ земли, соотвѣтствующія временамъ трехъ наблюденій. Назовемъ эти разстоянія чрезъ Δ, Δ' и Δ''. Если для времени каждаго наблюденія разсмотримъ прямолинейные треугольники, заключающіеся между центромъ Солнца, земли и планеты, то изъ такихъ треугольниковъ получимъ

$$\frac{\Delta}{r}=\frac{\sin AC}{\sin AB};\qquad \frac{\Delta'}{r'}=\frac{\sin A'C'}{\sin A'B'};\qquad \frac{\Delta''}{r''}=\frac{\sin A''C''}{\sin A''B''}$$

По нашимъ означеніямъ

$$AB=\delta;\qquad A'B'=\delta';\qquad A''B''=\delta''$$

и кромѣ того изъ фиг. 3 видно, что

$$AC=AD'-\xi;\qquad A'C'=A'B'-B'C'=\delta'-z;\qquad A''C''=A''D'-\xi''$$

Слѣдовательно искомыя разстоянія свѣтила отъ земли представляются въ видѣ

$$\Delta=\frac{r.\sin(AD'-\xi)}{\sin\delta}$$

$$\Delta'=\frac{r'.\sin(\delta'-z)}{\sin\delta'} \tag{56}$$

$$\Delta''=\frac{r''.\sin(A''D'-\xi'')}{\sin\delta''}$$

5. Чтобы пользоваться найденными теперь выраженіями для опредѣленія разстояній свѣтила отъ земли или Солнца, необходимо знать положенія большихъ круговъ, проведенныхъ черезъ геоцентрическія мѣста свѣтила и соотвѣтствующія имъ геліоцентрическія положенія земли. Кромѣ того необходимо найти способъ вычисленія функцій P и Q. Опредѣленіе этихъ функцій независимо отъ элементовъ орбиты и составляетъ существенную часть теоріи, предложенной Гауссомъ, для вычисленія планетныхъ и кометныхъ орбитъ.

Прежде всего по даннымъ, полученнымъ изъ непосредственныхъ наблюденій, найдемъ наклоненіе къ эклиптикѣ тѣхъ большихъ круговъ, которые проведены черезъ геоцентрическія положенія свѣтила и геліоцентрическія положенія земли, а также вычислимъ дуги этихъ круговъ, заключающіяся между упомянутыми сейчасъ точками. Въ этомъ случаѣ все что будемъ говорить о положеніяхъ относящихся ко времени одного наблюденія, будетъ равно примѣнимо и къ другимъ соотвѣтственнымъ положеніямъ.

Проводимъ изъ точки B (фиг. 3) большой кругъ перпендикулярный къ эклиптикѣ; тогда составится треугольникъ ABq, въ которомъ сторона $AD=\delta$ и уголъ

$BAq = \gamma$ суть искомыя величины. Если назовемъ чрезъ β геоцентрическую широту свѣтила, соотвѣтствующую времени перваго наблюденія, чрезъ α и l означимъ, относящіяся къ тому же времени, геоцентрическую долготу свѣтила и геліоцентрическую долготу земли, то $Dq = \beta$; $Aq = \alpha - l$. Слѣдовательно разсматриваемый треугольникъ даетъ

$$\sin\delta \,.\, \sin\gamma = \sin\beta$$
$$\sin\delta \,.\, \cos\gamma = \sin(\alpha - l) \,.\, \cos\beta$$
$$\cos\delta = \cos(\alpha - l) \,.\, \cos\beta$$

откуда

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin(\alpha - l)}\,; \qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{\operatorname{tang}(\alpha - l)}{\cos\gamma} \tag{57}$$

Эти уравненія и служатъ для опредѣленія искомыхъ γ и δ. Подобнымъ же образомъ для временъ двухъ остальныхъ наблюденій имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\gamma' &= \frac{\operatorname{tang}\beta'}{\sin(\alpha' - l')}\,; \qquad \operatorname{tang}\delta' = \frac{\operatorname{tang}(\alpha' - l')}{\cos\gamma'} \\ \operatorname{tang}\gamma'' &= \frac{\operatorname{tang}\beta''}{\sin(\alpha'' - l'')}\,; \qquad \operatorname{tang}\delta'' = \frac{\operatorname{tang}(\alpha'' - l'')}{\cos\gamma''} \end{aligned}\right\} \tag{57$_*$}$$

Имѣя углы γ, γ', γ'', опредѣлимъ дуги упомянутыхъ большихъ круговъ, заключающіяся между пересѣченіями этихъ круговъ и геліоцентрическими положеніями земли; кромѣ того найдемъ углы ε, ε', ε'', подъ которыми наклонены разсматриваемые большіе круги одинъ къ другому. Изъ треугольника $A'A''D$ (фиг. 3), въ которомъ сторона $A'A'' = l'' - l'$, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{A'D + A''D}{2} &= \sin\frac{l'' - l'}{2}\sin\frac{\gamma'' + \gamma'}{2} \\ \sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{A'D + A''D}{2} &= \cos\frac{l'' - l'}{2}\sin\frac{\gamma'' - \gamma'}{2} \\ \cos\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{A'D - A''D}{2} &= \sin\frac{l'' - l'}{2}\cos\frac{\gamma'' + \gamma'}{2} \\ \cos\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{A'D - A''D}{2} &= \cos\frac{l'' - l'}{2}\cos\frac{\gamma'' - \gamma'}{2} \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

уравненія, которыя служатъ для вычисленія дугъ $A'D$, $A''D$ и угла ε.

Изъ треугольника $A''D'A$, въ которомъ $A'' - A = l'' - l$, находимъ

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\varepsilon'}{2}\sin\frac{AD' + A''D'}{2} &= \sin\frac{l'' - l}{2}\sin\frac{\gamma'' + \gamma}{2} \\ \sin\frac{\varepsilon'}{2}\cos\frac{AD' + A''D'}{2} &= \cos\frac{l'' - l}{2}\sin\frac{\gamma'' - \gamma}{2} \\ \cos\frac{\varepsilon'}{2}\sin\frac{AD' - A''D'}{2} &= \sin\frac{l'' - l}{2}\cos\frac{\gamma'' + \gamma}{2} \\ \cos\frac{\varepsilon'}{2}\cos\frac{AD' - A''D'}{2} &= \cos\frac{l'' - l}{2}\cos\frac{\gamma'' - \gamma}{2} \end{aligned}\right\} \tag{58$_*$}$$

Этими уравненіями слѣдуетъ пользоваться для опредѣленія дугъ $A''D'$, AD' и угла ε'.

Наконецъ изъ треугольника $AA'D''$ получаемъ

$$
(58^*_*)\quad
\begin{aligned}
\sin\frac{\varepsilon''}{2}\sin\frac{AD''+A'D''}{2} &= \sin\frac{l'-l}{2}\sin\frac{\gamma''+\gamma}{2}\\
\sin\frac{\varepsilon''}{2}\cos\frac{AD''+A'D''}{2} &= \cos\frac{l'-l}{2}\sin\frac{\gamma'-\gamma}{2}\\
\cos\frac{\varepsilon''}{2}\sin\frac{AD''-A'D''}{2} &= \sin\frac{l'-l}{2}\cos\frac{\gamma'+\gamma}{2}\\
\cos\frac{\varepsilon''}{2}\cos\frac{AD''-A'D''}{2} &= \cos\frac{l'-l}{2}\cos\frac{\gamma'-\gamma}{2}
\end{aligned}
$$

уравненія служащія для опредѣленія дугъ $A'D''$, AD'' и угла ε''. Если обратимся къ треугольнику $DD'D''$ (фиг. 3), въ которомъ стороны суть: $DD'=A''D-A''D'$; $DD''=A'D-A'D''$; $D'D''=AD'-AD''$ и противуположные имъ углы ε'', $180^0-\varepsilon'$ и ε, то изъ этого треугольника имѣемъ

$$
(59)\quad \frac{\sin\varepsilon}{\sin(AD'-AD'')}=\frac{\sin\varepsilon'}{\sin(A'D-A'D'')}=\frac{\sin\varepsilon''}{\sin(A''D-A''D')}
$$

уравненіе, которое служитъ для повѣрки вычисленія.

Если дуги разсматриваемыхъ большихъ круговъ, заключающіяся между геліоцентрическими положеніями земли и точками пересѣченія этихъ круговъ, извѣстны, то извѣстны также и дуги $B''D'$, BD' и $B''D$, ибо $B''D'=A''D'-A''B''=A''D'-\delta''$, $BD'=AD'-AB=AD'-\delta$, $B''D=A''D-A''D''=A''D-\delta''$; что касается до введенной нами дуги B_*D, то для опредѣленія ея необходимо знать величину ω, ибо

$$
B_*D=A'D-A'B_*=A'D-A'B'+B'B_*=A'D-\delta'+\omega
$$

Опредѣлить величину ω не трудно. Разсмотримъ три треугольника MBq, MB_*q_* и $MB''q''$. Назовемъ уголъ BMq общій всѣмъ этимъ треугольникамъ чрезъ x и положимъ $qM=y$. Геоцентрическія широты точекъ B, B_*, B'', представляющіяся дугами Bq, B_*q_* и $B''q''$ означимъ чрезъ β, β_*, β'', геоцентрическія долготы тѣхъ же точекъ пусть будутъ α, α_* и α''. Тогда замѣтивъ, что $q_*q=\alpha_*-\alpha$; $q''q=\alpha''-\alpha$, изъ упомянутыхъ треугольниковъ имѣемъ

$$
\begin{aligned}
\tang\beta &= \tang x\,.\sin y\\
\tang\beta_* &= \tang x\,.\sin(\alpha_*-\alpha+y)\\
\tang\beta'' &= \tang x\,.\sin(\alpha''-\alpha+y)
\end{aligned}
$$

исключая изъ послѣднихъ двухъ уравненій произведеніе $\tang x\,.\cos y$, легко находимъ

$$
\tang\beta_*\sin(\alpha''-\alpha)-\tang\beta''\sin(\alpha_*-\alpha)=\tang x\,.\tang y\,.\sin(\alpha''-\alpha_*)
$$

что посредствомъ перваго изъ предыдущихъ уравненій приводится къ виду

$$
\tang\beta\sin(\alpha''-\alpha_*)-\tang\beta_*\sin(\alpha''-\alpha)+\tang\beta''\sin(\alpha_*-\alpha)=0
$$

Изъ треугольника $A'B_*q_*$ видно, что

$$\operatorname{tang}\beta_* = \operatorname{tang}\gamma'.\sin(\alpha_* - l')$$

Внося это въ предыдущее уравненіе и замѣняя въ немъ разности $\alpha'' - \alpha_*$ и $\alpha_* - \alpha$ чрезъ $\alpha'' - l' - (\alpha_* - l')$ и $\alpha_* - l' - (\alpha - l')$, легко находимъ

$$\operatorname{tang}(\alpha_* - l') = \frac{\operatorname{tang}\beta\sin(\alpha'' - l') - \operatorname{tang}\beta''\sin(\alpha - l')}{\operatorname{tang}\gamma'\sin(\alpha'' - \alpha) + \operatorname{tang}\beta\cos(\alpha'' - l') - \operatorname{tang}\beta''\cos(\alpha - l')}$$

Изъ треугольника $A'q_*B_*$, въ которомъ сторона $A'B_* = \delta' - \omega$, имѣемъ

$$\cos\gamma'.\sin(\delta' - \omega) = \cos\beta_*\sin(\alpha_* - l')$$

$$\cos(\delta' - \omega) = \cos\beta_*\cos(\alpha_* - l')$$

а потому

$$\operatorname{tang}(\alpha_* - l') = \operatorname{tang}(\delta' - \omega).\cos\gamma'$$

Сравнивая это съ предыдущимъ выраженіемъ того же тангенса, находимъ

$$\operatorname{tang}(\delta' - \omega) = \frac{\operatorname{tang}\beta.\sin(\alpha'' - l') + \operatorname{tang}\beta''.\sin(\alpha - l')}{\sin\gamma'.\sin(\alpha'' - \alpha) + \cos\gamma'[\operatorname{tang}\beta.\cos(\alpha'' - l'') - \operatorname{tang}\beta''.\cos(\alpha - l')]} \quad (60)$$

Пусть

$$S = \operatorname{tang}\beta.\sin(\alpha'' - l') - \operatorname{tang}\beta''.\sin(\alpha - l')$$

$$T.\sin t = \operatorname{tang}\beta.\cos(\alpha'' - l') - \operatorname{tang}\beta''.\cos(\alpha - l') \quad (61)$$

$$T.\cos t = \sin(\alpha'' - \alpha)$$

тогда

$$\operatorname{tang}(\delta' - \omega) = \frac{S}{T.\sin(t + \gamma)} \quad (62)$$

Этимъ уравненіемъ и слѣдуетъ пользоваться для вычисленія ω, т. е. отступленія средняго геоцентрическаго мѣста свѣтила отъ большаго круга проведеннаго черезъ два крайнія положенія. Хотя изъ этого выраженія приходится опредѣлять дугу по тангенсу, но такъ какъ среднее геоцентрическое положеніе свѣтила всегда мало уклоняется отъ упомянутаго большаго круга, то ω есть малая дуга, и сомнѣнія въ выборѣ четверти окружности для $\delta' - \omega$ быть не можетъ.

Всѣ величины, входящія въ выраженіе (41), можемъ считать теперь извѣстными, извѣстны также углы ω и σ; но для опредѣленія σ Гауссъ даетъ уравненіе (44) нѣсколько другой видъ. Это уравненіе легко представляется въ формѣ

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{(P + a)\operatorname{tang}\omega}{\dfrac{b(P + 1)}{\cos\omega} - (P + a)}$$

или

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{(P + a)\operatorname{tang}\omega}{P\left(\dfrac{b}{\cos\omega} - 1\right) + \dfrac{b}{\cos\omega} - a}$$

Пусть

$$(63)\qquad c = \frac{\tan \omega}{\frac{b}{\cos \omega} - 1}; \qquad d = \frac{\frac{b}{\cos \omega} - a}{\frac{b}{\cos \omega} - 1}$$

Тогда для вычисленія σ имѣемъ выраженіе

$$(64)\qquad \tan \sigma = \frac{c(P+a)}{P+d}$$

Легко составить нѣсколько уравненій для повѣрки вычисленія указанныхъ теперь вспомогательныхъ величинъ. Если въ уравненіи (42) сдѣлаемъ $z = \delta'$, то это уравненіе будетъ относиться къ орбитѣ земли и тогда величины n, n', n'' удвоенныхъ площадей треугольниковъ, составленныхъ изъ радіусовъ векторовъ вычисляемой планеты, должны быть замѣнены соотвѣтствующими величинами, относящимися къ земной орбитѣ. Если означимъ эти послѣднія чрезъ N, N', N'', то очевидно

$$N = R'R'' \sin(l''-l'); \qquad N' = RR'' \sin(l''-l); \qquad N'' = R'R \sin(l'-l)$$

Такимъ образомъ для земной орбиты уравненіе (42) принимаетъ видъ

$$a.N - b.N' \frac{\sin(\delta'-\omega)}{\sin \delta'} + N'' = 0$$

Внося сюда вмѣсто N, N', N'' ихъ предыдущія величины и раздѣливъ полученное уравненіе на $R.R'.R''$, найдемъ

$$(65)\qquad \frac{a}{R} \cdot \sin(l''-l') - \frac{b.\sin(l''-l)}{R'} \frac{\sin(\delta'-\omega)}{\sin \delta'} + \frac{\sin(l'-l)}{R''} = 0$$

Если вмѣстѣ съ данными величинами l, l', l''; R, R', R'' внесемъ въ это уравненіе найденныя значенія a, b, δ' и ω, то при вѣрности всего вычисленія это уравненіе должно точно удовлетвориться.

Но главная повѣрка всего вычисленія разстояній свѣтила отъ Солнца по даннымъ значеніямъ функцій P и Q состоитъ въ слѣдующемъ.

Какъ скоро ξ, ξ'' и ε' вычислены, то по нимъ изъ треугольника $CD'C''$ имѣемъ

$$(66)\qquad \cos 2f' = \cos \xi . \cos \xi'' + \sin \xi . \sin \xi'' . \cos \varepsilon'$$

выраженіе служащее для опредѣленія $2f'$. Мы знаемъ, что

$$\frac{n}{n'} = \frac{r'.\sin 2f}{r.\sin 2f'}; \qquad \frac{n''}{n'} = \frac{r'}{r''} \frac{\sin 2f''}{\sin 2f'}$$

Кромѣ того мы видѣли, что

$$\frac{n'r'}{n''} = \frac{(P+a)}{P} \frac{R'.\sin \delta'}{b.\sin(z-\omega)}; \qquad \frac{n'r'}{n} = \frac{(P+a)R'.\sin \delta'}{b.\sin(z-\omega)}$$

и такъ какъ

$$\sin 2f = \frac{r.n}{r.n'} \sin 2f'; \qquad \sin 2f'' = \frac{n''.r''}{n'.r'} \sin 2f'$$

то

$$\sin 2f = \frac{b.r.\sin(z-\omega)}{(P+a)R'.\sin\delta'} \sin 2f'; \qquad \sin 2f'' = \frac{P.b.r''.\sin(z-\omega)}{(P+a)R'.\sin\delta'} \sin 2f' \quad (67)$$

Такъ какъ вторыя части этихъ уравненій извѣстны, то самыя уравненія могутъ служить для опредѣленія $2f$ и $2f''$. Если все вычисленіе сдѣлано вѣрно, то найденныя величины $2f$, $2f'$ и $2f''$ должны точно удовлетворять уравненіе

$$2f + 2f'' = 2f'$$

которое представляетъ простое соотношеніе между частями большаго круга, проведеннаго черезъ три геліоцентрическія положенія свѣтила.

6. Перейдемъ наконецъ къ опредѣленію функцій P и Q. По уравненію (22) мы видимъ, что удвоенная площадь сектора, описаннаго въ безконечно малое время dt, есть $c.dt$, а слѣдовательно, если назовемъ чрезъ ν площадь сектора описаннаго въ конечное время t, то

$$\nu = \frac{c.t}{2}$$

Но изъ уравненій (23) видимъ, что $c = k\sqrt{\mu.a(1-e^2)}$. Пренебрегая массою планеты въ сравненіи съ массой Солнца, примемъ $\mu = 1$ и кромѣ того замѣтимъ, что $a(1-e^2) = p$, а потому

$$\nu = \frac{k.t}{2}\sqrt{p}$$

Пусть $kt = \theta$, тогда

$$\nu = \frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{p}$$

Предположимъ, что t представляетъ собою промежутокъ времени, протекшій отъ втораго до третьяго наблюденія, тогда площадь треугольника, соотвѣтствующаго разсматриваемому сектору, будетъ

$$\frac{r'r''}{2}\cdot\sin 2f$$

Означимъ чрезъ η отношеніе площади сектора къ площади треугольника, тогда

$$\eta = \frac{\theta.\sqrt{p}}{r'r''.\sin 2f} \quad (68)$$

Но такъ какъ $r'r''\sin 2f = n$, то

$$n = \frac{\theta.\sqrt{p}}{\eta}$$

Если означимъ чрезъ t'' промежутокъ времени, протекшій отъ перваго до втораго наблюденія, положимъ $kt'' = \theta''$ и назовемъ чрезъ η'' отношеніе площади сектора, описаннаго радіусомъ векторомъ во время t'', къ площади соотвѣтствующаго треугольника, то подобно предыдущему будемъ имѣть

$$n'' = \frac{\theta''.\sqrt{p}}{\eta''}$$

Слѣдовательно

(69) $$P = \frac{n''}{n} = \frac{\theta''.\eta}{\theta.\eta''}$$

Истинныя аномаліи свѣтила, соотвѣтствующія временамъ трехъ наблюденій, мы означили чрезъ v, v', v'', а потому радіусы векторы трехъ разсматриваемыхъ положеній планеты могутъ быть представлены въ формахъ

$$r = \frac{p}{1 + e.\cos v}; \quad r' = \frac{p}{1 + e.\cos v'}; \quad r'' = \frac{p}{1 + e.\cos v''}$$

откуда

$$\frac{p}{r} = 1 + e.\cos v; \quad \frac{p}{r'} = 1 + e.\cos v'; \quad \frac{p}{r''} = 1 + e.\cos v''$$

Помножимъ первое изъ этихъ уравненій на $\sin(v'' - v')$, второе на $-\sin(v'' - v)$, третье на $\sin(v' - v)$, потомъ полученныя произведенія сложимъ и, замѣтивъ, что $v'' - v' = 2f$; $v'' - v = 2f'$; $v' - v = 2f''$, найдемъ

$$p\left[\frac{\sin 2f}{r} - \frac{\sin 2f'}{r'} + \frac{\sin 2f''}{r''}\right] = \sin 2f - \sin 2f' + \sin 2f''$$

откуда

$$p = \frac{r.r'.r''.[\sin 2f - \sin 2f' + \sin 2f'']}{n - n' + n''}$$

Но такъ какъ $2f = 2f' - 2f''$, $2f' = 2f + 2f''$, $2f'' = 2f' - 2f$, то легко видѣть, что

$$\sin 2f - \sin 2f' + \sin 2f'' = 4.\sin f.\sin f'.\sin f''$$

а потому

(70) $$p = \frac{4r.r'.r''.\sin f.\sin f'.\sin f''}{n - n' + n''}$$

Слѣдовательно

$$\frac{n + n''}{n'} - 1 = \frac{4r.r'.r''}{n'.p}\sin f.\sin f'.\sin f''$$

Но мы видѣли, что

$$\sqrt{p} = \frac{n.\eta}{\theta}; \quad \sqrt{p} = \frac{n''.\eta''}{\theta''}$$

поэтому

$$p = \frac{n \cdot n'' \cdot \eta \cdot \eta''}{\theta \cdot \theta''}$$

Слѣдовательно

$$\frac{n + n''}{n'} - 1 = \frac{4 \cdot r \cdot r' \cdot r'' \cdot \theta \cdot \theta''}{n \cdot n' \cdot n'' \cdot \eta \cdot \eta''} \sin f \cdot \sin f' \cdot \sin f'' \qquad (71)$$

Мы знаемъ, что

$$n = 2r'r'' \cdot \sin f \cdot \cos f; \qquad n' = 2rr'' \cdot \sin f' \cdot \cos f'; \qquad n'' = 2rr' \cdot \sin f'' \cdot \cos f''$$

а потому

$$\sin f \cdot \sin f' \cdot \sin f'' = \frac{n \cdot n' \cdot n''}{8 \cdot r^2 \cdot r'^2 \cdot r''^2 \cdot \cos f \cdot \cos f' \cdot \cos f''}$$

Слѣдовательно выраженію (71) можно дать видъ

$$\frac{n + n''}{n'} - 1 = \frac{\theta \cdot \theta''}{2\eta\eta'' \cdot r \cdot r' \cdot r'' \cdot \cos f \cdot \cos f' \cdot \cos f''}$$

Имѣя это, изъ выраженія (48) легко находимъ

$$Q = \frac{\theta \cdot \theta'' \cdot r'^2}{r \cdot r'' \cdot \eta \cdot \eta'' \cdot \cos f \cdot \cos f' \cdot \cos f''} \qquad (72)$$

Таково выраженіе функціи Q. Что касается до функціи P, то она представляется выраженіемъ (69).

И такъ мы видимъ, что для вычисленія функцій P и Q необходимо знать величины отношеній η и η'', а также радіусы векторы свѣтила, соотвѣтствующіе временамъ трехъ наблюденій. Но знаніе разстояній свѣтила отъ Солнца обусловливается знаніемъ угла z, а этотъ послѣдній можетъ быть вычисленъ только по даннымъ величинамъ функцій P и Q. Отсюда заключаемъ, что прямое рѣшеніе вопроса въ этомъ видѣ невозможно, и разстоянія свѣтила отъ земли или Солнца должны быть находимы не иначе какъ путемъ послѣдовательныхъ приближеній. Въ первомъ приближеніи К. Ф. Гауссъ принимаетъ

$$Q = \theta \cdot \theta''; \qquad P = \frac{\theta''}{\theta} \qquad (73)$$

Легко понять въ какихъ случаяхъ такое допущеніе будетъ близко къ истинѣ. Если эксцентриситетъ орбиты малъ, что имѣетъ мѣсто для всѣхъ планетныхъ орбитъ, то всѣ радіусы векторы свѣтила мало разнятся между собою, и по крайней мѣрѣ въ первомъ приближеніи можно считать $r'^2 = rr''$, тогда выраженіе (72) не будетъ содержать радіусовъ векторовъ. Если промежутки времени, отдѣляющіе наблюденія, не велики и если при этомъ въ теченіи времени, обнимающаго три наблюденія, свѣтило имѣло только небольшое геліоцентрическое движеніе, то площади секторовъ, описанныхъ радіусомъ векторомъ, мало разнятся отъ площадей соотвѣтствующихъ треугольниковъ и величины η и η'' близки къ единицѣ. Въ такомъ случаѣ можно считать

$\eta\eta'' = 1$; $\frac{\eta}{\eta''} = 1$. Слѣдовательно выраженія P и Q не будутъ тогда содержать неизвѣстныхъ η и η''. Если промежутки временъ отдѣляющія наблюденія малы и не велико геліоцентрическое движеніе свѣтила, то f, f', f'' также малы и тогда каждый изъ трехъ косинусовъ $\cos f$, $\cos f'$, $\cos f''$ можно считать равнымъ единицѣ. При всѣхъ этихъ допущеніяхъ, существующихъ совмѣстно, выраженія P и Q имѣютъ форму (73).

Принимая при вычисленіи планетной орбиты въ первомъ приближеніи такія формы для P и Q, мы посредствомъ двухъ, много трехъ приближеній достигнемъ вполнѣ удовлетворительнаго результата. Эксцентриситеты кометныхъ орбитъ всегда велики, геліоцентрическое движеніе этихъ свѣтилъ вблизи перигелія, гдѣ они по большей части и наблюдаются, также весьма значительно, а потому въ случаѣ вычисленія кометной орбиты трудно пользоваться въ первомъ приближеніи тѣми формами, которыя предлагаетъ К. Ф. Гауссъ, и тогда удобнѣе вычислять величину z по способу Гаспариса, не вводя функцій P и Q. Не останавливаясь пока на этомъ, прослѣдимъ дальнѣйшее развитіе Гауссова способа опредѣленія орбитъ по тремъ наблюденіямъ.

Если въ первомъ приближеніи принята для функцій P и Q извѣстная форма, то, зная промежутки времени, отдѣляющіе одно наблюденіе отъ другаго и не вводя болѣе никакихъ другихъ величинъ, мы легко вычислимъ функціи P и Q, съ ними извѣстнымъ способомъ найдемъ уголъ z и наконецъ посредствомъ этого послѣдняго опредѣлимъ три радіуса вектора и три угла f, f' и f''. Такимъ образомъ, за исключеніемъ отношеній η и η', будемъ имѣть въ началѣ втораго приближенія всѣ величины, необходимыя для вычисленія функцій P и Q по точнымъ формамъ (69) и (72).

7. И такъ теперь слѣдуетъ показать способъ вычисленія величинъ η и η''.

Третій конечный интегралъ уравненій эллиптическаго движенія, какъ мы знаемъ, имѣетъ форму

$$\mu t' + M_0 = E' - e . \sin E'$$

гдѣ подъ E' разумѣемъ эксцентрическую аномалію свѣтила, соотвѣтствующую времени t' одного изъ наблюденій, подъ μ—среднее суточное движеніе, подъ e—эксцентриситетъ орбиты и подъ M_0—среднюю аномалію эпохи. Предположимъ, что t' есть время втораго наблюденія. Пусть t'' будетъ время третьяго наблюденія и E'' соотвѣтствующая сему эксцентрическая аномалія. Тогда для времени третьяго наблюденія будемъ имѣть

$$\mu t'' + M_0 = E'' - e . \sin E''$$

Вычитая это уравненіе изъ предыдущаго, найдемъ

$$\mu (t'' - t') = E'' - E' - 2e . \sin \frac{E'' - E'}{2} \cos \frac{E'' + E'}{2}$$

Мы знаемъ, что пренебрегая массою планеты въ сравненіи съ массой Солнца, можно принять

$$\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

Поэтому полагая $k(t''-t')=\theta$, представимъ предыдущее уравненіе въ видѣ

$$\theta = a^{\frac{3}{2}}\left[E''-E'-2e.\sin\frac{E''-E'}{2}\cos\frac{E''+E'}{2}\right] \tag{74}$$

Умножимъ обѣ части этого уравненія на $\sqrt{a(1-e^2)}$ и замѣтивъ, что $p=a(1-e^2)$, получимъ

$$\theta\sqrt{p} = a^2\sqrt{1-e^2}\left[E''-E'-2e.\sin\frac{E''-E'}{2}\cos\frac{E''+E'}{2}\right] \tag{75}$$

Если назовемъ чрезъ v' истинную аномалію свѣтила соотвѣтствующую времени втораго наблюденія, то по уравненіямъ (25) и (30) при сдѣланныхъ теперь означеніяхъ имѣемъ

$$r' = a(1-e.\cos E')$$
$$r'.\cos v' = a.\cos E' - ae$$

Складывая и вычитая эти уравненія, легко находимъ

$$r'(1+\cos v') = a(1-e)(1+\cos E')$$
$$r'(1-\cos v') = a(1+e)(1-\cos E')$$

откуда

$$\sqrt{r'}\cos\frac{v'}{2} = \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{E'}{2}$$

$$\sqrt{r'}\sin\frac{v'}{2} = \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{E'}{2}$$

Подобно этому для времени третьяго наблюденія имѣемъ

$$\sqrt{r''}\cos\frac{v''}{2} = \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{E''}{2}$$

$$\sqrt{r''}\sin\frac{v''}{2} = \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{E''}{2}$$

Комбинируя эти уравненія съ предыдущими, легко получимъ

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{r'r''}.\sin\frac{v''-v'}{2} &= a\sqrt{1-e^2}\sin\frac{E''-E'}{2}\\ \sqrt{r'r''}.\cos\frac{v''-v'}{2} &= a\cos\frac{E''-E'}{2} - ae\cos\frac{E''+E'}{2}\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Мы знаемъ уже, что разность истинныхъ аномалій равна разности аргументовъ широты, слѣдовательно если означимъ какъ выше чрезъ u'' и u' аргументы широты соотвѣтствующіе временамъ третьяго и втораго наблюденія и исключимъ при помощи послѣдняго уравненія величину $e.\cos\frac{E''+E'}{2}$ изъ уравненія (75), то получимъ

$$\theta\sqrt{p} = a^2\sqrt{1-e^2}[E''-E'-\sin(E''-E')] + 2a\sqrt{r'r''}.\sqrt{1-e^2}\sin\frac{E''-E'}{2}\cos\frac{u''-u'}{2}$$

внося сюда вмѣсто $a\sqrt{1-e^2}$ его величину взятую изъ перваго изъ уравненій (76), находимъ

(77) $$\theta\sqrt{p} = a^2\sqrt{1-e^2}\,[E'' - E' - \sin(E'' - E')] + r'r''\sin(u'' - u')$$

Такъ какъ по первому изъ уравненій (76)

$$a\sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{r'r''}.\sin\dfrac{u''-u'}{2}}{\sin\dfrac{E''-E'}{2}}$$

то

$$a^3(1-e^2)\sqrt{1-e^2} = \frac{\left[\sqrt{r'r''}.\sin\dfrac{u''-u'}{2}\right]^3}{\sin^3\left(\dfrac{E''-E'}{2}\right)}$$

Но $p = a(1-e^2)$ слѣдовательно

$$a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{\left[\sqrt{r'r''}.\sin\dfrac{u''-u'}{2}\right]^3}{p.\sin^3\left(\dfrac{E''-E'}{2}\right)}$$

или

$$a^2\sqrt{1-e^2} = \left[\frac{r'r''.\sin(u''-u')}{2\sqrt{r'r''}.\cos\dfrac{u''-u'}{2}}\right]^3 \frac{1}{p.\sin^3\left(\dfrac{E''-E'}{2}\right)}$$

Назвавъ какъ прежде чрезъ n удвоенную площадь треугольника, заключающагося между радіусами векторами втораго и третьяго положенія свѣтила и хордой соединяющей эти положенія, найдемъ

$$r'r''.\sin(u''-u') = n$$

а потому если внесемъ предыдущее выраженіе $a^2\sqrt{1-e^2}$ въ уравненіе (77), то получимъ

(78) $$\theta\sqrt{p} = \frac{E''-E'-\sin(E''-E')}{p.\sin^3\left(\dfrac{E''-E'}{2}\right)}\left[\frac{n}{2\sqrt{r'r''}.\cos\dfrac{u''-u'}{2}}\right]^3 + n$$

Означимъ чрезъ k'' хорду соединяющую третье и второе положенія свѣтила, тогда

$$k^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos(u''-u')$$

Что легко представляется также въ видѣ

$$k^2 = (r'+r'')^2 - 4r'r''.\cos^2\left(\frac{u''-u'}{2}\right)$$

Положимъ, что

$$k = (r' + r'') \sin \gamma$$

тогда будемъ имѣть

$$(r' + r'') \cos \gamma = 2\sqrt{r'r''} . \cos \left(\frac{u'' - u'}{2} \right) \qquad (78_*)$$

Внося это въ уравненіе (78), положимъ для краткости $\frac{E'' - E'}{2} = g$ и найдемъ

$$\theta \sqrt{p} = \frac{2g - \sin 2g}{p . \sin^3 g} \left[\frac{n}{(r' + r'') \cos \gamma} \right]^3 + n$$

Что легко приводится къ виду

$$1 = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} \theta^2 \left[\frac{n}{\theta \sqrt{p}\, (r' + r'') \cos \gamma} \right]^3 + \frac{n}{\theta \sqrt{p}}$$

Если примемъ согласно съ предыдущимъ

$$\frac{\theta \sqrt{p}}{n} = \eta$$

то послѣднее уравненіе обращается въ

$$1 = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} \cdot \frac{\theta^2}{\eta^3 (r + r')^3 \cos^3 \gamma} + \frac{1}{\eta} \qquad (79)$$

Этимъ уравненіямъ мы и должны пользоваться для опредѣленія η; но такъ какъ въ него кромѣ неизвѣстнаго η входитъ еще неизвѣстное g, то для рѣшенія вопроса необходимо имѣть еще другое уравненіе между этими двумя неизвѣстными.

Чтобы составить такое уравненіе замѣтимъ, что

$$r' = a - ae . \cos E'; \qquad r'' = a - ae . \cos E''$$

откуда

$$r' + r'' = 2a - 2ae . \cos \frac{E'' + E'}{2} \cos \frac{E'' - E'}{2} \qquad (79_*)$$

Исключая отсюда величину $e . \cos \frac{E'' + E'}{2}$ посредствомъ втораго изъ уравненій (76), найдемъ

$$r' + r'' = 2a . \sin^2 g + 2\sqrt{r'r''} . \cos g . \cos \frac{u'' - u'}{2}$$

Но первое изъ уравненій (76) дастъ

$$\sin g = \frac{\sqrt{r'r''} . \sin \frac{u'' - u'}{2}}{a\sqrt{1 - e^2}}$$

поэтому

$$r' + r'' = \frac{2r'r''.\sin^2\left(\frac{u''-u'}{2}\right)}{a(1-e^2)} + 2\sqrt{r'r''}.\cos g.\cos\frac{u''-u'}{2}$$

или

$$r' + r'' = \frac{2r'r''.\sin^2\left(\frac{u''-u'}{2}\right)}{p} + 2\sqrt{r'r''}.\cos\frac{u''-u'}{2}\left[1-2\sin^2\left(\frac{g}{2}\right)\right]$$

Но

$$\frac{2r'r''.\sin^2\left(\frac{u''-u'}{2}\right)}{p} = \frac{4(r'r'')^2.\sin^2\left(\frac{u''-u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u''-u'}{2}\right)}{2r'r''.p.\cos^2\left(\frac{u''-u'}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\theta^2}{\eta^2}\left[\frac{1}{2\sqrt{r'r''}.\cos\left(\frac{u''-u'}{2}\right)}\right]^2$$

Слѣдовательно

$$r' + r'' = \frac{2\theta^2}{\eta^2}\left[\frac{1}{2\sqrt{r'r''}.\cos\frac{u''-u'}{2}}\right]^2 + 2\sqrt{r'r''}\left[1-2\sin^2\left(\frac{g}{2}\right)\right]\cos\frac{u''-u'}{2}$$

Но мы видѣли, что

$$2\sqrt{r'r''}\cos\frac{u''-u'}{2} = (r'+r'')\cos\gamma$$

а потому

$$(r'+r'') = \frac{2\theta^2}{\eta^2(r'+r'')^2\cos^2\gamma} + (r'+r'')\left[1-2\sin^2\left(\frac{g}{2}\right)\right]\cos\gamma$$

или

$$2(r'+r'')\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{2\theta^2}{\eta^2(r'+r'')\cos\gamma} - 2(r'+r'')\sin^2\left(\frac{g}{2}\right).\cos\gamma$$

откуда

(80) $$\sin^2\left(\frac{g}{2}\right) = \frac{\theta^2}{\eta^2(r'+r'')^3.\cos^3\gamma} - \frac{\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\gamma}$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ уравненіемъ (79) и должно служить для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ величинъ g и η. Положимъ въ этихъ двухъ уравненіяхъ

(81)
$$y = \frac{\sin^3 g}{2g - \sin 2g}; \qquad x = \sin^2\left(\frac{g}{2}\right)$$

$$m = \frac{\theta^2}{(r'+r'')^3.\cos^3\gamma}; \qquad l = \frac{\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\gamma}$$

Величины m и l въ каждомъ отдѣльномъ приближеніи должны считаться за величины извѣстныя. При такихъ означеніяхъ уравненія (79) и (80) принимаютъ видъ

$$\frac{m}{y \cdot \eta^3} + \frac{1}{\eta} = 1; \qquad x = \frac{m}{\eta^2} - l \tag{82}$$

Эти уравненія могутъ быть рѣшены только помощію рядовъ.

Взявъ въ первомъ изъ уравненій (81) логариѳмъ обѣихъ частей и дифференцируя этотъ логариѳмъ, получимъ

$$\frac{dy}{y} = 3 \cdot \cotg g \cdot dg - \frac{4 \cdot \sin^2 g \cdot dg}{2g - \sin 2g}$$

или обращая вниманіе на первое изъ уравненій (81) приводимъ это къ виду

$$\frac{dy}{dg} = 3y \cdot \cotg g - \frac{4y^2}{\sin g}$$

Дифференцируя второе изъ уравненій (81), находимъ

$$\frac{dg}{dx} = \frac{2}{\sin g}$$

исключая посредствомъ этого dg изъ предыдущаго уравненія, имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y \cdot \cos g - 8y^2}{\sin^2 g}$$

Второе изъ уравненій (81) даетъ

$$2x = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{g}{2}\right); \qquad 1 - 2x = \cos g; \qquad 1 - x = \cos^2\left(\frac{g}{2}\right)$$

слѣдовательно

$$4(1 - x)x = \sin^2 g$$

поэтому

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y(1 - 2x) - 4y^2}{2(1 - x) \cdot x} \tag{83}$$

Предположимъ, что интегралъ этого дифференціальнаго уравненія представляется рядомъ вида

$$y = \alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2 + \delta \cdot x^3 + \varepsilon \cdot x^4 + \cdots \tag{84}$$

Чтобы подтвердить это предположеніе, опредѣлимъ числовыя величины коэффиціентовъ α, β, γ и т. д.

Представимъ уравненіе (83) въ видѣ

$$\frac{dy}{dx}(2x - x^2) = y(3 - 6x - 4y)$$

и внесемъ сюда вмѣсто y и $\frac{dy}{dx}$ ихъ величины взятыя изъ выраженія (84), тогда получимъ

$$(2x - x^2)\,[\beta + 2\gamma.x + 3\delta.x^2 + 4\varepsilon.x^3 + \cdots\cdots] =$$
$$(\alpha + \beta.x + \gamma.x^2 + \delta.x^3 + \cdots)\,(3 - 6x - 4\alpha - 4\beta.x - 4\gamma.x^2 - \cdots)$$

или

$$\left.\begin{matrix} 2\beta.x + 4\gamma.x^2 + 6\delta.x^3 + 8\varepsilon.x^4 + \cdots\cdots \\ - 2\beta.x^2 - 4\gamma.x^3 - 6\delta.x^4 - \cdots\cdots \end{matrix}\right\} =$$
$$\begin{aligned} \alpha(3-4\alpha) + \beta(3-4\alpha)\,x &+ \gamma(3-4\alpha)\,x^2 + \delta(3-4\alpha)\,x^3 + \cdots \\ - \alpha(4\beta+6)\,x &- \beta(4\beta+6)\,x^2 - \gamma(4\beta+6)\,x^3 + \cdots \\ &- 4\alpha\gamma.x^2 \qquad - 4\beta\gamma.x^3 - \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad - 4\alpha\delta.x^3 - \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \end{aligned}$$

Сравнивая въ этомъ тождественномъ уравненіи коеффиціенты при одинакихъ степеняхъ x, находимъ

$$\alpha(3 - 4\alpha) = 0$$
$$2\beta = 3\beta - 8\alpha\beta - 6\alpha$$
$$4\gamma - 2\beta = 3\gamma - 6\beta - 4\beta^2 - 8\alpha\gamma$$

и т. д.

Изъ этихъ уравненій легко находимъ

$$\alpha = \frac{3}{4}; \qquad \beta = -\frac{9}{10}; \qquad \gamma = \frac{9}{175}; \qquad \delta = \frac{26}{875} \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно

$$y = \frac{3}{4} - \frac{9}{10}\,x + \frac{9}{175}\,x^2 + \frac{26}{875}\,x^3 + \cdots\cdots$$

Умноживъ обѣ части этого выраженія на $\frac{10}{9}$, получимъ

$$\frac{10}{9}\,y = \frac{5}{6} - x + \frac{2}{35}\,x^2 + \frac{52}{1575}\,x^3 + \cdots\cdots$$

Пусть

(85) $$\xi = \frac{2}{35}\,x^2 + \frac{52}{1575}\,x^3 + \cdots\cdots$$

тогда предыдущее равенство приметъ видъ

$$\frac{10}{9}\,y - \frac{5}{6} + x = \xi$$

Взявъ изъ этого уравненія x'' и внося его во второе изъ уравненій (82), получимъ

$$\xi + \frac{5}{6} + l = \frac{m}{\eta^2} + \frac{10}{9}\,y$$

откуда

$$\frac{\xi + \frac{5}{6} + l}{m} = \frac{1}{\eta^2} + \frac{10}{9}\frac{y}{m}$$

Пусть

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi} \tag{86}$$

тогда

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\eta^2} + \frac{10}{9}\frac{y}{m}$$

или

$$\frac{h \cdot \eta^2}{\eta^2 - h} = \frac{9}{10}\frac{m}{y}$$

Но первое изъ уравненій (82) представляется въ видѣ

$$\frac{m}{y} = \eta^2(\eta - 1)$$

вносяя эту величину дроби $\frac{m}{y}$ въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$\frac{9}{10}\eta^2(\eta - 1) = \frac{h \cdot \eta^2}{\eta^2 - h}$$

откуда

$$\frac{9}{10}\eta^2(\eta - 1) - \frac{9}{10}h\eta + \frac{9}{10}h = h$$

или

$$\eta^2(\eta - 1) = \left(\eta + \frac{1}{9}\right)h \tag{87}$$

Этимъ кубичнымъ уравненіемъ и слѣдуетъ пользоваться для опредѣленія искомаго η. Но такъ какъ h заключаетъ въ себѣ неизвѣстную величину x въ зависимости отъ ξ, то опредѣленіе искомаго отношенія площади сектора къ соотвѣтствующей площади треугольника можетъ быть выполнено только послѣдовательными приближеніями.

Если наблюденія лежащія въ основаніи опредѣленія орбиты незначительно удалены одно отъ другаго и если между этими близкими наблюденіями геліоцентрическое движеніе свѣтила не велико, то g, т. е. полуразность эксцентрическихъ аномалій не велика и тогда x есть малая величина. Относительно ея ξ должно считать за величину втораго порядка и въ первомъ приближеніи вычисленія η можно принять $\xi = 0$, тогда h, какъ видно изъ уравненія (86), опредѣлится по выраженію

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l}$$

Имѣя h, найдемъ η или рѣшая кубическое уравненіе (87), или же прямо возьмемъ величину $\log \eta^2$ изъ особой таблицы составленной К. Ф. Гауссомъ и расположенной по аргументу h. Какъ скоро η^2 найдено, то второе изъ уравненій (82) даетъ возможность опредѣлить x; съ нимъ можно вычислить ξ или по выраженію (85), или взять величину ξ изъ особой таблицы расположенной по аргументу x. Такія таблицы вмѣстѣ съ таблицей для вычисленія η помѣщены въ Theoria motus corporum coelestium и въ нѣкоторыхъ другихъ трактатахъ теоретической астрономіи. Какъ скоро ξ извѣстно, то болѣе точную величину h вычислимъ изъ уравненія (86), съ этой величиной h повторимъ вычисленіе η^2 и ξ въ томъ же порядкѣ какъ въ первомъ приближеніи. Но болѣе двухъ приближеній едвали когда придется дѣлать для опредѣленія величины η. Понятно, что все сказанное о вычисленіи η относится также и къ вычисленію η' и η''. Такимъ образомъ для вычисленія величинъ η, η', η'' мы имѣемъ слѣдующую систему уравненій

(88)

$\cos\gamma = \dfrac{2\sqrt{r'r''}.\cos f}{r'+r''}$	$\cos\gamma' = \dfrac{2\sqrt{rr''}.\cos f'}{r+r''}$	$\cos\gamma'' = \dfrac{2\sqrt{rr'}.\cos f''}{r+r'}$
$m = \dfrac{\theta^2}{(r'+r'')^3\cos^3\gamma}$	$m' = \dfrac{\theta'^2}{(r+r'')^3.\cos^3\gamma'}$	$m'' = \dfrac{\theta''^2}{(r+r')^3.\cos^3\gamma''}$
$l = \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)}{\cos\gamma}$	$l' = \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\gamma'}{2}\right)}{\cos\gamma'}$	$l'' = \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\gamma''}{2}\right)}{\cos\gamma''}$
$h = \dfrac{m}{\frac{5}{6}+l+\xi}$	$h' = \dfrac{m'}{\frac{5}{6}+l'+\xi'}$	$h'' = \dfrac{m''}{\frac{5}{6}+l''+\xi''}$
$\eta^2(\eta-1) = (\eta+\frac{1}{9})\,h$	$\eta'^2(\eta'-1) = (\eta'+\frac{1}{9})\,h'$	$\eta''^2(\eta''-1) = (\eta''+\frac{1}{9})\,h''$
$x = \dfrac{m}{\eta^2} - l$	$x' = \dfrac{m'}{\eta'^2} - l'$	$x'' = \dfrac{m''}{\eta''^2} - l''$

Если промежутки времени, отдѣляющіе наблюденія, не велики и незначительно геліоцентрическое движеніе свѣтила, то γ есть небольшая дуга и опредѣленіе величины l по приведеннымъ формамъ представляетъ тогда нѣкоторое неудобство; для избѣжанія его Гауссъ даетъ другое выраженіе для вычисленія l. По одному изъ предыдущихъ выраженій $\cos\gamma$ имѣемъ

$$2\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1 - \frac{2\cos f\sqrt{r'r''}}{r'+r''}$$

Внося это вмѣстѣ съ величиной $\cos\gamma$ въ предыдущее выраженіе l, легко приводимъ его къ виду

$$2l = \frac{r'+r''}{2.\cos f\sqrt{r'r''}} - 1$$

или

(89)
$$2l+1 = \frac{\sqrt{\frac{r'}{r''}}+\sqrt{\frac{r''}{r'}}}{2\cos f}$$

Этимъ уравненіемъ Гауссъ и предлагаетъ пользоваться для вычисленія l. Подобнымъ же образомъ для вычисленія l' и l'' имѣемъ

$$2l'+1=\frac{\sqrt{\frac{r}{r''}}+\sqrt{\frac{r''}{r}}}{2\cos f'}\,;\qquad 2l''+1=\frac{\sqrt{\frac{r}{r'}}+\sqrt{\frac{r'}{r}}}{2\cos f''}\qquad (89_*)$$

8. Если для временъ трехъ наблюденій извѣстны разстоянія свѣтила отъ Земли или Солнца, то вычисленіе элементовъ орбиты не представляетъ трудностей.

Въ началѣ предыдущаго параграфа мы представили зависимость между эксцентрической и истинной аномаліями свѣтила въ видѣ

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{v}{2}&=\sqrt{1+e}\,.\sin\frac{E}{2}\\ \sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{v}{2}&=\sqrt{1-e}\,.\cos\frac{E}{2}\end{aligned}\qquad (90)$$

Предположимъ, что v и E соотвѣтствуютъ времени перваго наблюденія, а v'' и E'' относятся къ третьему наблюденію, тогда для этого послѣдняго имѣемъ

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{r''}{a}}\sin\frac{v''}{2}&=\sqrt{1+e}\,.\sin\frac{E''}{2}\\ \sqrt{\frac{r''}{a}}\cos\frac{v''}{2}&=\sqrt{1-e}\,.\cos\frac{E''}{2}\end{aligned}\qquad (91)$$

Положимъ какъ прежде

$$f'=\frac{v''-v}{2}\,;\qquad g'=\frac{E''-E}{2}$$

$$F'=\frac{v''+v}{2}\,;\qquad G'=\frac{E''+E}{2}$$

Помножимъ первое изъ уравненій (90) на $\sin\frac{F'+g'}{2}$, второе на $\cos\frac{F'+g'}{2}$ и произведенія сложимъ; потомъ умножимъ первое изъ уравненій (91) на $\sin\frac{F'-g'}{2}$, второе на $\cos\frac{F'-g'}{2}$ и сложивъ опять произведенія, найдемъ

$$\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\left(\frac{v}{2}-\frac{F'+g'}{2}\right)=\sqrt{1+e}.\sin\frac{E}{2}\sin\frac{F'+g'}{2}+\sqrt{1-e}.\cos\frac{E}{2}\cos\frac{F'+g'}{2}$$

$$\sqrt{\frac{r''}{a}}\cos\left(\frac{v''}{2}-\frac{F'-g'}{2}\right)=\sqrt{1+e}.\sin\frac{E''}{2}\sin\frac{F'-g'}{2}+\sqrt{1-e}.\cos\frac{E''}{2}\cos\frac{F'-g'}{2}$$

Пусть $e=\sin\varphi$, тогда

$$1+e=1+2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}=\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)+2.\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}=\left[\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right]^2$$

Слѣдовательно

$$\sqrt{1+e}=\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\,; \qquad \sqrt{1-e}=\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}$$

а потому предыдущія два уравненія легко приводятся къ виду

$$(92)\qquad \begin{aligned}\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{f'+g'}{2}&=\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left[\frac{F'-G'}{2}+g'\right]-\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{F'+G'}{2}\\ \sqrt{\frac{r''}{a}}\cos\frac{f'+g'}{2}&=\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left[\frac{F'-G'}{2}-g'\right]-\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{F'+G'}{2}\end{aligned}$$

но

$$\sqrt{\frac{r''}{a}}-\sqrt{\frac{r}{a}}=\left[\sqrt[4]{\frac{r''}{a}}+\sqrt[4]{\frac{r}{a}}\right]\left[\sqrt[4]{\frac{r''}{a}}-\sqrt[4]{\frac{r}{a}}\right]=\sqrt[4]{\frac{rr''}{a^2}}\left[1+\sqrt[4]{\frac{r}{r''}}\right]\left[\sqrt[4]{\frac{r''}{r}}-1\right]$$

Пусть

$$\sqrt[4]{\frac{r''}{r}}=\operatorname{tang}(45^0+\psi)$$

тогда

$$\sqrt{\frac{r''}{a}}-\sqrt{\frac{r}{a}}=2\sqrt[4]{\frac{rr''}{a^2}}\cdot\operatorname{tang}2\psi$$

Принимая это во вниманіе и вычтя уравненія (92) одно изъ другаго, получимъ

$$(93)\qquad \cos\frac{f'+g'}{2}\operatorname{tang}2\psi=\sqrt[4]{\frac{a^2}{rr''}}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin g'.\sin\left(\frac{F'-G'}{2}\right)$$

Подобно предыдущему легко найдемъ

$$\sqrt{\frac{r}{a}}+\sqrt{\frac{r''}{a}}=\frac{2}{\cos 2\psi}\sqrt[4]{\frac{rr''}{a^2}}$$

Имѣя это въ виду, помножимъ уравненія (90) и (91): первое на $+\cos\frac{F'+g'}{2}$, второе на $-\sin\frac{F'+g'}{2}$, третье на $-\cos\frac{F-g'}{2}$ и четвертое на $+\sin\frac{F'-g'}{2}$, сложимъ первое произведеніе со вторымъ, третье съ четвертымъ и наконецъ одну сумму вычтемъ изъ другой. Послѣ всего этого получимъ уравненіе

$$(94)\qquad \sin\frac{f'+g'}{2}\cdot\sec 2\psi'=\sqrt[4]{\frac{a^2}{rr''}}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin g'.\cos\frac{F'-G'}{2}$$

Сдѣлавъ упомянутыя выше дѣйствія послѣ умноженія уравненій (90) и (91) послѣдовательно на

$$+\sin\frac{F'-g'}{2}\,;\qquad +\cos\frac{F'-g'}{2}\,;\qquad +\sin\frac{F'+g'}{2}\,;\qquad +\cos\frac{F'+g'}{2}$$

найдемъ уравненіе

$$\cos\frac{f'-g'}{2}\tang 2\psi = \sqrt[4]{\frac{a^2}{rr''}}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin g'.\sin\frac{F'+G'}{2} \qquad (95)$$

Наконецъ тотъ же рядъ дѣйствій, произведенный послѣ умноженія уравненій (90) и (91) соотвѣтственно на

$$+\cos\frac{F'-g'}{2}; \qquad -\sin\frac{F'-g'}{2}; \qquad -\cos\frac{F'+g'}{2}; \qquad +\sin\frac{F'+g'}{2}$$

приводитъ къ уравненію

$$\sin\frac{f'-g'}{2}\sec 2\psi = \sqrt[4]{\frac{a^2}{rr''}}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin g'.\cos\frac{F'+G'}{2} \qquad (96)$$

Первыя части полученныхъ четырехъ уравненій составлены изъ величинъ совершенно извѣстныхъ, а потому отъ дѣленія перваго уравненія на второе и третьяго на четвертое находимъ два выраженія, которыя служатъ для вычисленія

$$\tang\frac{F'-G'}{2} \qquad \text{и} \qquad \tang\frac{F'+G'}{2}$$

и такъ какъ произведенія

$$\sqrt[4]{\frac{a^2}{rr''}}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin g' \qquad \text{и} \qquad \sqrt[4]{\frac{a^2}{rr''}}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin g'$$

суть величины существенно положительныя, то по этимъ тангенсамъ будутъ вполнѣ опредѣлены дуги F' и G'. По нашему положенію

$$v''=F'+f'; \qquad v=F'-f'; \qquad E''=G'+g'; \qquad E=G'-g'$$

а потому какъ скоро найдены G' и F', то по нимъ опредѣлятся эксцентрическая и истинная аномаліи, соотвѣтствующія временамъ двухъ крайнихъ наблюденій. Кромѣ того, если извѣстны $\frac{F'-G'}{2}$ и $\frac{F'+G'}{2}$, то изъ уравненій (93), (94), (95) и (96) могутъ быть вычислены произведенія

$$\sqrt[4]{\frac{a^2}{rr''}}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin g' \qquad \text{и} \qquad \sqrt[4]{\frac{a^2}{rr''}}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin g'$$

раздѣливъ одно изъ нихъ на другое, мы получимъ величину $\tang\frac{\varphi}{2}$, посредствомъ которой будетъ найденъ уголъ эксцентриситета φ, а слѣдовательно и самый эксцентриситетъ e, ибо $e=\sin\varphi$. Такимъ образомъ видна возможность опредѣленія одного изъ элементовъ орбиты. Понятно также, что зная φ, по величинѣ одного изъ предыдущихъ произведеній, можно опредѣлить большую полуось орбиты a. Кромѣ того эта

величина a можетъ быть найдена еще другимъ путемъ. Мы знаемъ, что существуетъ соотношеніе

$$\eta' = \frac{\theta' \sqrt{p}}{rr''.\sin 2f'}$$

откуда

(97) $$p = \left[\frac{\eta'.rr''.\sin 2f'}{\theta'}\right]^2$$

всѣ величины входящія во вторую часть этого уравненія извѣстны; а потому имъ можно воспользоваться для вычисленія параметра p. Мы знаемъ, что $p = a(1 - e^2)$, слѣдовательно изъ выраженія

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

по извѣстнымъ теперь величинамъ p и e можетъ быть вычислена большая полуось орбиты. Согласіе между собою величинъ a, найденныхъ тѣмъ и другимъ путемъ, даетъ возможность судить о степени вѣрности вычисленія.

Какъ скоро a вычислено, то можетъ быть найденъ другой элементъ орбиты, именно среднее суточное движеніе μ, ибо

$$\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

гдѣ k есть Гауссово постоянное число.

Для опредѣленія долготы узла и наклоненія орбиты къ эклиптикѣ обратимся къ треугольнику $D'C''C$ (фиг. 3). При сдѣланныхъ выше означеніяхъ стороны и противуположные имъ углы въ этомъ треугольникѣ суть

$$CC'' = 2f'; \qquad CD' = \xi; \qquad C''D' = \xi''$$

$$C''D'C = \varepsilon'; \qquad D'C''C = 180^0 - w''; \qquad D'CC'' = w$$

Примѣняя къ рѣшенію этого треугольника уравненія Гаусса, имѣемъ

(98)
$$\sin f'.\sin\frac{w'' + w}{2} = \sin\frac{\varepsilon'}{2}.\sin\frac{\xi + \xi''}{2}$$

$$\sin f'.\cos\frac{w'' + w}{2} = \cos\frac{\varepsilon'}{2}.\sin\frac{\xi - \xi''}{2}$$

$$\cos f'.\sin\frac{w'' - w}{2} = \sin\frac{\varepsilon'}{2}.\cos\frac{\xi + \xi''}{2}$$

$$\cos f'.\cos\frac{w'' - w}{2} = \cos\frac{\varepsilon'}{2}.\cos\frac{\xi - \xi''}{2}$$

Всѣ величины, входящія въ эти уравненія, за исключеніемъ w и w'' извѣстны, а потому такія уравненія могутъ служить для опредѣленія неизвѣстныхъ w и w''. Найдя эти послѣднія, обратимся къ треугольнику CAP (фиг. 3). Въ этомъ треугольникѣ уголъ при P есть наклоненіе орбиты къ эклиптикѣ. Означимъ дугу AP чрезъ h.

Если назовемъ, какъ прежде, чрезъ l геліоцентрическую долготу земли, соотвѣтствующую времени перваго наблюденія, а долготу узла опредѣляемой орбиты чрезъ θ, то $h = l - \theta$. Дуга CP есть аргументъ широты свѣтила, соотвѣтствующій времени перваго наблюденія. Означимъ, какъ прежде, этотъ аргументъ широты чрезъ u, тогда стороны треугольника CAP будутъ: $AC = AD' - \xi$; $CP = u$; $AP = l - \theta$; этимъ сторонамъ противулежатъ углы i, $180^0 - \gamma$ и w. Примѣняя къ рѣшенію такого треугольника уравненія Гаусса, получимъ

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{i}{2}\cdot\sin\frac{u+h}{2} &= \sin\frac{AD'-\xi}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+w}{2} \\
\sin\frac{i}{2}\cdot\cos\frac{u+h}{2} &= \cos\frac{AD'-\xi}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-w}{2} \\
\cos\frac{i}{2}\cdot\sin\frac{u-h}{2} &= \sin\frac{AD'-\xi}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+w}{2} \\
\cos\frac{i}{2}\cdot\cos\frac{u-h}{2} &= \cos\frac{AD'-\xi}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-w}{2}
\end{aligned}
\qquad (99)
$$

Такъ какъ вторыя части этихъ уравненій совершенно извѣстны, то сами уравненія могутъ служить для опредѣленія i, h и u. Если h извѣстно, то будетъ извѣстна также и долгота узла орбиты, ибо $\theta = l - h$. По u опредѣлится разстояніе перигелія отъ узла. Въ самомъ дѣлѣ, если означимъ это разстояніе чрезъ ω, то $u = v + \omega$, гдѣ подъ v разумѣемъ, какъ прежде, истинную аномалію свѣтила, соотвѣтствующую времени перваго наблюденія. Мы видѣли, что v опредѣляется по f и F, u опредѣляется изъ послѣднихъ уравненій, а потому $\omega = u - v$ сдѣлается извѣстной величиной. Такимъ образомъ видна возможность вычисленія тѣхъ элементовъ, которыми опредѣляется положеніе орбиты въ пространствѣ.

Остается показать возможность опредѣленія послѣдняго элемента, именно средней аномаліи эпохи. Если извѣстны эксцентрическія аномаліи, соотвѣтствующія двумъ крайнимъ наблюденіямъ, то среднія аномаліи M и M'' для тѣхъ же временъ опредѣлятся изъ извѣстныхъ уравненій

$$M = E - e\,.\sin E; \qquad M'' = E'' - e\,.\sin E''$$

Предположимъ, что за эпоху считается нѣкоторое время T. Означимъ, какъ прежде, времена перваго и третьяго наблюденія чрезъ t и t'', тогда послѣдній элементъ, т. е. M_0 средняя аномалія эпохи можетъ быть вычислена по одному изъ уравненій

$$M_0 = M - \mu\,(t - T); \qquad M_0 = M'' - \mu\,(t'' - T)$$

Согласіе величинъ M_0, найденныхъ по обоимъ этимъ выраженіямъ, будетъ указывать на вѣрность всего вычисленія орбиты.

Если хотимъ знать время прохожденія свѣтила черезъ перигелій и время обращенія около Солнца, то по найденнымъ элементамъ орбиты не трудно опредѣлить то и другое.

Означимъ чрезъ T_0 искомое время прохожденія черезъ перигелій. Замѣтимъ, что въ перигеліи всѣ аномаліи обращаются въ нуль, а потому первое изъ предыдущихъ уравненій дастъ

$$0 = M - \mu(t - T_0)$$

откуда

$$T_0 = t - \frac{M}{\mu}$$

Если означимъ чрезъ τ выраженное въ суткахъ время полнаго обращенія свѣтила около Солнца, то понятно, что

$$\tau = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{360^\circ}{\mu}$$

Мы изложили здѣсь Гауссовъ способъ опредѣленія орбитъ изъ трехъ наблюденій въ той формѣ, въ какой онъ данъ самимъ К. Ф. Гауссомъ въ его сочиненіи Theoria motus corporum coelestium. Хотя въ настоящее время и сдѣланы въ этомъ способѣ нѣкоторыя небольшія измѣненія, нѣсколько упрощающія его примѣненіе на практикѣ, однако съ увѣренностію можно сказать, что ни одинъ вопросъ прикладной математики не имѣетъ рѣшенія болѣе остроумнаго чѣмъ то, какое предложилъ К. Ф. Гауссъ для опредѣленія изъ наблюденій постоянныхъ величинъ, вводимыхъ интегрированіемъ уравненій эллиптическаго движенія.

9. Вычисленіе планетной орбиты по способу Гаусса не представляетъ никакихъ трудностей; число послѣдовательныхъ приближеній даже при значительныхъ промежуткахъ времени, отдѣляющихъ одно наблюденіе отъ другаго, не велико; принимая это во вниманіе, мы для поясненія всей изложенной теоріи разсмотримъ наиболѣе трудный случай примѣненія Гауссовой методы—вычислимъ посредствомъ нея эллиптическую орбиту кометы. Найдемъ элементы орбиты кометы Энке по тремъ наблюденіямъ, произведеннымъ во время послѣдняго появленія кометы въ 1875 году.

Въ основаніе вычисленія мы примемъ слѣдующія три положенія кометы, наблюдавшіяся въ Москвѣ 9-го, 16-го и 23-го Марта 1875 года *).

	ср. моск. вр.	AR ☄	Decl. ☄
1875 года, 9-го Марта . . .	$7^h\ 41^m\ 25^s.8$,	$0^h\ 47^m\ 9^s.43$,	$+12^\circ\ 22'\ 43''.5$
16 „ . . .	7 42 4 .8,	1 0 45 .27,	+14 1 58 .2
23 „ . . .	8 26 47 .2,	1 29 3 .49,	+15 39 15 .2

Въ дни наблюденій видимыя наклоненія эклиптики къ экватору были

$$23^\circ\ 27'\ 29''.01,\quad 23^\circ\ 27'\ 29.05,\quad 23^\circ\ 27'\ 29''.06$$

Посредствомъ этихъ данныхъ, пользуясь извѣстными уравненіями

$$n \,.\, \sin N = \sin\delta; \qquad \sin\beta = n \,.\, \sin(N - \varepsilon)$$

$$n \,.\, \cos N = \sin\alpha \,.\, \cos\delta; \qquad \sin\lambda \,.\, \cos\beta = n \,.\, \cos(N - \varepsilon)$$

$$\cos\lambda \,.\, \cos\beta = \cos\delta \,.\, \cos\alpha$$

---

*) См. Astr. Nachr. № 2041.

обращаемъ приведенныя склоненія и прямыя восхожденія въ широты и долготы и находимъ

долготы ☄	широты ☄
15° 40′ 49″.16	+ 6° 43′ 52″.80
20 45 4 .20	6 24 13 .23
26 23 11 .04	5 52 17 .77

Интерполируя изъ Nautical Almanac для моментовъ наблюденій видимыя долготы Солнца и логариѳмы разстояній земли отъ Солнца, имѣемъ

долготы солнца	log R
348° 45′ 12″.4	9.9971662
355 43 52 .1	9.9979828
2 42 32 .3	9.9988405

Какъ положенія кометы, такъ и положенія Солнца предстоитъ теперь освободить отъ вліянія аберраціи, прецессіи и нутаціи, а положенія кометы слѣдуетъ еще освободить и отъ вліянія параллакса.

Вліяніе аберраціи представляется выраженіями (374) Т. I. Примѣняя эти выраженія къ вычисленію поправокъ для положенія кометы, находимъ, что эти поправки суть

въ долготѣ	въ широтѣ
+ 18″.35	— 1″.08
+ 18 .64	— 0 .96
+ 18 .82	— 0 .84

Поправки отъ аберраціи долготъ Солнца прямо беремъ изъ Nautical Almanac и видимъ, что для дней наблюденій эти поправки суть + 20″.58, + 20″.55, + 20″.50. И такъ положенія кометы и Солнца, исправленныя отъ вліянія аберраціи, будутъ

долготы ☄	широты ☄	долготы солнца
15° 41′ 7″.51	+ 6° 43′ 51″.62	348° 45′ 32″.98
20 45 22 .84	+ 6 24 12 .27	355 44 12 .65
26 23 29 .86	+ 5 52 16 .93	2 42 52 .80

Координаты кометы слѣдуетъ освободить еще отъ вліянія аберраціи свѣтилъ, имѣющихъ собственное движеніе, но это возможно будетъ сдѣлать по правилу Гаусса, изложенному въ n° 50, Т. I, только тогда, когда будутъ приближенно извѣстны разстоянія кометы отъ земли.

Теперь предстоитъ освободить предыдущія координаты отъ вліянія прецессіи и нутаціи, т. е. отнести ихъ къ средней равноденственной точкѣ произвольной эпохи. Мы отнесемъ ихъ къ средней равноденственной точкѣ начала 1875 года. Чтобы освободить координаты отъ прецессіи, мы должны пользоваться выраженіями (401) Т. I. По малости измѣненія π мы примемъ $\frac{d\pi}{dt} = 0$ и будемъ считать поправку широты отъ прецессіи также равною нулю. Поправка долготы представится въ видѣ

$$\lambda' - \lambda = \int \frac{d\psi_1}{dt} \cdot dt$$

гдѣ интегралъ берется въ нашемъ случаѣ отъ начала года до разсматриваемаго момента наблюденія. Такъ какъ можно считать

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 50''.2411$$

то

$$\lambda' - \lambda = 50''.2411 \, . \, \tau$$

гдѣ подъ τ разумѣемъ выраженный въ доляхъ года промежутокъ времени, протекшій отъ начала 1875 года до разсматриваемаго момента наблюденія. Слѣдовательно въ нашемъ случаѣ поправки долготъ отъ прецессіи будутъ $-9''.24$, $-10''.19$ и $-11''.15$. Нутація не вліяетъ на широты, а измѣненія долготы отъ этой причины равно нутаціи равноденствій взятой съ обратнымъ знакомъ. Эту послѣднюю величину можно прямо взять изъ Nautical Almanac, гдѣ она дана на стр. 242 подъ рубрикой Equation of Equinoxes. И такъ нутація въ долготѣ для разсматриваемыхъ трехъ моментовъ имѣетъ величины $+5''.01$, $+5''.21$, $+5''.42$. Болѣе строго нутацію въ долготѣ слѣдовало бы вычислить по второму изъ выраженій (426) Т. I. И такъ поправки долготъ отъ прецессіи и нутаціи суть $-4''.23$, $-4''.98$, $-5''.73$, а исправленныя отъ аберраціи, прецессіи и нутаціи долготы будутъ

долготы ☄	долготы солнца
15° 41′ 3″.28	348° 45′ 28″.75
20 45 17 .86	355 44 7 .67
26 23 24 .13	2 42 47 .07

Остается освободить положенія кометы отъ параллакса, но такъ какъ разстоянія кометы отъ земли предполагаются неизвѣстными, то, оставивъ координаты кометы неизмѣненными, отнесемъ ихъ не къ центру земли, а къ locus fictus observationis. Для опредѣленія координатъ этой точки поступимъ по правиламъ изложеннымъ въ n° 21, Т. I и при этомъ будемъ пользоваться выраженіями (104_3), (105_1) и (105_2). Прежде всего вычислимъ координаты b и l по выраженіямъ

$$\sin b = n \, . \sin (N - \varepsilon); \qquad n \, . \sin N = \sin \varphi'$$

$$\sin l \, . \cos b = n \, . \cos (N - \varepsilon); \qquad n \, . \cos N = \cos \varphi' . \sin \theta$$

$$\cos l \, . \cos b = \cos \varphi' \, . \cos \theta$$

Для Московской обсерваторіи $\varphi' = 55^\circ \, 34' \, 36''$. Звѣздныя времена трехъ наблюденій суть

$$\theta_1 = 6^h \, 49^m \, 21^s = 102^\circ \, 20'.2$$

$$\theta_2 = 7 \;\; 17 \;\; 36 \; = 109 \;\; 23 .9$$

$$\theta_3 = 8 \;\; 30 \;\; 2 \; = 127 \;\; 30 .5$$

Посредствомъ этого для трехъ временъ наблюденій находимъ

l	b
98° 13'.8	32° 28'.2
102 56.2	32 59.2
114 57.2	35 19.3

Для вычисленія поправокъ долготы Солнца и разстоянія земли отъ Солнца по выраженіямъ (195_1) и (195_2) мы должны опредѣлить μ и ρ. Подъ ρ разумѣемъ разстояніе мѣста наблюденія отъ центра земли, представленное въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ Солнца. Принимая землю за сферу, можемъ считать $\rho = \pi . \sin 1''$, если подъ π разумѣемъ экваторіальный горизонтальный параллаксъ Солнца. Считая $\pi = 9''$, имѣемъ $\log \rho = 5.63981$, а потому для временъ трехъ наблюденій находимъ

	I	II	III
$\log \mu$	6.29769	6.32563	6.38970
$L' - L$	$+ 11''.45$	$+ 11''.30$	$+ 13''.54$
$R' - R$	$+ 0.0001892$;	$+ 0.0002026$;	$+ 0.0002382$

Слѣдовательно долготы Солнца, видимыя изъ locus fictus и логариомы разстояній этой точки отъ центра Солнца для временъ трехъ наблюденій, будутъ

348° 45' 40''.20	9.9972488
355 44 18.97	9.9980712
2 43 0.61	9.9989442

Къ временамъ наблюденій слѣдовало бы придать промежутки времени употребляемые свѣтомъ для прохожденія отъ мѣста наблюденія до соотвѣтствующаго locus fictus, но въ нашемъ случаѣ эти поправки вычисленныя по выраженіе (196) Т. I не превышаютъ 0ˢ.1, а потому ими мы пренебрегаемъ.

Обращая часы, минуты и секунды временъ наблюденій въ десятичныя доли сутокъ и замѣняя долготы Солнца видимыя изъ locus fictus долготами этой точки видимыми изъ центра Солнца, составляемъ слѣдующую таблицу данныхъ для вычисленія орбиты

t	α ♑︎	β ♑︎	l	$\log R$
1875, Марта 9.320438	15° 41' 3''.28	+ 0° 43' 51''.62	168° 45' 40''.20	9.9972488
„ „ 16.320889	20 45 17.87	6 24 12.27	175 44 18.97	9.9980712
„ „ 23.351934	26 23 24.13	5 52 16.93	182 43 0.61	9.9989442

Мы удерживаемъ здѣсь тѣ означенія, которыя сдѣлали выше при изложеніи Гауссова способа опредѣленія орбитъ по тремъ наблюденіямъ.

Имѣя все это, приступимъ къ вычисленію орбиты кометы Энко. Прежде всего опредѣлимъ изъ уравненій (57) и (57_*) значенія γ и δ для каждаго изъ трехъ наблюденій. Въ нашемъ случаѣ

$$\log \tang \beta = 9.0719617; \qquad \alpha - l = -153°\ 4'\ 36''.92$$
$$\log \tang \beta' = 9.0501020; \qquad \alpha' - l' = -154\ 59\ 1.10$$
$$\log \tang \beta'' = 9.0121407; \qquad \alpha'' - l'' = -156\ 19\ 36.48$$

поэтому

$$\gamma = 165^\circ\ 23'\ 26''.86; \qquad \delta = 152^\circ\ 18'\ 33''.74$$
$$\gamma' = 165\ \ \ 8\ 12.43; \qquad \delta' = 154\ \ 13\ \ 41.90$$
$$\gamma'' = 165\ \ 38\ \ 4.24; \qquad \delta'' = 154\ \ 39\ \ 1.09$$

при помощи величинъ γ, γ', γ'' изъ уравненій (58), (58_*) и (58_*^*) находимъ

$$\varepsilon = 1^\circ\ 49'\ 42''.48 \qquad A'D = \ 70^\circ\ 51'\ 26''.00$$
$$\varepsilon' = 3\ \ 29\ \ 29.54 \qquad A''D = \ 77\ \ 36\ \ 37.00$$
$$\varepsilon'' = 1\ \ 47\ \ 30.64 \qquad AD' = \ 79\ \ 16\ \ 6.29$$
$$A''D' = \ 92\ \ 47\ \ 4.29$$
$$AD'' = \ 94\ \ 45\ \ 37.27$$
$$A'D'' = 101\ \ 30\ \ 31.81$$

Обращаясь затѣмъ къ уравненіямъ (61) и (62) выводимъ изъ нихъ

$$S = -0.0250892 \qquad \delta' - \omega = 154^\circ\ 23'\ 42''.87$$
$$\log T = \ \ 9.2691150 \qquad \omega = -0\ \ 10\ \ 0.97$$
$$t = 358^\circ\ 29'\ 58''.73$$

При помощи найденныхъ теперь величинъ составляемъ

$$BD' = AD' - \delta \qquad = 286^\circ\ 57'\ 32''.55$$
$$B''D = A''D - \delta'' \qquad = 281\ \ 57\ \ 35.91$$
$$B_*D = A'D - \delta' + \omega = 276\ \ 27\ \ 43.13$$

а по выраженіямъ (41) имѣемъ

$$\log a = 0.0189203 \qquad \log b = 0.0154212$$

Для повѣрки вычисленія производеннаго до сихъ поръ, вставимъ найденныя величины въ повѣрительное уравненіе (65) и тогда найдемъ

$$\frac{a}{R}\sin(l'' - l') = 0.1277105$$

$$\frac{\sin(l' - l)}{R''} = 0.1217743$$

$$\frac{b\,.\sin(l'' - l)\sin(\delta' - \omega)}{R'.\sin\delta'} = 0.2494850$$

Сумма двухъ первыхъ изъ этихъ величинъ безъ третей разнится отъ нуля на двѣ единицы седьмаго десятичнаго знака, а потому все вычисленіе произведенное до сихъ поръ, можемъ считать вѣрнымъ.

Продолжая вычисленіе, по выраженіямъ (63), находимъ

$$\log d = 9.3657579_n; \qquad \log c = 8.9063110_n$$

Кромѣ того первое изъ выраженій (45) даетъ

$$\log e = 3.3255020_n$$

Если прибавимъ къ этому, что второе изъ выраженій (49) и ему подобное для $\varkappa''$ дастъ въ нашемъ случаѣ

$$\varkappa = -0.4827561; \qquad \varkappa'' = -0.4621697$$

то будемъ имѣть всѣ величины остающіяся постоянными въ послѣдовательныхъ приближеніяхъ, дѣлаемыхъ при вычисленіи разстояній свѣтила отъ Солнца и земли.

При дальнѣйшемъ вычисленіи вводятся функціи P и Q, опредѣляемыя послѣдовательными приближеніями, въ первомъ приближеніи мы принимаемъ $P = \frac{\theta''}{\theta}$, $Q = \theta . \theta''$, гдѣ $\theta'' = k(t' - t)$; $\theta = k(t'' - t')$. Для нашего случая $t' - t = 7.000451$; $t'' - t' = 7.031045$, и такъ какъ мы уже видѣли, что $\log k = 8.2355814$, то въ первомъ приближеніи принимаемъ

$$\log P = 9.9981062; \qquad \log Q = 8.1633088$$

При помощи этихъ гипотическихъ значеній P и Q по уравненію (64) и второму изъ уравненій (45) имѣемъ

$$\sigma = -12^\circ\ 9'\ 13''.45; \qquad \log M = 0.8121361$$

а слѣдовательно уравненіе (46) для первой гипотезы есть

$$[0.8121361] \sin^4 z = \sin(z + 12^\circ\ 19'\ 14''.42)$$

гдѣ заключенный въ скобки коеффиціентъ при $\sin^4 z$ есть логариомъ. Рѣшая относительно z это трансцендентное уравненіе, находимъ, что ему удовлетворяютъ слѣдующіе четыре корня

$$\begin{aligned} z &= 35^\circ\ 33'\ 11''.50 \\ z &= 154\ \ 11\ \ \ 0\ .25 \\ z &= 166\ \ 36\ \ 36\ .48 \\ z &= 348\ \ 18\ \ 23\ .80 \end{aligned}$$

Второй изъ этихъ корней долженъ быть отвергнутъ какъ весьма близкій къ δ', третій дастъ отрицательную величину для Δ', а четвертый—для r', поэтому оба они не соотвѣтствуютъ вопросу. И такъ остается одинъ первый корень, который и долженъ быть принятъ при вычисленіи орбиты. При помощи этого корня найдемъ два другія радіуса вектора кометы. Прежде всего по выраженіямъ (53) и (55) находимъ

$$\log p = 9.7534049_n; \qquad \log p'' = 9.3467248_n$$

Теперь имѣемъ все необходимое для рѣшенія уравненій (50), (51) и (54), которыя даютъ

$$\xi = 319^\circ\ 9'\ 22''.14; \qquad \xi'' = 338^\circ\ 54'\ 26''.27$$
$$\log r = 9.9378274 \qquad \log r'' = 9.7905696$$

При помощи ξ и ξ' изъ уравненія (66) или изъ уравненій (98) находимъ

$$f' = 9^\circ\ 54'\ 45''.30$$

Уравненія же (67) даютъ

$$2f = 11^\circ\ 36'\ 53''.00; \qquad 2f'' = 8^\circ\ 12'\ 37''.56$$

такъ какъ

$$2f + 2f'' = 2f'$$

и въ нашемъ случаѣ это уравненіе удовлетворяется съ точностію 0″.04, то заключаемъ, что вычисленіе до сихъ поръ произведено вѣрно.

Чтобы имѣть все необходимое для опредѣленія болѣе точныхъ значеній функцій P и Q по формамъ (69) и (72), остается вычислить величины отношеній η и η'' и найти исправленныя отъ аберраціи величины θ и θ''. Мы знаемъ, что для исправленія положенія свѣтила, имѣющаго собственное движеніе, отъ аберраціи по правилу Гаусса достаточно изъ временъ наблюденій вычесть тѣ промежутки времени, которые употребляетъ свѣтъ для прохожденія отъ свѣтила къ землѣ; поэтому необходимо знать разстоянія свѣтила отъ земли для каждаго изъ трехъ наблюденій. Выраженія (56) даютъ для этого

$$\log \Delta = 0.2076953; \qquad \log \Delta' = 0.1767277; \qquad \log \Delta'' = 0.1364853$$

Для прохожденія средняго разстоянія земли отъ Солнца свѣтъ употребляетъ 493 секунды или 0.005706 долей сутокъ, поэтому поправки временъ наблюденій будутъ

$$0.009205; \qquad 0.008571; \qquad 0.007813$$

а исправленныя времена

$$t = 9.311233; \qquad t' = 16.312318; \qquad t'' = 23.344121$$

Слѣдовательно логариѳмы исправленныхъ величинъ θ и θ'' суть

$$\log \theta = 9.0826481; \qquad \log \theta'' = 9.0807468$$

Этими величинами, не измѣняя ихъ болѣе, мы будемъ пользоваться при дальнѣйшемъ вычисленіи.

Перейдемъ теперь къ вычисленію отношеній η и η''. Для этого обратимся къ системамъ уравненій (88), по которымъ находимъ

$$\log m = 7.7753138; \qquad \log m'' = 7.5472717$$
$$l = 0.0047803; \qquad l'' = 0.0027356$$

Принимая $\xi = 0$, при помощи этихъ величинъ имѣемъ

$$h = 0.0071123; \qquad h'' = 0.0042172$$

По этимъ величинамъ какъ аргументамъ изъ таблицы данной К. Ф. Гауссомъ имѣемъ

$$\log \eta^2 = 0.0067789; \qquad \log \eta''^2 = 0.0040398$$

а слѣдовательно по второму изъ уравненій (82) и ему подобному для x'' имѣемъ

$$x = 0.0010881; \qquad x'' = 0.0007594$$

Если съ этими величинами какъ аргументами обратимся къ Гауссовымъ таблицамъ для опредѣленія ξ и ξ'', то найдемъ, что обѣ эти величины для нашего случая равны нулю. Слѣдовательно въ этомъ приближеніи величины h и h'', η и η'' дальнѣйшимъ измѣненіямъ не подлежатъ.

Теперь мы имѣемъ все для составленія болѣе точныхъ значеній функцій P и Q. Вычисляя ихъ по формамъ (69) и (72), имѣемъ

$$\log P = 9.9994682\,; \qquad \log Q = 8.1831279$$

Эти величины должны быть приняты въ основаніе втораго приближенія или второй гипотезы.

	во 2-й гипотезѣ	въ 3-й гипотезѣ	въ 4-й гипотезѣ
$\log P$	9.9994682	9.9994193	9.9994186
$\log Q$	8.1831279	8.1832955	8.1833024
σ	$-12^\circ\ 7'\ 25''.05$	$-12^\circ\ 7'\ 28''.96$	$-12^\circ\ 7'\ 29''.01$
$\log M$	0.8308941	0.8311000	0.8311074
z	$35^\circ\ 1'\ 30''.44$	$35^\circ\ 1'\ 10''.76$	$35^\circ\ 1'\ 10''.04$
$\log p$	9.7632844_n	9.7633564_n	9.7433597_n
$\log p''$	9.3643987_n	9.3646127_n	9.3646198_n
ξ	$318^\circ\ 40'\ 55''.87$	$318^\circ\ 40'\ 43''.46$	$318^\circ\ 40'\ 42''.90$
$\log r$	9.9435857	9.9436280	9.9436299
ξ''	$338^\circ\ 16'\ 26''.97$	$338^\circ\ 15'\ 59''.17$	$338^\circ\ 15'\ 58''.22$
$\log r''$	9.7960024	9.7960693	9.7960716
$2f'$	$19^\circ\ 40'\ 9''.63$	$19^\circ\ 39'\ 54''.40$	$19^\circ\ 39'\ 54''.02$
$2f$	11 30 41 .99	11 30 34 .03	11 30 33 .82
$2f''$	8 9 27 .53	8 9 20 .31	8 9 20 .14
$\log \eta$	0.0032628	0.0032614	0.0032613
$\log \eta''$	0.0019422	0.0019416	0.0019415

Если бы на основаніи величинъ, найденныхъ въ четвертой гипотезѣ вычислили функціи P и Q, то нашли бы

$$\log P = 9.9994186; \qquad \log Q = 8.1833026$$

ихъ слѣдуетъ считать тождественными съ величинами лежащими въ основаніи четвертой гипотезы. Поэтому съ помощію найденныхъ величинъ радіусовъ векторовъ и разностей истинныхъ аномалій, можемъ приступить къ вычисленію элементовъ орбиты.

Элементы наиболѣе удобно могутъ быть вычислены по радіусамъ векторамъ, соотвѣтствующимъ двумъ крайнимъ положеніямъ. Имѣя это въ виду, прежде всего вычислимъ отношеніе площади сектора, заключающагося между упомянутыми сейчасъ радіусами векторами, къ площади соотвѣтствующаго треугольника. Для этого по второй системѣ уравненій (88) находимъ

$$\log m' = 8.2720945; \qquad h' = 0.02206142; \qquad \log \eta'^2 = 0.0205023$$

Эта величина h' вычислена въ предположеніи $\xi = 0$; опредѣляя x' по η' имѣемъ, $x' = 0.00305512$, слѣдовательно $\xi' = 0.00000052$; а потому болѣе точная вели-

чина h' есть 0.02206121. При помощи этой величины находимъ тоже значеніе η' какъ прежде, т. е. $\log \eta'^2 = 0.0205023$ и

$$\log x' = 7.4848798 .$$

Такъ какъ

$$x' = \sin^2\left(\frac{g'}{2}\right)$$

то

$$g' = 6^\circ\ 20'\ 9''.53$$

Кромѣ того по выраженіе

$$\sqrt[4]{\frac{r''}{r}} = \tang\,(45^\circ + \psi)$$

имѣемъ

$$\psi = -2^\circ\ 25'\ 49''.69$$

Посредствомъ величинъ ψ, g' и f' изъ уравненій (93), (94), (95) и (96) находимъ

$$F' = 258^\circ\ 59'\ 23''.10; \qquad G' = 320^\circ\ 37'\ 41''.34$$
$$\varphi = 57\ \ 36\ \ 2\ .72; \qquad \log a = 0.3304385$$

посредствомъ a вычислимъ μ изъ выраженія

$$\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

Но чтобы получить μ въ секундахъ, а не въ линейной мѣрѣ, мы раздѣлимъ величину найденную по этой формѣ на $\sin 1''$ и тогда будемъ имѣть

$$\log \mu = 3.0543488; \qquad \mu = 1133''.31$$

Посредствомъ F' и G' находимъ

$$v = 249^\circ\ \ 9'\ 26''.09; \qquad E = 314^\circ\ 17'\ 31''.81$$
$$v'' = 268\ \ 49\ \ 20\ .11; \qquad E'' = 326\ \ 57\ \ 50\ .87$$

Обращаясь къ уравненіямъ (98) имѣемъ изъ нихъ

$$w = 183^\circ\ 50'\ 32''.86; \qquad w'' = 186^\circ\ 51'\ 46''.24$$

съ этими величинами изъ уравненій (99) имѣемъ

$$u = 73^\circ\ 45'\ 58''.13; \qquad h = 194^\circ\ 46'\ 45''.21$$

$$i = 13^\circ\ 4'\ 11''.68$$

а такъ какъ $\theta = l - h$; $\omega = u - v$, то

$$\theta = 333^\circ\ 58'\ 54''.99; \qquad \omega = 184^\circ\ 36'\ 32''.04$$

Такимъ образомъ найдены всѣ элементы за исключеніемъ средней аномаліи эпохи. Для вычисленія этой послѣдней, помня что $e = \sin\varphi$, изъ уравненій

$$M = E - e.\sin E; \qquad M'' = E'' - e.\sin E''$$

находимъ

$$M = 348^0\ 55'\ 11''.03; \qquad M'' = 353^0\ 20'\ 14''.78$$

Будемъ за эпоху считать 1-е Марта 1875 года 0^h средняго Московскаго времени, тогда въ выраженіяхъ

$$M_0 = M - \mu(t - T) = M'' - \mu(t'' - T)$$

примемъ $T = 1.0$ и найдемъ

$$M_0 = 346^0\ 18'\ 11''.77$$
$$M_0 = 346\ \ 18\ \ 11\ .96$$

Такое согласіе двухъ опредѣленій величины M_0 можно считать при вычисленіи орбиты значительнаго эксцентриситета удовлетворительнымъ и все вычисленіе системы эллиптическихъ элементовъ достаточно вѣрнымъ.

И такъ по тремъ Московскимъ наблюденіямъ мы нашли слѣдующую систему элементовъ орбиты Энковой кометы

1875, марта 1.0 ср. моск. вр.

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= 346^0\ 18'\ 11''.87 \\ \theta &= 333\ \ 58\ \ 54\ .99 \\ \omega &= 184\ \ 36\ \ 32\ .04 \\ i &= 13\ \ 4\ \ 11\ .68 \\ \varphi &= 57\ \ 36\ \ 2\ .72 \end{aligned}\right\}\text{среднее равнод. } 1875.0$$

$$\log\mu = 3.0543488$$

Вычисленіе орбиты малой планеты по наблюденіямъ, отдѣленнымъ гораздо болѣе значительными промежутками времени чѣмъ тѣ, которые имѣютъ мѣсто въ разсматриваемомъ случаѣ, не требуетъ болѣе трехъ гипотезъ; въ приведенномъ же здѣсь вычисленіи орбиты кометы Энке число гипотезъ достигло четырехъ. Такое осложненіе работы обусловливается значительною величиною эксцентриситета орбиты.

III.

Нѣкоторыя видоизмѣненія способа, предложеннаго К. Ф. Гауссомъ для опредѣленія орбитъ по тремъ наблюденіямъ.

10. Мы видѣли, что существенную часть вопроса объ опредѣленіи орбитъ К. Ф. Гауссъ рѣшаетъ послѣдовательными приближеніями. Въ первомъ приближеніи на основаніи извѣстныхъ допущеній онъ даетъ функціямъ P и Q форму $P=\frac{\theta''}{\theta}$; $Q=\theta\theta''$.

Если эксцентриситетъ опредѣляемой орбиты не великъ, если промежутки времени, отдѣляющіе одно наблюденіе отъ другаго незначительны и при всемъ этомъ геліоцентрическое движеніе свѣтила въ періодъ времени, обнимающій разсматриваемыя наблюденія, мало, то упомянутыя допущенія довольно близки къ истинѣ и число приближеній необходимое для точнаго рѣшенія вопроса будетъ не велико. Если же хотя одно изъ указанныхъ условій не выполняется въ данномъ случаѣ, то вычисленіе разстояній свѣтила отъ Солнца по способу, предложенному К. Ф. Гауссомъ, можетъ сдѣлаться очень продолжительнымъ. Для устраненія этого неудобства Неаполитанскій астрономъ Ан. Гаспарисъ предлагаетъ пользоваться въ первомъ приближеніи уравненіемъ (42), не вводя въ него функцій P и Q, а опредѣляя отношенія $\frac{n''}{n'}$ и $\frac{n}{n'}$, точно до членовъ третьяго порядка включительно.

Прежде чѣмъ будемъ подробно говорить объ этомъ измѣненіи Гауссовой методы предложенной Гаспарисомъ, покажемъ нѣкоторыя упрощенія, возможныя въ вычисленіи коэффиціентовъ основнаго уравненія (42). Вычисленіе коэффиціентовъ a и b Гауссъ приводитъ къ вычисленію положенія и частей большихъ круговъ, проведенныхъ черезъ геоцентрическія мѣста разсматриваемаго свѣтила и соотвѣтствующія имъ геліоцентрическія положенія земли.

Вычисленіе этихъ коэффиціентовъ a и b значительно упростится, если сдѣлаемъ ихъ зависимыми отъ долготы K узла большаго круга проведеннаго черезъ два крайнія геоцентрическія мѣста свѣтила и отъ наклоненія J этого большаго круга къ эклиптикѣ.

Для преобразованія коэффиціента a обратимся къ треугольникамъ AMB и $B''D'B$ (фиг. 3). Назовемъ уголъ ABM и равный ему уголъ $D'BB''$ чрезъ x;

пусть уголъ $D'B''B = \varphi$. Въ треугольникѣ AMB стороны $AB = \delta$ и $AM = l - K$, гдѣ δ и l имѣютъ тѣже значенія какъ выше; уголъ $AMB = J$. Изъ этого треугольника имѣемъ

$$\frac{\sin\delta}{\sin(l-K)} = \frac{\sin J}{\sin x}$$

Изъ треугольника $BD'B''$ подобнымъ же образомъ находимъ

$$\frac{\sin B''D'}{\sin BD'} = \frac{\sin x}{\sin\varphi}$$

Перемноживъ эти уравненія, получимъ

$$\frac{\sin\delta\,.\sin B''D'}{\sin BD'.\sin(l-K)} = \frac{\sin J}{\sin\varphi}$$

Замѣтимъ, что въ треугольникѣ $B''A''M$ (фиг. 3) сторона $A''B''=\delta''$ и $A''M=l''-K$, а уголъ $A''B''M = 180^0 - \varphi$, слѣдовательно изъ этого треугольника имѣемъ

$$\frac{\sin\varphi}{\sin J} = \frac{\sin(l''-K)}{\sin\delta''} \tag{100}$$

Внося величину $\sin\varphi$ взятую изъ этого выраженія въ предыдущее, получимъ

$$\frac{\sin\delta\,.\sin B''D'}{\sin\delta''.\sin BD'} = \frac{\sin(l-K)}{\sin(l''-K)}$$

а слѣдовательно первое изъ выраженій (41) приводится къ виду

$$a = \frac{R}{R''}\,\frac{\sin(l-K)}{\sin(l''-K)} \tag{101}$$

Для преобразованія коэффиціента b обратимся къ треугольникамъ $A'B_*M$ и B_*DB''. Пусть уголъ $A'B_*M = B''B_*D = y$. Изъ этихъ треугольниковъ имѣемъ

$$\frac{\sin B_*D}{\sin B''D} = \frac{\sin\varphi}{\sin y}\,; \qquad \frac{\sin(l'-K)}{\sin(\delta'-\omega)} = \frac{\sin y}{\sin J}$$

Перемноживъ эти уравненія и исключивъ изъ произведенія $\sin\varphi$ посредствомъ уравненія (100), найдемъ

$$\frac{\sin B''D}{\sin\delta''.\sin B_*D} = \frac{\sin(l-K)}{\sin(\delta'-\omega)\sin(l''-K)}$$

а потому второе изъ выраженій (41) приводится къ виду

$$b = \frac{R'.\sin\delta'.\sin(l'-K)}{R''.\sin(\delta'-\omega)\sin(l''-K)} \tag{102}$$

Что касается до угла ω, то онъ опредѣляется совокупностію уравненій (61) и (62), однако вычисленіе его значительно упростится, если приведемъ выраженіе

$\operatorname{tang}(\delta' - \omega)$ въ зависимость отъ J и K. Преобразуемъ въ этомъ смыслѣ выраженіе (60).

Изъ треугольниковъ $B''q''M$ и BqM имѣемъ

$$(103) \qquad \begin{aligned} \operatorname{tang} \beta &= \sin(\alpha - K) \operatorname{tang} J \\ \operatorname{tang} \beta'' &= \sin(\alpha'' - K) \operatorname{tang} J \end{aligned}$$

гдѣ α, β, α'', β'' имѣютъ тѣ же значенія какъ прежде. Если внесемъ эти величины тангенсовъ въ числителя выраженія (60), то приведемъ эту сумму къ виду

$$[\sin(\alpha - K) \sin(\alpha'' - l') + \sin(\alpha - l') \sin(\alpha'' - K)] \operatorname{tang} J$$

Что можно представить также въ формѣ

$$\frac{1}{2} \Big\{ \cos[(\alpha'' - \alpha) - (l' - K)] - \cos[(\alpha'' - \alpha) + (l' - K)] \Big] \operatorname{tang} J$$

или въ формѣ

$$\sin(\alpha'' - \alpha) \sin(l' - K) \operatorname{tang} J$$

Точно такимъ же образомъ множитель при $\cos\gamma'$ въ знаменателѣ выраженія (60) легко приводится къ виду

$$\sin(\alpha'' - \alpha) \cos(l' - K) \operatorname{tang} J$$

а потому уравненіе (60) обращается въ

$$\operatorname{tang}(\delta' - \omega) = \frac{\sin(l' - K) \operatorname{tang} J}{\sin\gamma' - \cos\gamma' . \cos(l' - K) . \operatorname{tang} J}$$

Положимъ здѣсь

$$(104) \qquad \operatorname{tang} w = \operatorname{tang} J \cos(l' - K)$$

тогда

$$(105) \qquad \operatorname{tang}(\delta' - \omega) = \frac{\sin(l' - K) . \cos w . \operatorname{tang} J}{\sin(\gamma' - w)}$$

Это выраженіе вмѣстѣ съ предыдущимъ и должно служить для вычисленія ω. Понятно, что этимъ путемъ уголъ ω опредѣлится гораздо удобнѣе нежели по уравненіямъ (61) и (62).

Остается показать способъ вычисленія величинъ J и K, отъ которыхъ зависитъ теперь вычисленіе коеффиціентовъ основнаго уравненія (42). Для всякаго произвольнаго угла ψ выраженія (103) можно представить въ видѣ

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \beta &= [\sin(\alpha - \psi) \cos(\psi - K) + \sin(\psi - K) \cos(\alpha - \psi)] \operatorname{tang} J \\ \operatorname{tang} \beta'' &= [\sin(\alpha'' - \psi) \cos(\psi - K) + \sin(\psi - K) \cos(\alpha'' - \psi)] \operatorname{tang} J \end{aligned}$$

Исключая изъ этихъ двухъ уравненій сначала $\cos(\psi - K)$, а потомъ $\sin(\psi - K)$, легко находимъ

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \beta . \sin(\alpha'' - \psi) - \operatorname{tang} \beta'' . \sin(\alpha - \psi) &= \sin(\psi - K) \sin(\alpha'' - \alpha) \operatorname{tang} J \\ \operatorname{tang} \beta'' . \cos(\alpha - \psi) - \operatorname{tang} \beta . \cos(\alpha'' - \psi) &= \cos(\psi - K) \sin(\alpha'' - \alpha) \operatorname{tang} J \end{aligned}$$

Такъ какъ ψ есть совершенно произвольная величина, то положимъ

$$\psi = \frac{\alpha'' + \alpha}{2}$$

тогда

$$\alpha'' - \psi = \frac{\alpha'' - \alpha}{2}; \qquad \alpha - \psi = \frac{\alpha - \alpha''}{2}$$

Слѣдовательно два предыдущія уравненія приводятся къ виду

$$\tang \beta \,.\, \sin \frac{\alpha'' - \alpha}{2} - \tang \beta''.\, \sin \frac{\alpha - \alpha''}{2} = \sin \left[\frac{\alpha'' + \alpha}{2} - K\right] \sin (\alpha'' - \alpha) \tang J$$

$$\tang \beta''.\, \cos \frac{\alpha - \alpha''}{2} - \tang \beta \,.\, \cos \frac{\alpha'' - \alpha}{2} = \cos \left[\frac{\alpha' + \alpha}{2} - K\right] \sin (\alpha'' - \alpha) \tang J$$

откуда легко находимъ

$$\sin \left[\frac{\alpha'' + \alpha}{2} - K\right] \tang J = \frac{\sin (\beta + \beta'')}{2 \,.\, \cos \beta \,.\, \cos \beta''.\, \cos \frac{\alpha'' - \alpha}{2}}$$

$$\cos \left[\frac{\alpha'' + \alpha}{2} - K\right] \tang J = \frac{\sin (\beta'' - \beta)}{2 \,.\, \cos \beta \,.\, \cos \beta''.\, \sin \frac{\alpha'' - \alpha}{2}} \qquad (106)$$

Этими уравненіями и слѣдуетъ пользоваться для опредѣленія угловъ J и K.

11. Разсмотримъ теперь преобразованіе предложенное Гаспарисомъ. Найдемъ прежде всего выраженія отношеній $\frac{n}{n'}$ и $\frac{n''}{n'}$. Назовемъ чрезъ x и y линейныя координаты свѣтила относительно осей проведенныхъ чрезъ центръ Солнца въ плоскости орбиты. Подобныя же координаты для времени втораго и третьяго наблюденія пусть будутъ x', y'; x'', y''. Такъ какъ координаты вообще суть функціи времени, то положимъ

$$x' = f(t'); \qquad y' = F(t')$$

допустимъ, что съ измѣненіемъ t на Δt эти координаты измѣняются на $\Delta x'$ и $\Delta y'$, тогда

$$x' + \Delta x' = f(t' + \Delta t) = x' + \frac{dx'}{dt} \cdot \Delta t + \frac{d^2x'}{dt^2} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \cdots\cdots$$

$$y' + \Delta y' = F(t' + \Delta t) = y' + \frac{dy'}{dt} \cdot \Delta t + \frac{d^2y'}{dt^2} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \cdots\cdots$$

Понятно, что при $\Delta t = -(t' - t)$ сумма $x' + \Delta x'$ обращается въ x, а при $\Delta t = (t'' - t')$ таже сумма обращается въ x''. Мы предполагаемъ, что t, t', t'' суть времена трехъ наблюденій. Пусть кромѣ того какъ прежде

$$k(t' - t) = \theta''; \qquad k(t'' - t') = \theta; \qquad k(t'' - t) = \theta'$$

тогда

$$(107)\quad \begin{aligned} x &= x' - \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{\theta''}{k} + \frac{d^2x'}{dt^2}\cdot\frac{\theta''^2}{2k^2} - \frac{d^3x'}{dt^3}\cdot\frac{\theta''^3}{2.3.k^3} + \dots\dots\dots \\ x'' &= x' + \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{\theta}{k} + \frac{d^2x'}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{2k^2} + \frac{d^3x'}{dt^3}\cdot\frac{\theta^3}{2.3.k^3} + \dots\dots\dots \\ y &= y' - \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{\theta''}{k} + \frac{d^2y'}{dt^2}\cdot\frac{\theta''^2}{2k^2} - \frac{d^3y'}{dt^3}\cdot\frac{\theta''^3}{2.3.k^3} + \dots\dots\dots \\ y'' &= y' + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{\theta}{k} + \frac{d^2y'}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{2k^2} + \frac{d^3y'}{dt^3}\cdot\frac{\theta^3}{2.3.k^3} + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Если пренебрегаемъ массою планеты въ сравненіи съ массой Солнца, то, какъ мы знаемъ, уравненія движенія свѣтила въ плоскости его орбиты будутъ имѣть видъ

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{k^2x'}{r'^3}; \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k^2y'}{r'^3}$$

откуда

$$\frac{1}{k^2}\cdot\frac{d^3x'}{dt^3} = \frac{3x'}{r'^4}\cdot\frac{dr'}{dt} - \frac{1}{r'^3}\cdot\frac{dx'}{dt}$$

$$\frac{1}{k^2}\cdot\frac{d^3y'}{dt^3} = \frac{3y'}{r'^4}\cdot\frac{dr'}{dt} - \frac{1}{r'^3}\cdot\frac{dy'}{dt}$$

Внося эти величины въ предыдущія выраженія (107) и ограничиваясь членами содержащими третью степень величинъ θ и θ'', получимъ

$$x = x'\left[1 - \frac{\theta''^2}{2r'^3} - \frac{\theta''^3}{2k.r'^4}\cdot\frac{dr'}{dt}\right] - \left[\frac{\theta''}{k} - \frac{\theta''^3}{6k.r'^3}\right]\frac{dx'}{dt}$$

$$y = y'\left[1 - \frac{\theta''^2}{2r'^3} - \frac{\theta''^3}{2k.r'^4}\cdot\frac{dr'}{dt}\right] - \left[\frac{\theta''}{k} - \frac{\theta''^3}{6k.r'^3}\right]\frac{dy'}{dt}$$

$$x'' = x'\left[1 - \frac{\theta^2}{2r'^3} + \frac{\theta^3}{2k.r'^4}\cdot\frac{dr'}{dt}\right] + \left[\frac{\theta}{k} - \frac{\theta^3}{6k.r'^3}\right]\frac{dx'}{dt}$$

$$y'' = y'\left[1 - \frac{\theta^2}{2r'^3} + \frac{\theta^3}{2k.r'^4}\cdot\frac{dr'}{dt}\right] + \left[\frac{\theta}{k} - \frac{\theta^3}{6k.r'^3}\right]\frac{dy'}{dt}$$

Положимъ здѣсь для краткости

$$A = 1 - \frac{\theta''^2}{2r'^3} - \frac{\theta''^3}{2k.r'^4}\cdot\frac{dr'}{dt}; \qquad B = \frac{\theta''}{k}\left[1 - \frac{\theta''^2}{6r'^3}\right]$$

$$A' = 1 - \frac{\theta^2}{2r'^3} + \frac{\theta^3}{2k.r'^4}\cdot\frac{dr'}{dt}; \qquad B' = \frac{\theta}{k}\left[1 - \frac{\theta^2}{6r'^3}\right]$$

тогда

$$x = Ax' - B.\frac{dx'}{dt}; \qquad x'' = A'.x' + B'.\frac{dx'}{dt}$$

$$y = Ay' - B.\frac{dy'}{dt}; \qquad y'' = A'.y' + B'.\frac{dy'}{dt}$$

Если означимъ какъ прежде чрезъ n, n', n'' удвоенныя площади треугольниковъ составленныхъ изъ радiусовъ векторовъ и хордъ, то легко видѣть, что *)

$$n = y''x' - x''y'; \qquad n' = y''x - x''y; \qquad n'' = y'x - x'y \tag{108}$$

Внося въ эти выраженiя предыдущiя формы координатъ, легко получимъ

$$n = \left[x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right]B'$$

$$n' = \left[x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right]\left[AB' + A'B\right]$$

$$n'' = \left[x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right]B$$

Но замѣтивъ, что $\theta + \theta'' = \theta'$ и ограничиваясь третьими степенями величинъ θ, θ', θ'', легко видѣть, что

$$AB' + A'B = \frac{\theta'}{k} - \frac{\theta'^3}{6k.r'^3}$$

И такъ

$$n'' = \frac{\theta''}{k}\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right)\left(1 - \frac{\theta''^2}{6r'^3}\right)$$

$$n' = \frac{\theta'}{k}\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right)\left(1 - \frac{\theta'^2}{6r'^3}\right)$$

$$n = \frac{\theta}{k}\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{6r'^3}\right)$$

Чрезъ дѣленiе одного изъ этихъ выраженiй на другое находимъ

$$\frac{n''}{n'} = \frac{\theta''}{\theta'}\left[\frac{6r'^3 - \theta''^2}{6r'^3 - \theta'^2}\right]; \qquad \frac{n}{n'} = \frac{\theta}{\theta'}\left[\frac{6r'^3 - \theta^2}{6r'^3 - \theta'^2}\right] \tag{109}$$

Но ограничиваясь величинами третьяго порядка относительно θ, θ', θ'', можемъ представить эти отношенiя въ видѣ

$$\frac{n''}{n'} = \frac{\theta''}{\theta'}\left[1 - \frac{\theta''^2}{6r'^3} + \frac{\theta'^2}{6r'^3}\right]; \qquad \frac{n}{n'} = \frac{\theta}{\theta'}\left[1 - \frac{\theta^2}{6r'^3} + \frac{\theta'^2}{6r'^3}\right]$$

---

*) Пусть S (фиг. 5) будетъ начало координатъ, пусть Sx и Sy будутъ прямоугольныя оси координатъ проведенныя въ плоскости орбиты, пусть наконецъ въ p и p' будутъ первое и второе положенiе планеты въ орбитѣ. Изъ чертежа видно, что площадь треугольника Spp' можно представить суммою площадей треугольника Spa и четыреугольника $abp'c$ безъ суммы площадей треугольниковъ $p'Sb$ и $p'pc$. Слѣдовательно

$$\frac{n''}{2} = \frac{xy}{2} + (y' - y)x - \left[\frac{x'y'}{2} + \frac{(y' - y)(x - x')}{2}\right]$$

откуда

$$n'' = xy' - x'y$$

подобнымъ же образомъ найдутся выраженiя для n и n'.

или

$$\frac{n''}{n'}=\frac{\theta''}{\theta'}\left[1+\frac{(\theta'-\theta'')(\theta'+\theta'')}{6r'^3}\right];\qquad \frac{n}{n'}=\frac{\theta}{\theta'}\left[1+\frac{(\theta'-\theta)(\theta+\theta')}{6r'^3}\right]$$

или наконецъ

$$(110)\qquad \frac{n''}{n'}=\frac{\theta''}{\theta'}\left[1+\frac{\theta(\theta''+\theta')}{6r'^3}\right];\qquad \frac{n}{n'}=\frac{\theta}{\theta'}\left[1+\frac{\theta''(\theta+\theta')}{6r'^3}\right]$$

Изъ выраженія (69) мы видимъ, что

$$\frac{n''}{n}=\frac{\theta''.\eta}{\theta.\eta''}$$

подобно этому

$$\frac{n''}{n'}=\frac{\theta''.\eta'}{\theta'.\eta''};\qquad \frac{n}{n'}=\frac{\theta.\eta'}{\theta'.\eta}$$

Удерживая Гауссовы означенія, положимъ

$$(111)\qquad \frac{\eta'}{\eta}=1+\frac{Y}{r'^3};\qquad \frac{\eta'}{\eta''}=1+\frac{Y''}{r'^3}$$

Сравнивая это съ выраженіями (109), видимъ, что ограничиваясь величинами третьяго порядка относительно θ, θ' и θ'', можно принять

$$(112)\qquad Y=\frac{\theta''}{6}(\theta+\theta');\qquad Y''=\frac{\theta}{6}(\theta''+\theta')$$

И такъ основное уравненіе (42) при найденной теперь формѣ коэффиціентовъ и отношеній $\frac{n}{n'}$ и $\frac{n''}{n'}$ можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{R}{R''}\frac{\sin(l-K)}{\sin(l''-K)}\cdot\frac{\theta}{\theta'}\left[1+\frac{Y}{r'^3}\right]-\frac{R'.\sin\delta'.\sin(l'-K)}{R''.\sin(l''-K)\sin(\delta'-\omega)}\frac{\sin(z-\omega)}{\sin z}+\frac{\theta''}{\theta'}\left[1+\frac{Y''}{r'^3}\right]=0$$

или

$$\frac{R.\sin(l-K)\sin(\delta'-\omega)}{R'.\sin(l'-K)\sin\delta'}\cdot\frac{\theta}{\theta'}\left[1+\frac{Y}{r'^3}\right]+\frac{R''.\sin(l''-K)\sin(\delta'-\omega)}{R'.\sin\delta'.\sin(l'-K)}\cdot\frac{\theta''}{\theta'}\left[1+\frac{Y''}{r'^3}\right]=\frac{\sin(z-\omega)}{\sin z}$$

Пусть

$$\theta'R'.\sin\delta'.\sin(l'-K)=A$$

$$(113)\qquad \frac{\theta R}{A}\cdot\sin(l-K)\sin(\delta'-\omega)=R$$

$$\frac{\theta''R''}{A}\cdot\sin(l''-K)\sin(\delta'-\omega)=R''$$

тогда предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$(B+R'')\sin z+\frac{RY+B''Y''}{r'^3}\cdot\sin z=\sin(z-\omega)$$

Но мы знаемъ, что

$$r' = \frac{R'.\sin\delta'}{\sin z}$$

а потому предыдущее приводится къ виду

$$\frac{BY + B''Y''}{R'^3 \sin^3 \delta'} \sin^4 z = [\cos\omega - (B + B'')] \sin z - \sin\omega . \cos z$$

Пусть наконецъ

$$\cos\omega - (B + B'') = h . \cos q$$
$$\sin\omega = h . \sin q \tag{114}$$
$$\frac{BY + B''Y''}{h . R'^3 . \sin^3 \delta'} = m$$

тогда предыдущее уравненіе принимаетъ видъ

$$m . \sin^4 z = \sin (z - q) \tag{115}$$

въ которомъ оно совершенно подобно уравненію (46) и служитъ для опредѣленія главной неизвѣстной величины z. Точность опредѣленія величины z по этому второму способу въ случаѣ вычисленія планетной орбиты весьма часто соотвѣтствуетъ той, которая по способу Гаусса достигается тремя приближеніями. Но надо сознаться, что и это преобразованіе не имѣетъ особенно выгодныхъ послѣдствій при вычисленіи орбитъ съ сравнительно большими эксцентриситетами. Такъ напримѣръ при вычисленіи орбиты кометы Энке по выше приведеннымъ наблюденіямъ величина z, найденная по уравненію (115), не болѣе какъ на двѣ минуты разнится отъ величины найденной по способу Гаусса въ первой гипотезѣ

12. Какъ скоро уголъ z тѣмъ или другимъ способомъ опредѣленъ въ первомъ приближеніи, то для втораго приближенія удобнѣе всего пользоваться пріемомъ указаннымъ Гауссомъ и ввести въ вычисленіе функціи P и Q. Нѣкоторое упрощеніе, возможное при этомъ, будетъ заключаться въ особомъ способѣ вычисленія функцій P и Q, основанномъ на примѣненіи уравненія Эйлера. Этотъ пріемъ уже указанъ мною въ Astron. Nachr. № 1924.

Мы видѣли, что двѣ функціи P и Q введенныя Гауссомъ представляются между прочимъ въ видѣ

$$P = \frac{n''}{n}; \qquad Q = 2r'^3 \left[\frac{n + n''}{n'} - 1\right]$$

гдѣ

$$n = r'.r''.\sin 2f; \qquad n' = rr''.\sin 2f'; \qquad n'' = rr'.\sin 2f''$$

Но по уравненію (70) имѣемъ

$$n - n' + n'' = \frac{4r.r'.r''}{p} . \sin f . \sin f' . \sin f''$$

Посредствомъ этихъ выраженій предыдущія формы P и Q легко приводятся къ виду

$$(116) \qquad P = \frac{r \,.\, \sin 2f''}{r'' \,.\, \sin 2f}; \qquad Q = \frac{4r'^4 \,.\, \sin f \,.\, \sin f''}{p \,.\, \cos f'}$$

Очевидно, что во всякомъ приближеніи, какъ скоро найдены r, r', r'', f, f' и f'', мы можемъ пользоваться этими выраженіями для вычисленія функцій P и Q; если только будетъ показанъ способъ вычисленія функціи p. Этого легко достигнуть посредствомъ уравненія Эйлера. Простѣйшій выводъ этого уравненія основывается на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Исключая изъ уравненія составленнаго для перваго и третьяго наблюденія по формѣ (74) величину $e \,.\, \cos \dfrac{E'' + E}{2}$ посредствомъ уравненія (79_*), примѣненнаго къ тѣмъ же наблюденіямъ, получимъ

$$\frac{\theta'}{a^{\frac{3}{2}}} = E'' - E - \frac{2a - (r + r'')}{a} \operatorname{tang} \frac{E'' - E}{2}$$

Если назовемъ чрезъ k хорду соединяющую первое положеніе свѣтила съ третьимъ, то принимая

$$(r + r'' - k) = 2h; \qquad (r + r'' + k) = 2g$$

представимъ предыдущее въ видѣ

$$\frac{\theta'}{a^{\frac{3}{2}}} = E'' - E - \frac{2a - (h + g)}{a} \operatorname{tang} \frac{E'' - E}{2}$$

Пусть

$$\frac{a - g}{a} = \cos z''; \qquad \frac{a - h}{a} = \cos z$$

тогда

$$(117) \qquad \frac{\theta'}{a^{\frac{3}{2}}} = E'' - E - [\cos z + \cos z''] \operatorname{tang} \frac{E'' - E}{2}$$

Легко показать, что $E'' - E = z'' - z$. Въ самомъ дѣлѣ

$$k^2 = r^2 + r''^2 - 2rr'' \,.\, \cos (v'' - v)$$

откуда

$$2 \sqrt{rr''} \,.\, \cos \frac{v'' - v}{2} = \sqrt{(r + r'')^2 - k^2}$$

Вносся сюда вмѣсто $\sqrt{rr''} \,.\, \cos \dfrac{v'' - v}{2}$ его величину составленную по формѣ втораго изъ уравненій (76), найдемъ

$$2a \,.\, \cos \frac{E'' - E}{2} - 2ae \,.\, \cos \frac{E'' + E}{2} = \sqrt{(r + r'')^2 - k^2}$$

исключая отсюда произведеніе $e \cdot \cos\frac{E''+E}{2}$ посредствомъ уравненія составленнаго по формѣ (79_*), имѣемъ

$$2a \cdot \cos\frac{E''-E}{2} + \frac{r+r''-2a}{\cos\frac{E''-E}{2}} = \sqrt{(r+r'')^2-k^2}$$

Если рѣшимъ это квадратное уравненіе относительно $\cos\frac{E''-E}{2}$, то получимъ

$$4a \cdot \cos\frac{E''-E}{2} = \sqrt{(r+r'')^2-k^2} \pm \sqrt{[4a-(r+r'')]^2-k^2}$$

или

$$\cos\frac{E''-E}{2} = \sqrt{\frac{r+r''+k}{4a}}\sqrt{\frac{r+r''-k}{4a}} \pm \sqrt{\left[\frac{4a-r-r''+k}{4a}\right]\left[\frac{4a-r-r''-k}{4a}\right]}$$

Мы приняли

$$\frac{2a-r-r''-k}{2a} = \cos z''; \qquad \frac{2a-r-r''+k}{2a} = \cos z$$

откуда

$$2 \cdot \sin^2\left(\frac{z''}{2}\right) = 1 - \cos z'' = \frac{r+r''+k}{2a}$$

$$2 \cdot \sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = 1 - \cos z = \frac{r+r''-k}{2a}$$

$$2 \cdot \cos^2\left(\frac{z''}{2}\right) = 1 + \cos z'' = \frac{4a-r-r''-k}{2a}$$

$$2 \cdot \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) = 1 + \cos z = \frac{4a-r-r''+k}{2a}$$

поэтому

$$\cos\frac{E''-E}{2} = \sin\frac{z}{2} \cdot \sin\frac{z''}{2} \pm \cos\frac{z}{2} \cdot \cos\frac{z''}{2}$$

Слѣдовательно для верхняго знака

$$E''-E = z''-z$$

и для нижняго

$$\frac{E''-E}{2} = 180^\circ - \frac{z''+z}{2}$$

Принимая первое изъ этихъ рѣшеній, приводимъ уравненіе (117) къ виду

$$\frac{\theta'}{a^{\frac{3}{2}}} = z''-z-(\cos z+\cos z'')\,\mathrm{tang}\,\frac{z''-z}{2}$$

но

$$\operatorname{tang}\frac{z''-z}{2}=\frac{\sin\frac{z''-z}{2}}{\cos\frac{z''-z}{2}}=\frac{2.\sin\frac{z''-z}{2}\cdot\cos\frac{z''+z}{2}}{2.\cos\frac{z''-z}{2}\cdot\cos\frac{z''+z}{2}}=\frac{\sin z''-\sin z}{\cos z''+\cos z}$$

Слѣдовательно

$$(118)\qquad \frac{\theta'}{a^{\frac{3}{2}}}=z''-z-(\sin z''-\sin z)$$

Это и есть уравненіе Эйлера, о которомъ мы выше говорили.

Если прибавимъ къ этому уравненію показанныя выше выраженія

$$\sin^2\left(\frac{z''}{2}\right)=\frac{r+r''+k}{4a};\qquad \sin^2\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{r+r''-k}{4a}$$

то получимъ три уравненія съ тремя неизвѣстными a, z и z''. Что касается до k, то его по даннымъ r, r'' и f' вычислимъ изъ уравненія

$$k^2=r^2+r''^2-2rr''.\cos 2f'$$

Если z и z'' опредѣлены этимъ путемъ, то извѣстна разность $z''-z$, или, что все равно, разность $E''-E$.

Такъ какъ $p=a(1-e^2)$, то первое изъ уравненій (76) дастъ

$$(119)\qquad \sqrt{p}=\sqrt{\frac{rr''}{a}}\cdot\frac{\sin f'}{\sin\frac{E''-E}{2}}$$

Большая полуось a опредѣлится вмѣстѣ съ величинами z'' и z, а потому это уравненіе можетъ служить для вычисленія p. Зная эту послѣднюю величину, по второму изъ уравненій (116) опредѣлимъ функцію Q. Такимъ образомъ функціи P и Q будутъ вычисляться независимо отъ отношеній η и η'' и въ каждомъ приближеніи будетъ опредѣляться вмѣстѣ съ тѣмъ элементъ e въ зависимости отъ p и a.

Трудность вычисленія по этому способу функцій P и Q заключается въ рѣшеніи системы совокупныхъ трансцендентныхъ уравненій вида

$$(120)\qquad \begin{gathered}\sin^2\left(\frac{z''}{2}\right)=\frac{g}{2a};\qquad \sin^2\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{h}{2a}\\ \frac{\theta'}{a^{\frac{3}{2}}}=z''-z-[\sin z''-\sin z]\end{gathered}$$

При рѣшеніи этихъ уравненій удобнѣе всего давать въ первыхъ двухъ произвольное значеніе величинѣ a и измѣнять ее до тѣхъ поръ, пока вычисленныя при помощи нѣкотораго значенія a величины z и z'' удовлетворятъ вмѣстѣ съ этою величиною a послѣднему уравненію. Такое въ сущности не сложное вычисленіе можетъ быть еще упрощено при помощи таблицы, изъ которой по аргументу x находилась бы разность

$x - \sin x$. Изъ этой таблицы для данныхъ значеній z и z'' можно будетъ прямо брать разности $z - \sin z$ и $z'' - \sin z''$.

Чтобы упростить рѣшеніе предыдущихъ уравненій, можно указать способъ приближеннаго опредѣленія большой полуоси a.

Пусть

$$\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = x$$

тогда

$$\sin\left(\frac{z}{2}\right) = \sqrt{x}; \qquad \cos\left(\frac{z}{2}\right) = \sqrt{1-x}; \qquad \sin z = 2\sqrt{x}.\sqrt{1-x}$$

Кромѣ того

$$z = 2\, arc\,(\sin = \sqrt{x})$$

Слѣдовательно

$$z - \sin z = 2\, arc\,(\sin = \sqrt{x}) - 2\sqrt{x}\,.\sqrt{1-x}$$

откуда

$$\frac{d\,(z - \sin z)}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{x - x^2}}$$

поэтому

$$z - \sin z = 2\int \frac{x\,.\,dx}{\sqrt{x - x^2}} \qquad (121)$$

Такъ какъ мы приняли

$$\sin^2\left(\frac{z''}{2}\right) = \frac{r + r'' + k}{4a}; \qquad \sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{r + r'' - k}{4a}.$$

то разность

$$z'' - z - (\sin z'' - \sin z)$$

можно разсматривать какъ интегралъ вида (121), взятый между предѣлами $\frac{r + r'' - k}{4a}$ и $\frac{r + r'' + k}{4a}$. И такъ уравненіе Эйлера можно представить въ формѣ

$$\theta' = 2a^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{r + r'' - k}{4a}}^{\frac{r + r'' + k}{4a}} \frac{x\,.\,dx}{\sqrt{x - x^2}}$$

Если положимъ здѣсь $y = 2ax$, то найдемъ

$$\theta'.\sqrt{2}=\int\limits_{\frac{r+r''-k}{2}}^{\frac{r+r''+k}{2}} Y.dy$$

гдѣ для краткости положено

$$Y=\sqrt{\frac{2ay}{2a-y}}$$

Допустимъ, что, выполнивъ показанное интегрированіе, мы нашли

$$\int Y.dy=f(y)$$

если подвергнемъ этотъ интегралъ вліянію выше указанныхъ предѣловъ, по получимъ величину $\theta'.\sqrt{2}$. И такъ

$$\theta'\sqrt{2}=f\left(\frac{r+r''+k}{2}\right)-f\left(\frac{r+r''-k}{2}\right)$$

Очевидно, что вторая часть этого выраженія есть функція отъ $\frac{r+r''}{2}$ и отъ $\frac{k}{2}$. Если положимъ для краткости $\frac{r+r''}{2}=\rho$, то

$$f\left(\frac{r+r''+k}{2}\right)=f(\rho)+\frac{k}{2}\frac{df(\rho)}{d\rho}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2}{1.2}\frac{d^2f(\rho)}{d\rho^2}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^3}{1.2.3}\frac{d^3f(\rho)}{d\rho^3}+\ldots\ldots$$

$$f\left(\frac{r+r''-k}{2}\right)=f(\rho)-\frac{k}{2}\frac{df(\rho)}{d\rho}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2}{1.2}\frac{d^2f(\rho)}{d\rho^2}-\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^3}{1.2.3}\frac{d^3f(\rho)}{d\rho^3}+\ldots\ldots$$

поэтому

$$\theta'\sqrt{2}=2\left[\frac{k}{2}\frac{df(\rho)}{d\rho}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^3}{1.2.3}\frac{d^3f(\rho)}{d\rho^3}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5}\frac{d^5f(\rho)}{d\rho^5}+\ldots\ldots\right]$$

Но

$$\frac{df(y)}{dy}=Y$$

и такъ какъ $f(\rho)$ можемъ разсматривать какъ такую функцію, въ которую обращается $f(y)$ при $k=0$, то подъ производными

$$\frac{d^3f(\rho)}{d\rho^3};\qquad \frac{d^5f(\rho)}{d\rho^5}\quad \text{и т. д.}$$

Слѣдуетъ разумѣть производныя

$$\frac{d^2Y}{d\rho^2};\qquad \frac{d^4Y}{d\rho^4}\quad \text{и т. д.}$$

въ которыхъ послѣ дифференцированія принято $k = 0$. И такъ

$$\theta' \sqrt{2} = 2\left[Y \cdot \frac{k}{2} + \frac{d^2Y}{d\rho^2} \cdot \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^3}{2\,.\,3} + \frac{d^4Y}{d\rho^4}\,\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \cdots\cdot\right]$$

Если назовемъ чрезъ ξ величину Y, въ которой принято $k = 0$, то должны будемъ считать

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{r + r''} - \frac{1}{2a}}}$$

и тогда

$$\theta' \sqrt{2} = 2\left[\xi \cdot \frac{k}{2} + \frac{d^2\xi}{d\rho^2}\,\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^3}{2\,.\,3} + \frac{d^4\xi}{d\rho^4}\,\frac{\left(\frac{k}{5}\right)^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \cdots\cdot\right]$$

Если вообще

$$Y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{2a}}}$$

то

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{3}{4}\,\frac{Y^5}{y^4} - \frac{Y^3}{y^3}$$

или

$$\frac{d^2\xi}{d\rho^2} = \frac{3}{4}\,\frac{\xi^5}{\rho^4} - \frac{\xi^3}{\rho^3}$$

ограничиваясь въ предыдущемъ выраженіи величинами четвертаго порядка относительно k, получимъ

$$\theta' \sqrt{2} = 2\left[\xi \cdot \frac{k}{2} + \frac{1}{\left(\frac{r + r''}{2}\right)^4}\,\frac{\xi^5 . k^3}{64} - \frac{1}{\left(\frac{r + r''}{2}\right)^3}\,\frac{\xi^3 . k^3}{48}\right]$$

откуда

$$\xi = \frac{\theta'}{k}\sqrt{2} + \frac{1}{\left(\frac{r + r''}{2}\right)^3}\,\frac{k^2 . \xi^3}{24} - \frac{1}{\left(\frac{r + r''}{2}\right)^4}\,\frac{k^2 . \xi^5}{32}$$

Если примемъ въ первомъ приближеніи

$$\xi = \frac{\theta'}{k}\sqrt{2} \tag{122}$$

то болѣе точная величина ξ опредѣлится по выраженіе

$$\xi = \frac{\theta'}{k}\sqrt{2} + \frac{\theta'^3}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3}\frac{2^{\frac{3}{2}}}{24.k} - \frac{\theta'^5}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^4}\frac{2^{\frac{5}{2}}}{32.k^3}$$

или

(122$_*$)
$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{k}\left[\theta' + \frac{1}{12}\frac{\theta'^3}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3} - \frac{1}{8k^2}\frac{\theta'^5}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^4}\right]$$

Если ξ такимъ образомъ вычислено, то искомая величина a опредѣлится изъ уравненія

(123)
$$\frac{1}{2a} = \frac{2}{r+r''} - \frac{1}{\xi^2}$$

Впрочемъ для той цѣли, которую мы имѣемъ въ виду, достаточно опредѣлить ξ по выраженію (122).

13. Если хотимъ въ послѣдовательныхъ приближеніяхъ опредѣлять функціи P и Q по формамъ (69) и (72), то для вычисленія η и η'' вмѣсто кубическаго уравненія удобно пользоваться, по указанію П. А. Гансена, непрерывными дробями.

Кубическое уравненіе (87), изъ котораго опредѣляется отношеніе η, можетъ быть легко представлено въ видѣ

$$\eta(\eta^2 - h) = \frac{h}{9} + \eta^2$$

Вычитая изъ обѣихъ частей этого уравненія по $\eta^2 - h$, находимъ

$$\eta(\eta^2 - h) - (\eta^2 - h) = \frac{10}{9}h$$

или

$$\eta = 1 + \frac{\frac{10}{9}h}{\eta^2 - h}$$

Принимая въ первомъ приближеніи

$$\eta = 1 + \frac{10}{9}h$$

представимъ предыдущее въ формѣ

$$\eta = 1 + \frac{\frac{10}{9}h}{\left(1 + \frac{10}{9}h\right)^2 - h}$$

или

$$\eta = 1 + \frac{\frac{10}{9}h}{1 + \frac{11}{9}h + \frac{100}{81}h^2}$$

ограничиваясь третьею степенью h, находимъ отсюда

$$\eta = 1 + \frac{10}{9} h - \frac{110}{81} h^2 - \frac{100}{81} h^3$$

Пусть

$$h = \lambda + \frac{11}{9} \lambda^2 \tag{124}$$

тогда

$$\eta = 1 + \frac{10}{9} \lambda - \frac{2422}{729} \lambda^3 - \text{ и т. д.}$$

Но мы вмѣсто этого примемъ

$$\eta = 1 + \frac{10}{9} \lambda \tag{125}$$

изъ выраженія же (124) имѣемъ

$$\lambda = \frac{h}{1 + \frac{11}{9} \lambda} \qquad \text{или} \qquad \lambda = \cfrac{h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9} h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9} h}{1 + \text{ и т. д.}}}}$$

Вносн эту величину въ уравненіе (125), получимъ

$$\eta = 1 + \cfrac{\frac{10}{9} h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9} h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9} h}{1 + \text{ и т. д.}}}} \tag{126}$$

Этой непрерывной дробью Гансенъ и предлагаетъ пользоваться для вычисленія η.

Опредѣленіе отношеній η, η'' необходимо для вычисленія функцій P и Q по формамъ (69) и (72) въ послѣдовательныхъ приближеніяхъ. Вообще говоря, эти приближенія сходятся достаточно быстро въ тѣхъ случаяхъ, когда наблюденія, лежащія въ основаніи всего вычисленія, отдѣлены между собою небольшими промежутками времени; но при такомъ выборѣ наблюденій нерѣдко получается система элементовъ не представляющая съ достаточною точностію наблюденій даже близкихъ къ выбраннымъ тремъ. Принимая это во вниманіе, слѣдуетъ пользоваться системой элементовъ, вычисленной по близкимъ одно къ другому тремъ наблюденіямъ, для опредѣленія системы болѣе точной. Этой послѣдней цѣли удобно достигнуть слѣдующимъ путемъ. Прежде всего, по приближенно извѣстнымъ элементамъ, вычислимъ для выбранныхъ вновь трехъ наблюдаемыхъ положеній свѣтила, радіусы векторы r, r', r'' и истинныя аномаліи v, v', v''. Для этого посредствомъ извѣстнаго уравненія

$$M = M_0 + \mu (t - T)$$

найдемъ среднюю аномалію свѣтила, соотвѣтствующую каждому изъ вновь выбранныхъ трехъ наблюденій; затѣмъ изъ уравненія

$$M = E - e \,.\, \sin E$$

найдемъ эксцентрическія аномаліи, соотвѣтствующія полученнымъ выше среднимъ, а уравненіе

$$\operatorname{tang} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \frac{E}{2}$$

дастъ возможность вычислить для трехъ наблюденій истинныя аномаліи v, v' и v''. Имѣя это и помня, что $p = a(1-e^2)$, найдемъ изъ уравненія

$$r = \frac{p}{1 + e \,.\, \cos v}$$

радіусы векторы свѣтила соотвѣтствующіе временамъ выбранныхъ трехъ наблюденій. Такъ какъ $v'' - v' = 2f$, $v' - v = 2f''$ и $v'' - v = 2f'$, то выполнивъ вычисленіе въ указанномъ порядкѣ, будемъ имѣть всѣ необходимыя данныя для вычисленія функцій P и Q по формамъ (116). Найденныя такимъ образомъ величины P и Q должны служить основаніемъ первой гипотезы при вычисленіи орбиты по отдаленнымъ одно отъ другаго тремъ наблюденіямъ. И такъ если извѣстна приближенная система элементовъ, то формы (116) замѣняютъ собою выраженія $P = \frac{\theta''}{\theta}$ и $Q = \theta \,.\, \theta''$, которыми мы пользуемся обыкновенно въ первой гипотезѣ, не зная совсѣмъ элементовъ орбиты.

Если при помощи величинъ функцій P и Q по способу изложенному въ n⁰ 4 и n⁰ 5 будутъ вычислены r, r'', f, f' и f'', то опредѣленіе функцій P и Q, лежащихъ въ основаніи второй гипотезы, весьма удобно сдѣлать по способу изложенному въ n⁰ 12, ибо при наблюденіяхъ отдѣленныхъ значительными промежутками времени какъ разность $z'' - z$, такъ и f, f', f'' бываютъ достаточно велики, а потому тогда нѣтъ основанія опасатся неточности вычисленія функцій P и Q по формамъ (116) въ зависимости отъ выраженія (119).

Замѣтимъ наконецъ, что какъ скоро величины функцій P и Q въ трехъ послѣдовательныхъ приближеніяхъ найдены, то точныя ихъ значенія легко могутъ быть опредѣлены посредствомъ того или другаго интерполяціоннаго пріема. Предположимъ, что значенія функцій P и Q, принятыя первоначально, суть P_0 и Q_0. При вычисленіи совершенно неизвѣстной орбиты $P_0 = \frac{\theta''}{\theta}$; $Q_0 = \theta\theta''$. Пусть величины P и Q лежащія въ основаніи второй, третей и четвертой гипотезъ будутъ P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3. Положимъ

$$x_0 = \log P_0; \qquad x_1 = \log P_1; \qquad x_2 = \log P_2; \qquad x_3 = \log P_3$$

$$y_0 = \log Q_0; \qquad y_1 = \log Q_1; \qquad y_2 = \log Q_2; \qquad y_3 = \log Q_3$$

Означимъ искомыя истинныя значенія разсматриваемыхъ функцій чрезъ P и Q и положимъ

$$x = \log P; \qquad y = \log Q$$

Мы можемъ считать

$$x_0 = x + \Delta x; \qquad y_0 = y + \Delta y$$

Если разсмотримъ двѣ послѣдовательно найденныя величины $\log P_0$ и $\log P_1$, то разность между ними будетъ тѣмъ менѣе, чѣмъ ближе къ истиннымъ приняты начальныя $\log P_0$ и $\log Q_0$, такъ что

$$x_1 - x_0 = f(x_0, y_0); \qquad y_1 - y_0 = F(x_0, y_0)$$

Очевидно, что функціи f и F имѣютъ то свойство, что обращаются въ нули для $x_0 = x$ и $y_0 = y$, ибо начиная вычисленіе посредствомъ вѣрныхъ величинъ x и y, мы опять придемъ къ нимъ же. И такъ $f(x, y) = 0$; $F(x, y) = 0$. Два предыдущія уравненія можно представить въ видѣ

$$x_1 - x_0 = f(x + \Delta x; y + \Delta y); \qquad y_1 - y_0 = F(x + \Delta x; y + \Delta y)$$

или разлагая это по строкѣ Тейлора, имѣемъ

$$x_1 - x_0 = f(x, y) + A.\Delta x + B.\Delta y$$
$$y_1 - y_0 = F(x, y) + A'.\Delta x + B'.\Delta y$$

Но такъ какъ $f(x, y) = 0$; $F(x, y) = 0$, то

$$x_1 - x_0 = A\ \Delta x + B.\Delta y; \qquad y_1 - y_0 = A'.\Delta x + B'.\Delta y$$

или

$$x_1 - x_0 = A(x_0 - x) + B(y_0 - y)$$
$$y_1 - y_0 = A'(x_0 - x) + B'(y_0 - y)$$

Подобнымъ же образомъ составимъ

$$x_2 - x_1 = A(x_1 - x) + B(y_1 - y)$$
$$x_3 - x_2 = A(x_2 - x) + B(y_2 - y)$$
$$y_2 - y_1 = A'(x_1 - x) + B'(y_1 - y)$$
$$y_3 - y_2 = A'(x_2 - x) + B'(y_2 - y)$$

Эти шесть уравненій содержатъ шесть неизвѣстныхъ величинъ A, B, A', B', x и y. Исключая изъ нихъ неизвѣстныя A, B, A', B' и полагая

$$x_1 - x_0 = a; \qquad y_1 - y_0 = b$$
$$x_2 - x_1 = a'; \qquad y_2 - y_1 = b'$$
$$x_3 - x_2 = a''; \qquad y_3 - y_2 = b''$$

легко находимъ

$$x = \frac{x_0(a'b'' - a''b') + x_1(a''b - ab'') + x_2(ab' - a'b)}{(a'b'' - a''b') + (a''b - ab'') + (ab' - a'b)}$$
$$y = \frac{y_0(a'b'' - a''b') + y_1(a''b - ab'') + y_2(ab' - a'b)}{(a'b'' - a''b') + (a''b - ab'') + (ab' - a'b)} \qquad (127)$$

Понятно, что отъ примѣненія этихъ выраженій на практикѣ только тогда можно ожидать удовлетворительнаго результата, когда разности между послѣдовательными значеніями P и Q, принятыми въ трехъ гипотезахъ, уже не велики и когда при разложеніи по строкѣ Тейлора можно ограничиться первыми степенями этихъ разностей.

14. Если не имѣемъ въ виду вычислять отношеній η и опредѣляемъ функціи P и Q по формамъ (116), то вычисленіе элементовъ орбиты весьма просто можетъ быть выполнено въ зависимости отъ вычисленія геліоцентрическихъ координатъ свѣтила, соотвѣтствующихъ двумъ крайнимъ наблюдаемымъ положеніямъ. Предположимъ, что за плоскость xy принята плоскость эклиптики, пусть начало координатъ находится въ центрѣ Солнца, ось x пусть будетъ направлена въ точку весенняго равнодѣствія, ось y пусть будетъ къ ней перпендикулярна. Назовемъ чрезъ x, y, z координаты свѣтила, соотвѣтствующія времени перваго наблюденія и отнесенныя къ такой системѣ осей. Геоцентрическія координаты свѣтила, т. е. координаты отнесенныя къ системѣ параллельныхъ осей, имѣющихъ начало въ центрѣ земли пусть будутъ ξ, η, ζ. Наконецъ координаты земли относительно центра Солнца пусть будутъ X, Y. Такъ какъ за плоскость xy принята эклиптика, то понятно, что для земли третья координата Z будетъ равна нулю. Между упомянутыми координатами, какъ извѣстно, существуетъ соотношеніе

$$x = \xi + X; \qquad y = \eta + Y; \qquad z = \zeta$$

Назовемъ геліоцентрическую широту, долготу и радіусъ векторъ свѣтила чрезъ b, l и r; соотвѣтствующія геоцентрическія координаты пусть будутъ β, α и Δ. Долгота земли и ея разстояніе отъ Солнца пусть будутъ L и R, тогда

$$r . \cos b . \cos l = \Delta . \cos\beta . \cos\alpha + R . \cos L$$
$$r . \cos b . \sin l = \Delta . \cos\beta . \sin\alpha + R . \sin L$$
$$r . \sin b = \Delta . \sin\beta$$

Если назовемъ чрезъ ρ разстояніе свѣтила отъ земли, проложенное на эклиптику, то $\rho = \Delta . \cos\beta$. Вводя это въ предыдущія уравненія, дадимъ имъ видъ

$$r . \cos b . \cos l = \rho . \cos\alpha + R . \cos L$$
$$r . \cos b . \sin l = \rho . \sin\alpha + R . \sin L$$
$$r . \sin b = \rho . \operatorname{tang}\beta$$

Помножимъ первое изъ этихъ уравненій на $\sin\frac{\alpha + L}{2}$, второе на $\cos\frac{\alpha + L}{2}$ и вычтемъ первое произведеніе изъ втораго, тогда получимъ

$$r . \cos b . \sin\left[l - \frac{\alpha + L}{2}\right] = (\rho - R) \sin\left(\frac{\alpha - L}{2}\right)$$

Подобнымъ же образомъ, умноживъ первое изъ начальныхъ уравненій на $\cos\frac{\alpha + L}{2}$,

сложивъ его со вторымъ умноженнымъ на $\sin\frac{\alpha+L}{2}$, тогда найдемъ

$$r.\cos b.\cos\left[l-\frac{\alpha+L}{2}\right]=(\rho+R)\cos\left(\frac{\alpha-L}{2}\right)$$

Такимъ образомъ для вычисленія геліоцентрическихъ координатъ свѣтила по даннымъ геоцентрическимъ будемъ имѣть три уравненія вида

$$r.\cos b.\sin\left[l-\frac{\alpha+L}{2}\right]=(\rho-R)\sin\frac{\alpha-L}{2}$$

$$r.\cos b.\cos\left[l-\frac{\alpha+L}{2}\right]=(\rho+R)\cos\frac{\alpha-L}{2} \qquad (128)$$

$$r.\sin b=\rho.\operatorname{tang}\beta$$

Если эти выраженія соотвѣтствуютъ времени перваго наблюденія, то для времени третьяго наблюденія подобно этому будемъ имѣть

$$r''.\cos b''.\sin\left[l''-\frac{\alpha''+L''}{2}\right]=(\rho''-R'')\sin\frac{\alpha''-L''}{2}$$

$$r''.\cos b''.\cos\left[l''-\frac{\alpha''+L''}{2}\right]=(\rho''+R'').\cos\frac{\alpha''-L''}{2} \qquad (128_*)$$

$$r''.\sin b''=\rho''.\operatorname{tang}\beta''$$

Имѣя геліоцентрическія широты и долготы свѣтила, не трудно опредѣлить наклоненіе орбиты къ эклиптикѣ и долготу восходящаго узла орбиты.

Пусть EQ (фиг. 6) представляетъ сѣченіе сферы небесной плоскостію эклиптики, OO' сѣченіе той же сферы плоскостію орбиты разсматриваемаго свѣтила. Слѣдовательно въ точкѣ A будетъ находиться узелъ орбиты на эклиптикѣ. Пусть въ P будетъ мѣсто разсматриваемаго свѣтила во время одного изъ наблюденій; дуга AP представитъ собою аргументъ широты свѣтила во время одного изъ наблюденій. Проведемъ чрезъ P большой кругъ перпендикулярный къ эклиптикѣ, дуга Pp этого круга будетъ геліоцентрическою широтою этого свѣтила и дуга Ap будетъ равняться разности геліоцентрической долготы свѣтила и долготы восходящаго узла орбиты. Если означимъ эту послѣднюю чрезъ θ, то $Ap=l-\theta$. Предположимъ, что въ ν на эклиптикѣ находится точка весенняго равноденствія; отложимъ по орбитѣ отъ A дугу $A\nu'$ равную дугѣ $A\nu$, тогда дуга $P\nu'$ представитъ собою, такъ называемую, долготу свѣтила въ орбитѣ. Если назовемъ эту послѣднюю чрезъ λ, то понятно, что $AP=\lambda-\theta$. Назвавъ какъ прежде наклоненіе орбиты къ эклиптикѣ чрезъ i и замѣтивъ, что въ треугольникѣ APp уголъ $PAp=i$, имѣемъ

$$\sin(\lambda-\theta).\sin i=b$$

$$\sin(\lambda-\theta).\cos i=\sin(l-\theta).\cos b \qquad (129)$$

$$\cos(\lambda-\theta)=\cos(l-\theta).\cos b$$

Предположимъ, что величины координатъ, входящія въ эти уравненія, соотвѣтствуютъ

времени перваго наблюденія и что для времени третьяго наблюденія имѣемъ

$$\sin(\lambda''-\theta).\sin i=\sin b''$$
$$\sin(\lambda''-\theta).\cos i=\sin(l''-\theta).\cos b''$$
$$\cos(\lambda''-\theta)=\cos(l''-\theta).\cos b''$$

Раздѣливъ въ обѣихъ группахъ первое уравненіе на второе, получимъ

$$\tag{130}\begin{gathered}\operatorname{tang} i.\sin(l-\theta)=\operatorname{tang} b\\ \operatorname{tang} i.\sin(l''-\theta)=\operatorname{tang} b''\end{gathered}$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на $\cos(l''-l)$ и придавъ къ обѣимъ частямъ по $\sin(l''-l).\cos(l-\theta).\operatorname{tang} i$, найдемъ

$$\operatorname{tang} i.\sin(l''-\theta)=\operatorname{tang} b.\cos(l''-l)+\sin(l''-l).\cos(l-\theta).\operatorname{tang} i$$

или

$$\operatorname{tang} b''=\operatorname{tang} b.\cos(l''-l)+\sin(l''-l).\cos(l-\theta).\operatorname{tang} i$$

откуда

$$\tag{131}\operatorname{tang} i.\cos(l-\theta)=\frac{\operatorname{tang} b''-\operatorname{tang} b.\cos(l''-l)}{\sin(l''-l)}$$

прибавляя къ этому первое изъ уравненій (120), получимъ два необходимыя и достаточныя уравненія для опредѣленія элементовъ i и θ.

Раздѣливъ второе изъ уравненій (129) на третье, получимъ

$$\tag{132}\operatorname{tang}(\lambda-\theta)=\frac{\operatorname{tang}(l-\theta)}{\cos i}$$

точно также для времени третьяго наблюденія

$$\tag{132$_*$}\operatorname{tang}(\lambda''-\theta)=\frac{\operatorname{tang}(l''-\theta)}{\cos i}$$

Если въ послѣдовательныхъ приближеніяхъ вычисляемъ функціи P и Q по формамъ (116), то вмѣстѣ съ тѣмъ находимъ во всякомъ приближеніи величины p и a; первую изъ нихъ по выраженію (119); но такъ какъ $p=a(1-e^2)$, то въ каждомъ приближеніи можетъ быть вычисленъ и элементъ e. Впрочемъ его болѣе удобно опредѣлить вмѣстѣ съ долготою перигелія на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Если назовемъ, какъ прежде, чрезъ u и ω аргументъ широты свѣтила и разстояніе перигелія отъ узла, то истинная аномалія $v=u-\omega$; слѣдовательно

$$r=\frac{p}{1+e\cos(u-\omega)}$$

откуда

$$e.\cos(u-\omega)=\frac{p}{r}-1$$

Подобнымъ же образомъ для третьяго наблюденія имѣемъ

$$e.\cos(u''-\omega)=\frac{p}{r''}-1$$

Сначала складывая, а потомъ вычитая эти уравненія, находимъ

$$e.\cos\frac{u''-u}{2}\cos\left[\omega-\frac{u''+u}{2}\right]=\frac{p(r+r'')}{2rr''}-1$$

$$e.\sin\frac{u''-u}{2}\sin\left[\omega-\frac{u''+u}{2}\right]=\frac{p(r-r'')}{2rr''}$$

откуда

$$e.\cos\left[\omega-\frac{u''+u}{2}\right]=\frac{p(r+r'')}{2rr''.\cos\frac{u''-u}{2}}-\sec\frac{u''-u}{2}$$

$$e.\sin\left[\omega-\frac{u''+u}{2}\right]=\frac{p(r-r'')}{2rr''.\sin\frac{u''-u}{2}}. \tag{133}$$

Такъ какъ $u=\lambda-\theta$; $u''=\lambda''-\theta$, то эти величины вычисляются по выраженіямъ (132) и (132_*), а потому послѣднія уравненія вполнѣ могутъ служить для вычисленія e и ω.

Замѣтимъ еще, что если въ послѣдовательныхъ приближеніяхъ вычисляются по методѣ Гаусса величины отношеній η, η', η'', то p можетъ быть вычислено по выраженію (97).

Если извѣстно ω, разстояніе перигелія отъ узла и извѣстны аргументы широты u, u', u'', соотвѣтствующіе временамъ трехъ наблюденій, то по выраженіямъ

$$v=u-\omega,\qquad v'=u'-\omega,\qquad v''=u''-\omega$$

найдутся истинныя аномаліи соотвѣтствующія тѣмъ же временамъ, а посредствомъ этихъ аномалій изъ выраженій

$$\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{v}{2};\quad \operatorname{tang}\frac{\varepsilon'}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{v'}{2};\quad \operatorname{tang}\frac{\varepsilon''}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{v''}{2}$$

опредѣлятся эксцентрическія аномаліи, при помощи которыхъ изъ уравненій

$$M=E-e.\sin E;\qquad M'=E'-e.\sin E';\qquad M''=E''-e.\sin E''$$

найдутся среднія аномаліи для временъ трехъ наблюденій.

Такъ какъ элементъ e и величина p извѣстны, то извѣстна также и большая полуось a орбиты, ибо $p=a(1-e^2)$. Зная a можемъ вычислить среднее суточное движеніе свѣтила по извѣстному выраженію

$$\mu=\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

Что касается до средней аномаліи эпохи, то она должна быть вычислена по выраженіямъ указаннымъ въ концѣ n° 8.

Этотъ пріемъ вычисленія элементовъ орбиты по даннымъ разстояніямъ свѣтила отъ земли нѣсколько проще соотвѣтствующаго пріема указаннаго К. Ф. Гауссомъ.

IV.

Опредѣленіе орбиты свѣтила по четыремъ его наблюдаемымъ положеніямъ.

15. Вычисленіе орбиты по тремъ наблюдаемымъ положеніямъ главнымъ образомъ зависитъ отъ рѣшенія уравненія (42), или уравненія (46). Коэффиціенты этого уравненія, какъ мы видѣли, могутъ быть представлены функціями величинъ J и K, т. е. наклоненія къ эклиптикѣ большаго круга, проведеннаго черезъ два крайнія геоцентрическія положенія свѣтила и долготы узла этого круга на эклиптикѣ. Величины J и K вычисляются по выраженіямъ (106). Если наклоненіе орбиты свѣтила къ эклиптикѣ по величинѣ близко къ нулю, то геоцентрическія широты β, β', β'' также будутъ малы и опредѣленіе K будетъ зависѣть отъ выраженія, числовая величина котораго приближается $\frac{0}{0}$. При такомъ условіи малыя погрѣшности наблюденій будутъ значительно вліять на опредѣленіе величинъ K и J и само вычисленіе орбиты сдѣлается неточнымъ. Для устраненія этого неудобства вмѣсто трехъ наблюдаемыхъ положеній свѣтила, слѣдуетъ пользоваться для вычисленія системы элементовъ координатами четырехъ геоцентрическихъ положеній.

Если геоцентрическія долготы свѣтила во время перваго и третьяго наблюденія близки къ равенству между собою, что будетъ имѣть мѣсто тогда, когда между первымъ и третьимъ наблюденіемъ планета имѣла стояніе и за тѣмъ приняла обратное геоцентрическое движеніе, то при такихъ условіяхъ α'' будетъ мало отличаться отъ α и знаменатель втораго изъ выраженій (97) будетъ близокъ къ нулю. Въ этомъ случаѣ погрѣшности наблюденій также будутъ имѣть большое вліяніе на опредѣленіе величинъ J и K, а вмѣстѣ съ тѣмъ и на самое вычисленіе орбиты. Для устраненія неточности тогда также придется пользоваться координатами четырехъ наблюдаемыхъ положеній свѣтила.

Посмотримъ на какихъ соображеніяхъ основывается опредѣленіе орбиты свѣтила по четыремъ наблюденіямъ.

Для вычисленія шести элементовъ орбиты необходимо и достаточно знаніе шести координатъ, но четыре положенія опредѣляются по восьми координатамъ, такимъ образомъ, если бы мы стали пользоваться всѣми данными восемью координатами, то имѣли бы восемь уравненій для опредѣленія шести неизвѣстныхъ величинъ и вопросъ сдѣлался бы условнымъ, для избѣжанія этого мы примемъ въ основаніе вычисленія

орбиты изъ четырехъ только два полныхъ наблюденія, изъ двухъ же другихъ возьмемъ однѣ долготы, а широты двухъ крайнихъ положеній совсѣмъ не введемъ въ вычисленіе

Предположимъ, что плоскость xy расположена въ плоскости эклиптики; начало координатъ пусть находится въ центрѣ Солнца, ось x пусть будетъ направлена по пересѣченію плоскости орбиты съ плоскостію эклиптики, ось z пусть будетъ перпендикулярна къ плоскости эклиптики. Означимъ чрезъ x_1, y_1, z_1 координаты свѣтила относительно такой системы осей. Пусть r, u, i будутъ радіусъ векторъ свѣтила, его аргументъ широты и наклоненіе орбиты къ эклиптикѣ, тогда понятно, что

$$\begin{aligned} x_1 &= r \,.\, \cos u \\ y_1 &= r \,.\, \sin u \,.\, \cos i \\ z_1 &= r \,.\, \sin u \,.\, \sin i \end{aligned} \tag{134}$$

Повернемъ систему осей координатъ около оси z на уголъ долготы восходящаго узла орбиты такимъ образомъ, чтобы ось x совпала съ линіей пересѣченія эклиптики и экватора. Если означимъ координаты свѣтила относительно новаго положенія осей чрезъ x, y, z, то понятно, что

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\ y &= x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \\ z &= z_1 \end{aligned}$$

Слѣдовательно

$$\begin{aligned} x &= r \,.\, \cos u \,.\, \cos \theta - r \,.\, \sin u \,.\, \cos i \,.\, \sin \theta \\ y &= r \,.\, \cos u \,.\, \sin \theta + r \,.\, \sin u \,.\, \cos i \,.\, \cos \theta \\ z &= r \,.\, \sin u \,.\, \sin i \end{aligned} \tag{135}$$

Если v есть истинная аномалія и ω разстояніе перигелія отъ узла, то $u = \omega + v$. Положимъ

$$\begin{aligned} \cos \omega \,.\, \cos \theta - \sin \omega \,.\, \sin \theta \,.\, \cos i &= a \,.\, \sin A \\ -\sin \omega \,.\, \cos \theta - \cos \omega \,.\, \sin \theta \,.\, \cos i &= a \,.\, \cos A \\ \cos \omega \,.\, \sin \theta + \sin \omega \,.\, \cos i \,.\, \cos \theta &= b \,.\, \sin B \\ \cos \omega \,.\, \cos \theta \,.\, \cos i - \sin \omega \,.\, \sin \theta &= b \,.\, \cos B \\ \cos \omega \,.\, \sin i &= c \,.\, \cos C \\ -\sin \omega \,.\, \sin i &= c \,.\, \sin C \end{aligned} \tag{136}$$

Тогда предыдущія выраженія координатъ примутъ видъ

$$x = a \,.\, r \,.\, \sin (A + v); \quad y = b \,.\, r \,.\, \sin (B + v); \quad z = c \,.\, r \,.\, \sin (C + v) \tag{137}$$

Такъ какъ a, A, b, B и т. д. зависятъ только отъ элементовъ орбиты, то для данной орбиты эти величины будутъ постоянныя, поэтому если означимъ чрезъ x', y', z' координаты свѣтила соотвѣтствующія времени втораго наблюденія, то будемъ имѣть

$$x' = a \,.\, r' \,.\, \sin (A + v'); \qquad y' = b \,.\, r' \,.\, \sin (B + v'); \qquad z' = c \,.\, r' \,.\, \sin (C + v')$$

Точно также для времени третьяго наблюденія имѣемъ

$$x'' = a.r''.\sin(A+v''); \qquad y'' = b.r''.\sin(B+v''); \qquad z'' = c.r''.\sin(C+v'')$$

и т. д.

Имѣя это, положимъ въ тождественномъ уравненіи (35)

$$\alpha = A + v; \qquad \beta = A + v'; \qquad \gamma = A + v''$$

тогда

$$\gamma - \beta = v'' - v'; \qquad \alpha - \gamma = v - v''; \qquad \beta - \alpha = v' - v$$

при такихъ положеніяхъ упомянутое тождественное уравненіе приметъ видъ

$$\sin(A+v)\sin(v''-v') - \sin(A+v')\sin(v''-v) + \sin(A+v'')\sin(v'-v) = 0$$

Помноживъ это уравненіе на $a.rr'r''$ и замѣтивъ, что по принятому означенію $r'r''.\sin(v''-v') = n$; $rr''.\sin(v''-v) = n'$; $rr'.\sin(v'-v) = n''$, найдемъ

$$n.x - n'.x' + n''.x'' = 0$$

Полагая въ томъ же тождественномъ уравненіи

$$\alpha = B + v; \qquad \beta = B + v' \qquad \gamma = B + v''$$

получимъ

$$\sin(B+v)\sin(v''-v') - \sin(B+v')\sin(v''-v) + \sin(B+v'')\sin(v'-v) = 0$$

Умноживъ это уравненіе на $b.rr'r''$, найдемъ

$$yn - y'n' + y''n'' = 0$$

Принимая

$$\alpha = A + v'; \qquad \beta = A + v''; \qquad \gamma = A + v'''$$

изъ того же тождественнаго уравненія выводимъ

$$\sin(A+v')\sin(v'''-v'') - \sin(A+v'')\sin(v'''-v') + \sin(A+v''')\sin(v''-v') = 0$$

Помноживъ это уравненіе на $a.r'r''r'''$ и полагая

$$r''r'''.\sin(v'''-v'') = n_0'; \qquad r'r'''.\sin(v'''-v') = n_0''$$

найдемъ

$$n_0'.x' - n_0''.x'' + n.x''' = 0$$

Точно также принимая въ упомянутомъ тождественномъ уравненіи

$$\alpha = B + v'; \qquad \beta = B + v''; \qquad \gamma = B + v'''$$

и умножая полученное уравненіе на $b.r'r''r'''$, найдемъ

$$n_0'.y' - n_0''.y'' + n.y''' = 0$$

16. И такъ мы имѣемъ теперь слѣдующія четыре уравненія

$$
\begin{aligned}
n.x - n'x' + n''x'' &= 0 \\
n.y - n'y' + n''y'' &= 0 \\
n_0'x' - n_0''x'' + n.x''' &= 0 \\
n_0'y' - n_0''y'' + n.y''' &= 0
\end{aligned}
\qquad (188)
$$

для опредѣленія четырехъ разстояній свѣтила отъ земли, но мы будемъ пользоваться ими для опредѣленія отношеній этихъ разстояній. Пусть

$$\frac{n}{n'} = N; \qquad \frac{n''}{n'} = N''; \qquad \frac{n_0'}{n_0''} = N'; \qquad \frac{n}{n_0''} = N'''$$

тогда предыдущія уравненія примутъ видъ

$$
\begin{aligned}
N.x - x' + N''.x'' &= 0 \\
N.y - y' + N''.y'' &= 0 \\
N'.x' - x'' + N'''.x''' &= 0 \\
N'.y' - y'' + N'''.y''' &= 0
\end{aligned}
$$

Означимъ чрезъ ρ проложенное на эклиптику разстояніе свѣтила отъ земли. Пусть R и L представляютъ разстояніе земли отъ Солнца и долготу земли. Пусть наконецъ α и β будутъ геоцентрическая долгота и широта свѣтила. Тогда

$$
\begin{aligned}
x &= \rho.\cos\alpha + R.\cos L \\
y &= \rho.\sin\alpha + R.\sin L \\
z &= \rho.\tang\beta
\end{aligned}
$$

если эти выраженія соотвѣтствуютъ времени перваго наблюденія, то подобныя же формы будутъ имѣть координаты, соотвѣтствующія временамъ трехъ другихъ наблюденій.

Внося эти формы координатъ въ предыдущія основныя уравненія, получимъ

$$
\begin{aligned}
&N(\rho.\cos\alpha + R.\cos L) - (\rho'.\cos\alpha' + R'.\cos L') + N''(\rho''.\cos\alpha'' + R''.\cos L'') = 0 \\
&N(\rho.\sin\alpha + R.\sin L) - (\rho'.\sin\alpha' + R'.\sin L') + N''(\rho''.\sin\alpha'' + R''.\sin L'') = 0 \\
&N'(\rho'.\cos\alpha' + R'.\cos L') - (\rho''.\cos\alpha'' + R''.\cos L'') + N'''(\rho'''.\cos\alpha''' + R'''.\cos L''') = 0 \\
&N'(\rho'.\sin\alpha' + R'.\sin L') - (\rho''.\sin\alpha'' + R''.\sin L'') + N'''(\rho'''.\sin\alpha''' + R'''.\sin L''') = 0
\end{aligned}
$$

Исключимъ изъ первыхъ двухъ уравненій ρ, а изъ послѣднихъ двухъ ρ'''. Для этого умножимъ первое уравненіе на $\sin\alpha$, второе на $\cos\alpha$ и вычтемъ второе произведеніе изъ перваго. Подобнымъ же образомъ умножимъ третье уравненіе на $\sin\alpha'''$, а четвертое на $\cos\alpha'''$ и вычтемъ второе произведеніе изъ перваго. Послѣ всего этого получимъ

$$
\begin{aligned}
N.R.\sin(\alpha - L) &+ [\rho'.\sin(\alpha' - \alpha) + R'.\sin(L' - \alpha)] \\
&- N''[\rho''.\sin(\alpha'' - \alpha) + R''.\sin(L'' - \alpha)] = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N'[\rho'.\sin(\alpha''' - \alpha') + R'.\sin(\alpha''' - L')] &- \rho''.\sin(\alpha''' - \alpha'') \\
&+ R''.\sin(L'' - \alpha''') - N'''.R'''.\sin(L''' - \alpha''') = 0
\end{aligned}
$$

Пусть для краткости

$$(139)\quad \begin{array}{ll} \sin(\alpha'-\alpha).\cos\beta'=A & \sin(\alpha'''-\alpha'').\cos\beta''=C \\ \sin(\alpha''-\alpha).\cos\beta''=B & \sin(\alpha'''-\alpha').\cos\beta'=D \end{array}$$

тогда два предыдущія уравненія примутъ видъ

$$(140)\quad \begin{array}{c} A.\rho'.\sec\beta'-B.N''\rho''.\sec\beta''= \\ NR.\sin(L-\alpha)-R'.\sin(L'-\alpha)+N''R''.\sin(L''-\alpha) \\ D.N'\rho'.\sec\beta'-C\rho''.\sec\beta''= \\ N'R'.\sin(L'-\alpha''')-R''.\sin(L''-\alpha''')+N'''R'''.\sin(L'''-\alpha''') \end{array}$$

Если въ треугольникѣ SPT (фиг. 2) назовемъ уголъ при T чрезъ ψ, то при сдѣланныхъ означеніяхъ будемъ имѣть

$$r^2=\Delta^2+R^2-2R\Delta.\cos\psi$$

гдѣ Δ есть разстояніе свѣтила отъ земли. Что касается до угла ψ, то его можемъ считать извѣстнымъ, ибо названный нами выше чрезъ δ внѣшній уголъ упомянутаго треугольника вычисляется для каждаго положенія свѣтила по уравненіямъ (57); введенный же теперь уголъ $\psi=180^\circ-\delta$. Рѣшая предыдущее уравненіе относительно Δ, имѣемъ

$$\Delta=R.\cos\psi\pm\sqrt{R^2.\cos^2\psi-R^2+r^2}$$

или

$$\rho.\sec\beta=R.\cos\psi\pm\sqrt{r^2-R^2.\sin^2\psi}$$

Подобно этому для втораго и третьяго положенія свѣтила будемъ имѣть

$$\rho'.\sec\beta'=R'.\cos\psi'\pm\sqrt{r'^2-R'^2.\sin^2\psi'}$$

$$\rho''.\sec\beta''=R''.\cos\psi''\pm\sqrt{r''^2-R''^2.\sin^2\psi''}$$

полагая здѣсь

$$(141)\quad \begin{array}{l} x'=\pm\sqrt{r'^2-R'^2.\sin^2\psi'} \\ x''=\pm\sqrt{r''^2-R''^2.\sin^2\psi''} \end{array}$$

внесомъ величины $\rho'.\sec\beta'$ и $\rho''.\sec\beta''$ въ уравненія (140) и тогда получимъ

$$\begin{array}{l} A.x'-B.N''.x''=N.R.\sin(L-\alpha)-R'.\sin(L'-\alpha) \\ \qquad +N''R''.\sin(L''-\alpha)-A.R'.\cos\psi'+N''BR''.\cos\psi'' \\ DN'.x'-C.x''=N'R'.\sin(L'-\alpha''')-R''.\sin(L''-\alpha''') \\ \qquad +N'''R'''.\sin(L'''-\alpha''')-N'DR'.\cos\psi'+CR''.\cos\psi'' \end{array}$$

Пусть

$$\frac{B}{A} = h'; \qquad \frac{D}{C} = h''$$

$$R'.\cos\psi' + \frac{R'}{A}\cdot\sin(L' - \alpha\ ) = a'$$

$$R''.\cos\psi'' - \frac{R''}{C}\cdot\sin(L'' - \alpha''') = a'' \tag{142}$$

$$h'R''.\cos\psi'' + \frac{R''}{A}\cdot\sin(L'' - \alpha\ ) = c'$$

$$h''R'.\cos\psi' - \frac{R'}{C}\cdot\sin(L' - \alpha''') = c''$$

$$\frac{R}{A}\sin(L - \alpha) = d'; \qquad \frac{R'''}{C}\sin(L''' - \alpha''') = -d''$$

при такихъ означеніяхъ два предыдущія уравненія примутъ видъ

$$x' = h'N''.x'' + N.d' - a' + N''.c'$$
$$x'' = h''N'.x' + N'''.d'' - a'' + N'.c'' \tag{143}$$

Такимъ образомъ если можемъ считать величины N, N', N'', N''' извѣстными, или если можемъ замѣнить ихъ такими функціями, которыя было бы удобно вычислять послѣдовательными приближеніями, то предыдущія два уравненія будутъ служить для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ x' и x'', слѣдовательно и для опредѣленія искомыхъ разстояній r' и r''.

17. По уравненіямъ (110)

$$N = \frac{\theta}{\theta'}\left[1 + \frac{\theta''(\theta + \theta')}{6r'^3}\right]; \qquad N'' = \frac{\theta''}{\theta'}\left[1 + \frac{\theta(\theta'' + \theta')}{6r'^3}\right]$$

Представляя рядами подобными рядамъ (107) координаты втораго и четвертаго положенія по координатамъ третьяго положенія и принимая

$$\theta_0' = k(t''' - t''); \qquad \theta_0'' = k(t''' - t')$$

подобно предыдущему легко найдемъ

$$N''' = \frac{\theta}{\theta_0''}\left[1 + \frac{\theta_0'(\theta_0'' + \theta)}{6r''^3}\right]; \qquad N' = \frac{\theta_0'}{\theta_0''}\left[1 + \frac{\theta(\theta_0'' + \theta_0')}{6r''^3}\right]$$

Положимъ

$$P' = \frac{N}{N''}; \qquad Q' = (N + N'' - 1)\,r'^3$$
$$P'' = \frac{N'''}{N'}; \qquad Q'' = (N' + N''' - 1)\,r''^3 \tag{144}$$

Принимая во вниманіе предыдущія выраженія N, N', N'', N''', имѣемъ

$$P' = \frac{\theta}{\theta''}\,\frac{\left[1 + \dfrac{\theta''(\theta + \theta')}{6r'^3}\right]}{\left[1 + \dfrac{\theta(\theta'' + \theta')}{6r'^3}\right]}$$

или ограничиваясь членами второго порядка относительно θ, θ', θ'', отсюда находимъ

$$P' = \frac{\theta}{\theta''}\left[1 + \frac{\theta''(\theta + \theta')}{6r'^3}\right]\left[1 - \frac{\theta(\theta'' + \theta')}{6r'^3}\right]$$

$$= \frac{\theta}{\theta''}\left[1 + \frac{\theta''(\theta + \theta')}{6r'^3} - \frac{\theta(\theta'' + \theta')}{6r'^3}\right]$$

Но такъ какъ $\theta' = \theta + \theta''$, то

(145)
$$P' = \frac{\theta}{\theta''}\left[1 - \frac{\theta^2 - \theta''^2}{6r'^3}\right]$$

подобнымъ же образомъ найдемъ

(146)
$$P'' = \frac{\theta}{\theta_0'}\left[1 - \frac{\theta^2 - \theta_0'^2}{6r''^3}\right]$$

Болѣе простую форму имѣютъ функціи Q' и Q''. Въ самомъ дѣлѣ внося въ ихъ предыдущія выраженія вмѣсто N, N', N'', N''' ихъ показанныя выше формы, легко получимъ

(147)
$$Q' = \frac{\theta\,.\,\theta''}{2}; \qquad Q'' = \frac{\theta\,.\,\theta_0'}{2}$$

Посредствомъ этихъ четырехъ функцій P', P'', Q', Q'', мы замѣнимъ функціи N, N', N'', N''' въ уравненіяхъ (143). Изъ выраженій (144) для этого имѣемъ

(148)
$$N'' = \frac{1}{1 + P'}\left(1 + \frac{Q'}{r'^3}\right); \qquad N = N''.P'$$
$$N' = \frac{1}{1 + P''}\left(1 + \frac{Q''}{r''^3}\right); \qquad N''' = N'.P''$$

Внося эти формы въ уравненія (143), получимъ

(149)
$$x = \frac{\left[1 + \frac{Q'}{r'^3}\right]}{1 + P'}\,[h'.x'' + P'.d' + c'] - a'$$
$$x' = \frac{\left[1 + \frac{Q''}{r''^3}\right]}{1 + P''}\,[h''.x' + P''.d'' + c''] - a''$$

Если прибавимъ къ этому уравненія

(150)
$$r'^3 = [x'^2 + R'^2 \sin^2\psi']^{\frac{3}{2}}; \qquad r''^3 = [x''^2 + R''^2 \sin^2\psi'']^{\frac{3}{2}}$$

то будемъ имѣть четыре уравненія для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ величинъ: x', x'', r', r''. Что касается до величинъ P', P'', Q', Q'', то они въ этомъ случаѣ предполагаются приближенно извѣстными по формамъ (145), (146) и (147). Но такъ какъ въ первомъ приближеніи r' и r'' суть совершенно неизвѣстныя величины, то выбравъ для вычисленія орбиты наблюденія расположенныя такимъ образомъ, чтобы

промежутки времени, отдѣляющіе ихъ, были по возможности между собою равны, примемъ

$$P' = \frac{\theta}{\theta''}; \qquad P'' = \frac{\theta}{\theta_0'} \tag{151}$$

ибо при сказанномъ условіи $\theta = \theta'' = \theta_0'$. Но и при такомъ допущеніи опредѣленіе неизвѣстныхъ изъ уравненій (149), (150) весьма затруднительно; а потому рѣшеніе необходимо выполнять послѣдовательными приближеніями. Положимъ въ уравненіяхъ (149)

$$\begin{aligned} \frac{P'.d'+c'}{1+P'} &= c_0'; \qquad \frac{h'}{1+P'} = f' \\ \frac{P''.d''+c''}{1+P''} &= c_0''; \qquad \frac{h''}{1+P''} = f'' \end{aligned} \tag{152}$$

тогда эти уравненія примутъ видъ

$$\begin{aligned} x' &= \left[1+\frac{Q'}{r'^3}\right][f'.x''+c_0'] - a' \\ x'' &= \left[1+\frac{Q''}{r''^3}\right][f''.x'+c_0''] - a'' \end{aligned} \tag{153}$$

Рѣшая эти уравненія, мы примемъ сначала $Q' = o$ и $Q'' = o$, тогда получимъ

$$x' = f'.x'' + c_0' - a'; \qquad x'' = f''.x' + c_0'' - a''$$

Опредѣляя изъ этихъ двухъ уравненій величины x' и x'', находимъ

$$\begin{aligned} x' &= \frac{c_0' + f'.c_0'' - f'.a'' - a'}{1 - f'.f''} \\ x'' &= \frac{c_0'' + f''.c_0' - f''.a' - a''}{1 - f'.f''} \end{aligned} \tag{154}$$

Имѣя эти приближенныя величины x' и x'', слѣдуетъ вычислить съ ними приближенныя величины r' и r''.

Если означимъ чрезъ z' и z'' тѣ углы, подъ которыми видны съ планеты разстоянія земли отъ Солнца во время втораго и третьяго наблюденія, то извѣстно, что

$$r' = \frac{R'.\sin\delta'}{\sin z'}; \qquad r'' = \frac{R''.\sin\delta''}{\sin z''} \tag{155}$$

гдѣ $\delta' = 180° - \psi'$; $\delta'' = 180° - \psi''$. Внося эти величины r' и r'' въ выраженія (141), получимъ

$$x' = r'.\cos z'; \qquad x'' = r''.\cos z''$$

Изъ сочетанія этихъ уравненій съ предыдущими легко находимъ

$$\operatorname{tang} z' = \frac{R'.\sin\delta'}{x'}; \qquad \operatorname{tang} z'' = \frac{R''.\sin\delta''}{x''} \tag{156}$$

Какъ скоро по выраженіямъ (154) найдены приближенныя величины x' и x'', то

съ ними изъ послѣднихъ выраженій найдутся z' и z''; посредствомъ которыхъ изъ уравненій (155) могутъ быть вычислены r' и r''. При помощи этихъ послѣднихъ, принимая $Q' = \frac{\theta.\theta}{2}$, $Q'' = \frac{\theta.\theta_0'}{2}$, найдемъ болѣе точныя величины x' и x'' по выраженіямъ (153), которыя можно представить въ видѣ

$$x'' = \frac{x' + a'}{f'\left(1 + \frac{Q'}{r'^3}\right)} - \frac{c_0'}{f'}$$

(157)

$$x' = \frac{x'' + a''}{f''\left(1 + \frac{Q''}{r''^3}\right)} - \frac{c_0''}{f''}$$

Разсматривая прямолинейный треугольникъ заключающійся между центромъ Солнца и положеніями земли и планеты соотвѣтствующими времени втораго наблюденія и удерживая сдѣланныя означенія, найдемъ

(158) $$\rho' = \frac{R'.\sin(z' + \psi')}{\sin z'} \cdot \cos\beta'$$

ибо $\Delta' = \rho'.\cos\beta'$. Подобнымъ же образомъ для времени третьяго наблюденія будемъ имѣть

(158_*) $$\rho'' = \frac{R''.\sin(z'' + \psi'')}{\sin z''} \cdot \cos\beta''$$

18. Чтобы имѣть всѣ величины входящія въ точныя выраженія функцій P и Q, опредѣлимъ радіусы векторы свѣтила, соотвѣтствующіе временамъ двухъ крайнихъ наблюденій, и разности аргументовъ широты. Наиболѣе простое рѣшеніе этой задачи указано К. Ф. Гауссомъ и основывается на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Легко видѣть, что упомянутые радіусы векторы и разности $u' - u$, $u'' - u''$ будутъ найдены для данныхъ начальныхъ значеній P, Q, r', r'', какъ скоро будетъ извѣстна разность $u'' - u'$. И такъ упомянутый выше вопросъ приводится къ опредѣленію разности аргументовъ широты, соотвѣтствующихъ временамъ втораго и третьяго наблюденія.

Предположимъ какъ прежде, что точки C' и C'' (фиг. 3) представляютъ собою геліоцентрическія положенія свѣтила, соотвѣтствующія временамъ втораго и третьяго наблюденія. Геоцентрическія мѣста свѣтила, соотвѣтствующія временамъ тѣхъ же наблюденій, пусть находятся въ точкахъ D' и B''. Понятно, что при сдѣланныхъ теперь означеніяхъ $B'C' = z'$; $B''C'' = z''$, а разность $u'' - u'$ представляется дугою $C'C''$. По уравненіямъ (57_*) легко вычисляются величины γ', γ'', δ' и δ'', при помощи этихъ послѣднихъ изъ уравненій (58) легко находятся части треугольника $A'A''D$, т. е. стороны $A'D$, $A''D$ и уголъ ϵ. Имѣя все это, легко вычислимъ дуги $B'D$ и $B''D$, ибо $B'D = A'D - \delta'$; $B''D = A''D - \delta''$. Если при данныхъ, начальныхъ значеніяхъ функцій P и Q найдены по изложенному выше способу z' и z'', то дуги $C'D$ и $C''D$ будутъ извѣстны, ибо $C'D = D'D + z'$; $C''D = B''D + z''$. Какъ скоро $C'D$, $C''D$ и уголъ ϵ опредѣлены, то легко вычислить искомую разность

$u''-u'$, представляющуюся дугою $C'C''$. Если положимъ $C'D=\zeta$; $C''D=\zeta''$; $C'C''=u''-u'=2f$; $DC'C''=w'$; $D'C''C'=180^\circ-w''$, то примѣняя къ рѣшенію треугольника $C'C''D$ уравненія Гаусса, будемъ имѣть

$$\begin{aligned}
\sin f.\sin\frac{w''+w'}{2}&=\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\zeta+\zeta''}{2}\\
\sin f.\cos\frac{w''+w'}{2}&=\cos\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\zeta-\zeta''}{2}\\
\cos f.\sin\frac{w''-w'}{2}&=\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\zeta+\zeta''}{2}\\
\cos f.\cos\frac{w''-w'}{2}&=\cos\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\zeta-\zeta''}{2}
\end{aligned}\tag{159}$$

Этими уравненіями и слѣдуетъ пользоваться для опредѣленія искомой величины $f=\frac{u''-u'}{2}$. Если нѣтъ сомнѣнія касательно того въ какой четверти лежитъ уголъ f, то для нашей цѣли совершенно достаточно пользоваться только двумя первыми изъ приведенныхъ уравненій.

Предполагая, что разность $u''-u'$ этимъ пріемомъ найдена, посмотримъ какимъ образомъ могутъ быть вычислены по ней величины r, r''', $u'-u$ и $u'''-u''$. Если означимъ, какъ прежде, чрезъ n удвоенную площадь треугольника заключающуюся между радіусами векторами r', r'' и хордой соединяющей ихъ оконечности, то какъ извѣстно $n=r'r''.\sin(u''-u')$. Такимъ образомъ видимъ, что n можетъ считаться извѣстной величиной. Мы положили

$$N=\frac{n}{n'};\qquad N''=\frac{n''}{n'};\qquad N'=\frac{n_0'}{n_0''};\qquad N'''=\frac{n}{n_0''}$$

Первое и послѣднее изъ этихъ выраженій прямо даютъ

$$n'=\frac{n}{N};\qquad n_0''=\frac{n}{N'''}$$

раздѣливъ же второе на первое и третье на четвертое, находимъ

$$n''=\frac{N''}{N}.n;\qquad n_0'=\frac{N'}{N'''}.n$$

Но мы знаемъ, что

$$\begin{aligned}
n'&=rr''.\sin(u''-u);\qquad & n''&=rr'.\sin(u'-u)\\
n_0''&=r'r'''.\sin(u'''-u');\qquad & n_0'&=r''r'''.\sin(u'''-u'')
\end{aligned}$$

Внося эти величины вмѣстѣ съ величиною n въ выраженія

$$n'=\frac{n}{N};\qquad n_0''=\frac{n}{N'''};\qquad n''=\frac{N''}{N}\ n;\qquad n_0'=\frac{N'}{N'''}.n$$

находимъ

$$r.\sin(u''-u) = \frac{r'}{N}\sin(u''-u')$$

$$r'''.\sin(u'''-u') = \frac{r''}{N'''}\sin(u''-u')$$

$$r.\sin(u'-u) = \frac{N''r''}{N}\sin(u''-u')$$

$$r'''.\sin(u'''-u'') = \frac{N'r'}{N'''}\sin(u''-u')$$

Сначала складывая, а потомъ вычитая первое и третье уравненіе, находимъ

(160)
$$r.\sin\left[u'-u+\frac{u''-u'}{2}\right] = \frac{r'+r''.N''}{N}\sin\frac{u''-u'}{2}$$
$$r.\cos\left[u'-u+\frac{u''-u'}{2}\right] = \frac{r'-r''.N''}{N}\cos\frac{u''-u'}{2}$$

Поступая подобнымъ же образомъ со вторымъ и четвертымъ изъ предыдущихъ уравненій, имѣемъ

(160_*)
$$r'''.\sin\left[u'''-u''+\frac{u''-u'}{2}\right] = \frac{r''+r'.N'}{N'''}\sin\frac{u''-u'}{2}$$
$$r'''.\cos\left[u'''-u''+\frac{u''-u'}{2}\right] = \frac{r''-r'.N'}{N'''}\cos\frac{u''-u'}{2}$$

Уравненія (160) служатъ для опредѣленія r и $u'-u$, по уравненіямъ же (160_*) вычисляются r''' и $u'''-u''$. Что касается до входящихъ въ эти выраженія величинъ N, N', N'', N''', то они во всякой гипотезѣ вычисляются по формамъ (148). Такимъ образомъ рѣшается вопросъ, о которомъ мы говорили.

Прежде чѣмъ перейдемъ къ вычисленію величинъ функцій P', Q', P'', Q'' служащихъ основаніемъ второму приближенію, необходимо освободить положенія наблюдаемаго свѣтила отъ той части аберраціи, которая обусловливается собственнымъ движеніемъ этого свѣтила. Чтобы выполнить это по правилу Гаусса, достаточно, какъ мы видѣли, изъ временъ наблюденій вычесть тѣ промежутки времени, которые употребляетъ свѣтъ для достиженія отъ свѣтила къ землѣ. За единицу всѣхъ разстояній въ солнечной системѣ мы считаемъ среднюю величину разстоянія земли отъ Солнца. Это разстояніе свѣтъ проходитъ въ 493", что составляетъ 0,005706 долей сутокъ. Если назовемъ эту величину чрезъ F, то время употребляемое свѣтомъ для прохожденія отъ свѣтила къ землѣ представится чрезъ $F.\Delta$ или чрезъ $F.\rho\sec\beta$, гдѣ ρ и β имѣютъ тоже значеніе какъ выше, а $\log F = 7.760523$. Если означимъ времена четырехъ наблюденій представленныя въ суткахъ и доляхъ сутокъ чрезъ t_0, t_0', t_0'', t_0''', то должны будемъ считать

(161)
$$t = t_0 - F\rho.\sec\beta;\qquad t'' = t_0'' - F\rho''.\sec\beta''$$
$$t' = t_0' - F\rho'.\sec\beta';\qquad t''' = t_0''' - F\rho'''.\sec\beta'''$$

Слѣдовательно для вычисленія поправокъ отъ аберраціи необходимо знать величины

ρ, ρ', ρ'', ρ'''. Двѣ среднія изъ нихъ въ какой угодно гипотезѣ могутъ быть вычислены по выраженіямъ (158) и (158$_*$). Такія же уравненія должны быть взяты и для вычисленія двухъ крайнихъ значеній ρ. Въ самомъ дѣлѣ, какъ скоро r и r''' вычислены по уравненіямъ (160) и (160$_*$), то изъ уравненій

$$r = \frac{R \,.\, \sin \delta}{\sin z} \quad \text{и} \quad r''' = \frac{R'''.\sin \delta'''}{\sin z'''} \tag{162}$$

найдутся z и z'''. Предполагается что δ и δ''' для двухъ крайнихъ наблюденій вычислены по уравненіямъ (57). Имѣя z и z''', опредѣлимъ ρ и ρ''' изъ уравненій

$$\rho = \frac{R \,.\, \sin (z + \psi)}{\sin z} \cos \beta \,; \qquad \rho''' = \frac{R'''.\sin (z''' + \psi''')}{\sin z'''} \cos \beta''' \tag{163}$$

гдѣ $\psi = 180^0 - \delta$; $\psi''' = 180^0 - \delta'''$.

19. Имѣя радіусы векторы и разности аргументовъ широты, можно приступить къ вычисленію величинъ функцій P', P'', Q', Q'', лежащихъ въ основаніи второй гепотезы.

Функціи P', Q', P'', Q'' представляются выраженіями (144), а потому ихъ можно привести къ виду

$$P' = \frac{n}{n''}; \qquad P'' = \frac{n}{n_0'}$$

$$Q' = \left[\frac{n + n''}{n'} - 1\right] r'^3; \qquad Q'' = \left[\frac{n_0' + n}{n_0''} - 1\right] r''^3$$

Поступая съ этими выраженіями совершенно подобно тому какъ сдѣлали при выводѣ выраженій (09) и (72), найдемъ

$$\begin{aligned} P' &= \frac{\theta}{\theta''} \cdot \frac{\eta''}{\eta}\,; \qquad Q' = \frac{\theta \,.\, \theta''.\, r'^2}{2\eta\eta''.\, rr''.\cos \dfrac{u'' - u'}{2} \cdot \cos \dfrac{u'' - u}{2} \cdot \cos \dfrac{u' - u}{2}} \\ P'' &= \frac{\theta}{\theta_0'} \cdot \frac{\eta_0'}{\eta}\,; \qquad Q'' = \frac{\theta \,.\, \theta_0'.\, r''^2}{2\eta\eta_0'.\, r'r'''.\cos \dfrac{u''' - u''}{2} \cdot \cos \dfrac{u''' - u'}{2} \cdot \cos \dfrac{u'' - u'}{2}} \end{aligned} \tag{164}$$

гдѣ подъ η_0' разумѣемъ отношеніе площади сектора, заключающагося между радіусами векторами r'' и r''', къ площади соотвѣтствующаго треугольника. Чтобы пользоваться этими выраженіями, необходимо предварительно вычислить величины отношеній η, η'' и η_0'. Для этого слѣдуетъ употребить тотъ же пріемъ, который показанъ для подобной цѣли при вычисленіи орбитъ по тремъ наблюденіямъ. Отношенія η и η'' должны быть вычислены по первой и третей системѣ уравненій (88), а для опредѣленія η_0' подобно этому имѣемъ рядъ уравненій:

$$\theta_0' = k(t''' - t''); \qquad \cos\gamma''' = \frac{2\sqrt{r''r'''}\cdot\cos\frac{u'''-u''}{2}}{r''+r'''}$$

(165) $$m''' = \frac{\theta_0'^2}{(r''+r''')^3\cos^3\gamma'''}; \qquad l''' = \frac{\sin^2\left(\frac{\gamma'''}{2}\right)}{\cos\gamma'''}$$

$$h''' = \frac{m'''}{\frac{5}{6}+l'''+\xi'''}; \qquad x''' = \frac{m'''}{\eta_0'^2} - l'''$$

$$\eta_0'^2(\eta_0'-1) = \left(\eta_0'+\frac{1}{9}\right)h'''$$

Замѣтимъ только, что въ разсматриваемомъ случаѣ въ первой и третей системѣ уравненій (88) слѣдуетъ считать

$$f = \frac{u''-u'}{2}; \qquad f'' = \frac{u'-u}{2}$$

Опредѣливъ отношенія η, η'', η_0', будемъ пользоваться точными выраженіями (164) для вычисленія функцій P', Q', P'', Q''. Величины этихъ послѣднихъ такимъ образомъ найденныя должны служить основаніемъ новому приближенію, въ которомъ неизвѣстныя x' и x'' опредѣлятся изъ уравненій (157).

Если радіусы векторы свѣтила опредѣлены послѣдовательными приближеніями съ желаемою точностію, то вычисленіе элементовъ по радіусамъ векторамъ двухъ крайнихъ положеній свѣтила можетъ быть выполнено тѣмъ способомъ, который изложенъ въ n° 8.

20. Для поясненія изложенной теоріи на частномъ примѣрѣ мы вычислимъ орбиту малой планеты Elpis (59) по наблюденіямъ произведеннымъ въ 1868 года въ Вѣнѣ, Парижѣ и Лейденѣ. Изъ этихъ наблюденій выведены слѣдующія видимыя положенія этой планеты

	среднее мѣстн. время.	AR (59)	Decl. (59)
1868 года, Мая 18, Вѣна. . .	$10^h\ 33^m\ 9^s$	$17^h\ 16^m\ 20^s.36$	— 10° 13′ 58″.1
„ 28, Лейденъ .	12 41 11	17 8 20 .12	— 9 44 11.0
Іюня 9, Парижъ .	11 43 37	10 58 2.00	— 9 20 37.5
„ 19, Лейденъ .	10 55 51	16 49 33.48	— 9 13 1.5

Обратимъ склоненія и прямыя восхожденія въ широты и долготы, освободимъ эти послѣднія отъ вліянія аберраціи, приведемъ ихъ къ среднему равноденствію начала 1868 года, приведемъ времена наблюденій къ Берлинскому меридіану и для найденныхъ моментовъ возьмемъ изъ Berliner Astr. Jahrbuch координаты Солнца, наконецъ эти послѣднія замѣнимъ координатами фиктивныхъ мѣстъ наблюденія. Послѣ всего этого составятся слѣдующія данныя для вычисленія орбиты

1868 года, Мая	α	β	L	$\log R$
18.431471	$258^\circ\ 58'\ 31''.05$	$+12^\circ\ 48'\ 18''.08$	$238^\circ\ 8'\ 46''.35$	0.0052250
28.553354	256 56 30 .23	+13 8 7 .62	247 52 9 .61	0.0059737
40.519341	254 16 57 .42	+13 16 8 .59	259 19 4 .42	0.0066434
50.480206	252 7 52 .12	+13 9 2 .79	268 49 47 .25	0.0070119

Здѣсь подъ α и β мы разумѣемъ долготы и широты разсматриваемой планеты, а подъ L и $\log R$ геліоцентрическія долготы и логариѳмы разстояній фиктивныхъ мѣстъ наблюденія отъ Солнца.

По этимъ даннымъ прежде всего изъ уравненій (57) находимъ для временъ наблюденій

$$\delta = 24^\circ\ 18'\ 1''.26 \qquad \psi = 155^\circ\ 41'\ 58''.74$$
$$\gamma' = 55^\circ\ 57'\ 10''.44 \qquad \delta' = 15\ 55\ 6.50 \qquad \psi' = 164\ 4\ 53.50$$
$$\gamma'' = 110\ 24\ 52.66 \qquad \delta'' = 14\ 10\ 34.44 \qquad \psi'' = 165\ 49\ 25.56$$
$$\delta''' = 21\ 8\ 19.38 \qquad \psi''' = 158\ 51\ 40.62$$

Буквы безъ значковъ относятся ко времени перваго наблюденія, съ однимъ значкомъ— ко времени втораго наблюденія, съ двумя — третьяго и т. д. Хотя для вычисленія δ, δ''' и введены широты двухъ крайнихъ наблюденій, но этими величинами δ и δ''' мы будемъ пользоваться только для опредѣленія поправокъ зависящихъ отъ абберраціи свѣтилъ имѣющихъ собственное движеніе, въ вычисленіе же орбиты величины δ и δ''' не входятъ.

Послѣ этого изъ уравненій (58) находимъ

$$A'D = 13^\circ\ 2'\ 18''.46; \qquad A''D = 11^\circ\ 30'\ 19''.12; \qquad \varepsilon = 55^\circ\ 32'\ 32''.60$$

Уравненія (139) и (142) въ разсматриваемомъ случаѣ даютъ

$$\log A = 8.5385291_n \qquad a' = +4.6764187$$
$$\log D = 8.9010603_n \qquad a'' = +2.4921088$$
$$\log C = 8.5627591_n \qquad c' = -2.4442273$$
$$\log D = 8.9120506_n \qquad c'' = -4.2411161$$
$$\log h' = 0.3625312 \qquad \log d' = 1.0176349$$
$$\log h'' = 0.3492915 \qquad \log d'' = 0.9026457$$

Въ первой гипотезѣ мы примемъ

$$P' = \frac{\theta}{\theta''}; \qquad P'' = \frac{\theta}{\theta_0'}$$

Въ нашемъ случаѣ

$$t'' - t' = 11.965987 \qquad \log P' = 0.0726872$$
$$t' - t = 10.121883 \qquad \log P'' = 0.0796514$$
$$t''' - t'' = 9.960865$$

При помощи этого изъ уравненій (152) находимъ

$$\log c_0' = 0.6553186 \qquad \log f' = 0.0236387$$
$$\log c_0'' = 0.3864416 \qquad \log f'' = 0.0066124$$

Имѣя это, примемъ сначала $Q' = 0$ и $Q'' = 0$ и вычисляя поэтому x' и x'' по выраженіямъ (154) имѣемъ

$$\log x' = 0.4746371 \qquad \log x'' = 0.4729343$$

посредствомъ этихъ приближенныхъ величинъ x' и x'' изъ уравненій (156) и (155), находимъ

$$z' = 5^\circ\ 19'\ 32''.8 \qquad \log r' = 0.4765160$$
$$z'' = 4\ \ 47\ \ 3\ .5 \qquad \log r'' = 0.4744501$$

Найдя эти величины r' и r'', можемъ опредѣлить *болѣе* точныя значенія x' и x' по уравненіямъ (157). Въ первой гипотезѣ слѣдуетъ вычислить Q' и Q'' по выраженіямъ (147), которыя въ нашомъ случаѣ даютъ

$$\log Q' = 8.2533426\,; \qquad \log Q'' = 8.2463784$$

а потому изъ выраженій (157) находимъ

$$\log x' = 0.4565589\,; \qquad \log x'' = 0.4550418$$

при помощи этихъ величинъ изъ уравненій (155) и (156) получаемъ

$$z' = 5^\circ\ 33'\ 2''.75 \qquad \log r' = 0.4586003$$
$$z'' = 4\ \ 59\ \ 4\ .35 \qquad \log r'' = 0.4566869$$

Такъ какъ значенія $\log r'$ и $\log r''$ еще значительно разнятся отъ предыдущихъ, то съ послѣдними еще разъ вычислимъ величины x' и x'' по уравненіямъ (157), но при этомъ будемъ пользоваться предыдущими величинами $\log Q'$ и $\log Q''$. Такимъ образомъ находимъ

$$\log x' = 0.4541797\,; \qquad \log x'' = 0.4526866$$

а съ ними изъ уравненій (155) и (156) снова выводимъ

$$z' = 5^\circ\ 34'\ 51''.83\,; \qquad \log r' = 0.4562436$$
$$z'' = 5\ \ \ 0\ \ 41\ .41\,; \qquad \log r'' = 0.4543501$$

Такъ какъ эти величины уже мало разнятся отъ предыдущихъ, то найденныя величины $\log r'$ и $\log r''$ для первой гипотезы будемъ считать достаточно точными и перейдемъ къ вычисленію радіусовъ векторовъ двухъ крайнихъ положеній. Для этого, пользуясь выше найденными величинами, составляемъ

$$B'D = A'D - \delta' = -\,2^\circ\ 52'\ 48''.04\,; \qquad B'D + z' = \zeta' = 2^\circ\ 42'\ \ 3''.79$$
$$B''D = A''D - \delta'' = -\,2\ \ 40\ \ 15\ .32\,; \qquad B''D + z'' = \zeta'' = 2\ \ 20\ \ 20\ .09$$

имѣя это и помня что $\varepsilon = 55^\circ\ 32'\ 32''.60$, по первымъ двумъ изъ уравненій (159) находимъ

$$u'' - u' = 2f = 2^\circ\ 22'\ 12''.28$$

Далѣе по выраженіямъ (148) вычисляемъ

$$\log N'' = 9.6614403 \qquad \log N' = 9.6570527$$
$$\log N = 9.7341275 \qquad \log N''' = 9.7373041$$

при помощи этихъ величинъ изъ уравненій (160) и (160_*) находимъ

$$u' - u = 1^\circ\ 59'\ 19''.65; \qquad u''' - u'' = 1^\circ\ 59'\ 19''.63$$
$$\log r = 0.4578004; \qquad \log r''' = 0.4527300$$

Чтобы имѣть все необходимое для составленія величинъ P', P'', Q', Q'' служащихъ основаніемъ второй гипотезы, вычислимъ прежде всего поправки временъ наблюденій, зависящія отъ аберраціи свѣтилъ имѣющихъ собственное движеніе. Вычисляя по выраженіямъ

$$\sin z = \frac{R \,.\, \sin \delta}{r} \quad \text{и} \quad \sin z''' = \frac{R''' .\, \sin \delta'''}{r'''}$$

углы z и z''' для двухъ крайнихъ наблюденій, имѣемъ

$$z = 8^\circ\ 20'\ 45''.37; \qquad z''' = 7^\circ\ 25'\ 28''.91$$

а потому помня, что $\Delta = \rho \,.\, \sec \beta$ по выраженіямъ (158), (158_*) и имъ подобнымъ для двухъ крайнихъ наблюденій находимъ

$$\log \Delta = 0.28254; \quad \log \Delta' = 0.27200; \quad \log \Delta'' = 0.26750; \quad \log \Delta''' = 0.27056$$

Слѣдовательно принимая $\log F = 7.76052$ выводимъ, что поправки временъ наблюденій и самыя исправленныя времена суть

$$\Delta t = 0.011042; \qquad t = 18.420429$$
$$\Delta t' = 0.010778; \qquad t' = 28.542570$$
$$\Delta t'' = 0.010666; \qquad t'' = 40.508675$$
$$\Delta t''' = 0.010742; \qquad t''' = 50.469464$$

Посредствомъ этого составляемъ

$$\log \theta = 9.3135340; \qquad \log \theta'' = 9.2408540; \qquad \log \theta_0' = 9.2338751$$

Затѣмъ по уравненіямъ (165) и имъ подобнымъ находимъ

$$\log m = 6.3583660; \qquad \log m'' = 6.2077479; \qquad \log m_0' = 0.2042352$$
$$\log h = 6.4374911; \qquad \log h'' = 6.2868896; \qquad \log h_0' = 6.2833769$$
$$\log \eta = 0.0001320; \qquad \log \eta'' = 0.0000934; \qquad \log \eta_0' = 0.0000926$$

Имѣя все это и помня, что $u''-u=u''-u'+u'-u$, $u'''-u'=u'''-u''+u''-u'$, по выраженіямъ (164) легко составляемъ

$$\log P' = 0.0726414; \qquad \log P'' = 0.0796195$$
$$\log Q' = 8.2539419; \qquad \log Q'' = 8.2463531$$

Эти величины мы примемъ за основаніе второй гипотезы и съ ними приступимъ къ вычисленію радіусовъ векторовъ и разностей истинныхъ аномалій во второмъ приближеніи.

При помощи найденныхъ величинъ функціи P' и P'' изъ уравненій (152) находимъ прежде всего

$$\log c_0' = 0.0552864; \qquad \log f' = 0.0236636$$
$$\log c_0'' = 0.3864017; \qquad \log f'' = 0.0066297$$

Посредствомъ этихъ величинъ, а также функцій Q', Q'' и радіусовъ векторовъ двухъ среднихъ положеній изъ уравненій (157) вычисляемъ

$$\log x' = 0.4544074; \qquad \log x'' = 0.4529120$$

а изъ уравненій (155) и (156) находимъ

$$z' = 5^\circ\ 34'\ 41''.37; \qquad z'' = 5^\circ\ 0'\ 32''.10$$
$$\log r' = 0.4564690; \qquad \log r'' = 0.4545737$$

Послѣ чего заключаемъ, что въ этомъ второмъ приближеніи

$$\zeta' = 2^\circ\ 41'\ 53''.33; \qquad \zeta'' = 2^\circ\ 20'\ 16''.78$$

съ помощію этихъ величинъ по первымъ двумъ изъ уравненій (159) получаемъ

$$u'' - u' = 2^\circ\ 22'\ 3''.02$$

Далѣе изъ уравненій (148) и уравненій (160), (160_*) находимъ

$$\log N'' = 9.6614657; \qquad \log N' = 9.6576700$$
$$\log N = 9.7341071; \qquad \log N''' = 9.7372895$$
$$u' - u = 1^\circ\ 59'\ 12''.01 \qquad u''' - u'' = 1^\circ\ 59'\ 12''.46$$
$$\log r = 0.4580253 \qquad \log r''' = 0.4529518$$

Имѣя все это, изъ уравненій (165) и имъ подобныхъ, получаемъ

$$\log m = 6.3576919; \qquad \log m'' = 6.2070726; \qquad \log m''' = 6.2035086$$
$$\log h = 6.4368170; \qquad \log h'' = 6.2862142; \qquad \log h''' = 6.2827101$$
$$\log \eta = 0.0001319; \qquad \log \eta'' = 0.0000932; \qquad \log \eta_0' = 0.0000925$$

Наконецъ уравненія (164) даютъ

$$\log P' = 0.0726413 \qquad \log Q' = 8.2539434$$
$$\log P'' = 0.0796195 \qquad \log Q'' = 8.2463528$$

Эти величины столь мало разнятся отъ предыдущихъ, что дальнѣйшія приближенія можно считать излишними. Принимая это во вниманіе, мы перейдемъ къ вычисленію элементовъ.

По найденнымъ разностямъ аргументовъ широты заключаемъ, что разность соотвѣтствующая двумъ крайнимъ наблюденіямъ есть $u''' - u = 6^\circ\ 20'\ 27''.37$; по этой разности и при помощи радіусовъ векторовъ двухъ крайнихъ положеній изъ уравненій подобныхъ по виду уравненіямъ (165) вычисляемъ

$$\log m = 7.2152330; \qquad \log l = 6.8893449; \qquad \log h = 7.2940106$$
$$\log \eta = 0.0009463; \qquad \log x = 6.9341221$$

а слѣдовательно по второму изъ уравненій (81) въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$g = 3^\circ\ 21'\ 34''.234$$

здѣсь подъ g мы разумѣемъ полуразность эксцентрическихъ аномалій соотвѣтствую-

щихъ временамъ двухъ крайнихъ наблюденій. Такъ какъ въ нашемъ случаѣ

$$\frac{u'' - u}{2} = f = 3^\circ\ 10'\ 14''.045$$

то

$$\frac{f + g}{2} = 3^\circ\ 15'\ 54''.139; \qquad \frac{f - g}{2} = -0^\circ\ 5'\ 40''.094$$

Имѣя это, изъ уравненія

$$\sqrt[4]{\frac{r'''}{r}} = \mathrm{tang}\,(45^\circ + \psi)$$

и уравненій (93), (94), (95) и (96) примѣненныхъ къ двумъ крайнимъ наблюденіямъ находимъ

$$\begin{aligned} 2\psi &= -\ 0^\circ\ 10'\ 2''.44; & \varphi &= 6^\circ\ 43'\ 53''.44 \\ F &= 237\ 37\ 24\ .35; & \log a &= 0.4333813 \\ G &= 243\ 29\ 4\ .55; & \mu &= 794''.2085 \end{aligned}$$

Здѣсь подъ μ разумѣемъ среднее суточное движеніе планеты. Такъ какъ

$$\begin{aligned} v''' &= F + f; & E''' &= G + g \\ v &= F - f; & E &= G - g \end{aligned}$$

то въ нашемъ случаѣ

$$\begin{aligned} E &= 240^\circ\ 7'\ 30''.22; & v &= 234^\circ\ 27'\ 10''.31 \\ E''' &= 246\ 50\ 38\ .78; & v''' &= 240\ 47\ 38\ .39 \end{aligned}$$

При помощи найденныхъ эксцентрическихъ аномалій вычисляемъ для временъ двухъ крайнихъ наблюденій среднія аномаліи и находимъ

$$M = 245^\circ\ 56'\ 55''.19; \qquad M''' = 253^\circ\ 1'\ 8''.69$$

Примемъ за эпоху 1,0 Мая 1868 года ср. Берл. вр., тогда вычисляя по этимъ двумъ среднимъ аномаліямъ элементъ M_0, получаемъ

$$M_0 = 242^\circ\ 6'\ 19''.74; \qquad M_0 = 242^\circ\ 6'\ 19''.63$$

Остается вычислить элементы, опредѣляющіе собою положеніе плоскости орбиты въ пространствѣ.

Пользуясь тѣми величинами ζ и ζ'', которыя мы нашли во второй гипотезѣ, изъ уравненій (98) примѣненныхъ къ двумъ среднимъ положеніямъ свѣтила легко получаемъ

$$w' = 54^\circ\ 30'\ 55''.53; \qquad w'' = 110^\circ\ 0'\ 44''.71$$

Внесемъ во вторыя части уравненій (99) вмѣсто w, ζ и γ ихъ величины относящіяся ко второму положенію свѣтила и легко найдемъ

$$\begin{aligned} u' &= 83^\circ\ 22'\ 29''.02 \\ h' &= 77\ 28\ 1\ .74 \\ i &= 8\ 36\ 39\ .54 \end{aligned}$$

Такъ какъ $\theta = L' \mp h'$, то въ нашемъ случаѣ

$$\theta = 170^\circ\ 24'\ 7''.87$$

гдѣ, какъ прежде, подъ L' разумѣемъ долготу земли соотвѣтствующую времени втораго наблюденія, а подъ θ долготу восходящаго узла орбиты. Мы нашли уже истинную аномалію свѣтила соотвѣтствующую времени перваго наблюденія. Истинная аномалія соотвѣтствующая времени втораго наблюденія можетъ быть представлена въ видѣ $v' = v + (u' - u)$, гдѣ $u' - u$ есть найденная выше разность аргументовъ широты соотвѣтствующихъ времени втораго и перваго наблюденія; поэтому въ нашемъ случаѣ

$$v' = 236^\circ\ 26'\ 22''.92$$

Такъ какъ разстояніе перигелія отъ узла $\omega = u' - v$, то для вычисляемой орбиты

$$\omega = 206^\circ\ 56'\ 6''.10; \qquad \pi = 17^\circ\ 20'\ 13''.97$$

подъ π мы разумѣемъ здѣсь долготу перигелія. И такъ мы нашли теперь слѣдующую систему элементовъ орбиты планеты Еіріѕ:

1868, Мая 1,0 ср. берл. вр.

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= 242^\circ\ \ 6'\ 19''.68 \\ \pi &= \ \ 17\ \ 20\ \ 13\ .97 \\ \theta &= 170\ \ 24\ \ \ 7\ .87 \\ i &= \ \ \ 8\ \ 36\ \ 39\ .54 \end{aligned}\right\}\ \text{ср. равнод. } 1868.0.$$

$$\varphi = \ \ 6\ \ 43\ \ 53\ .44$$

$$\mu = 794''.2085$$

Надо однако замѣтить, что дѣйствительная необходимость вычислять орбиту по четыремъ геоцентрическимъ наблюденіямъ на практикѣ представляется весьма рѣдко.

V.

Опредѣленіе параболическихъ кометныхъ орбитъ по тремъ наблюденіямъ.

21. За немногими исключеніями кометы движутся въ орбитахъ по формѣ мало отличныхъ отъ параболъ, поэтому въ большинствѣ случаевъ вычисленіе кометныхъ орбитъ можетъ быть выполняемо въ томъ предположеніи, что эксцентриситетъ описываемаго свѣтиломъ коническаго сѣченія равенъ единицѣ. Такимъ допущеніемъ значительно упрощается вычисленіе элементовъ орбиты по тремъ наблюденіямъ. Ольберсъ, чтобы достигнуть возможно большей простоты вычисленія, принимаетъ отношеніе площадей треугольниковъ, составленныхъ изъ радіусовъ векторовъ и хордъ, равнымъ отношенію площадей соотвѣтствующихъ секторовъ, но понятие, что такое допущеніе близко къ истинѣ только тогда, когда наблюденія, взятыя для вычисленія орбиты, отдѣлены одно отъ другаго незначительными промежутками времени и когда геліоцентрическое движеніе свѣтила не велико.

Если въ тождественномъ уравненіи (35) примемъ

$$\alpha = C + v; \qquad \beta = C + v'; \qquad \gamma = C + v''$$

давая величинамъ C, v, v', v'' тѣ значенія, которыя онѣ имѣютъ въ уравненіяхъ (137), то получимъ

$$0 = \sin(C+v)\sin(v''-v') - \sin(C+v')\sin(v''-v) + \sin(C+v'')\sin(v'-v)$$

умноживъ это уравненіе на $c . r\, r'\, r''$, приведемъ его къ виду

$$n . z - n' . z' + n'' . z'' = 0$$

гдѣ подъ n, n', n'' разумѣемъ площади извѣстныхъ треугольниковъ, а подъ z, z', z'', координаты кометы соотвѣтствующія временамъ трехъ наблюденій и считаемыя по оси z той системы, въ которой за плоскость xy принята эклиптика, ось x направлена въ точку весенняго равноденствія и начало координатъ находится въ центрѣ Солнца. Такимъ образомъ если прибавимъ къ предыдущему уравненію два первыя изъ уравненій (138), то будемъ имѣть три уравненія вида

$$n . x - n' . x' + n'' . x'' = 0$$
$$n . y - n' . y' + n'' . y'' = 0$$
$$n . z - n' . z' + n'' . z'' = 0$$

Будемъ пользоваться этими уравненіями для опредѣленія отношенія одного изъ разстояній кометы отъ земли къ другому.

Мы видѣли, что линейныя геліоцентрическія координаты свѣтила могутъ быть представлены въ формахъ показанныхъ на стр. 105; этими выраженіями мы будемъ пользоваться и теперь, только замѣнимъ въ нихъ долготы земли долготами Солнца. Если означимъ долготу Солнца чрезъ λ, а соотвѣтствующую ей долготу земли какъ прежде чрезъ L, то $\lambda = L + 180^0$, поэтому отъ введенія λ упомянутыя выраженія примутъ видъ

$$\begin{aligned} x &= \rho \,.\cos\alpha - R\,.\cos\lambda \\ y &= \rho\,.\sin\alpha - R\,.\sin\lambda \qquad (166)\\ z &= \rho\,.\operatorname{tang}\beta \end{aligned}$$

Вводя такого вида выраженія координатъ въ предыдущія основныя уравненія, получимъ

$$n\,[\rho\,.\cos\alpha - R\,.\cos\lambda] - n'[\rho'.\cos\alpha' - R'.\cos\lambda'] + n''[\rho''.\cos\alpha'' - R''.\cos\lambda''] = 0$$

$$n\,[\rho\,.\sin\alpha - R\,.\sin\lambda] - n'[\rho'.\sin\alpha' - R'.\sin\lambda'] + n''[\rho''.\sin\alpha'' - R''.\sin\lambda''] = 0$$

$$n\,.\rho\,.\operatorname{tang}\beta - n'.\rho'.\operatorname{tang}\beta' + n''.\rho''.\operatorname{tang}\beta'' = 0$$

Если уменьшимъ всѣ углы считаемые въ плоскости эклиптики на уголъ λ', то второе изъ предыдущихъ уравненій представится въ видѣ

$$n\,[\rho.\sin(\alpha-\lambda') - R.\sin(\lambda-\lambda')] - n'.\rho'.\sin(\alpha'-\lambda') + n''[\rho''.\sin(\alpha''-\lambda') - R''.\sin(\lambda''-\lambda')] = 0$$

Исключая ρ' между этимъ уравненіемъ и послѣднимъ изъ предыдущихъ, легко получимъ

$$\begin{aligned} & n''.\rho''[\operatorname{tang}\beta'.\sin(\alpha''-\lambda') - \operatorname{tang}\beta''.\sin(\alpha'-\lambda')] \\ & + n\,.\rho\,[\operatorname{tang}\beta'.\sin(\alpha-\lambda') - \operatorname{tang}\beta\,.\sin(\alpha'-\lambda')] \\ & - n\,.R.\operatorname{tang}\beta'.\sin(\lambda-\lambda') - n''.R''.\operatorname{tang}\beta'.\sin(\lambda''-\lambda') = 0 \end{aligned}$$

откуда

$$\rho'' = \rho\frac{n}{n''}\left[\frac{\operatorname{tang}\beta'.\sin(\alpha-\lambda') - \operatorname{tang}\beta\,.\sin(\alpha'-\lambda')}{\operatorname{tang}\beta''.\sin(\alpha'-\lambda') - \operatorname{tang}\beta'.\sin(\alpha''-\lambda')}\right]$$
$$+ \frac{\operatorname{tang}\beta'}{n''}\left[\frac{n\,.R\,.\sin(\lambda'-\lambda) - n''.R''.\sin(\lambda''-\lambda')}{\operatorname{tang}\beta''.\sin(\alpha'-\lambda') - \operatorname{tang}\beta'.\sin(\alpha''-\lambda')}\right]$$

Возьмемъ въ послѣднемъ членѣ общимъ множителемъ величину $n''.R.\sin(\lambda'-\lambda)$ и положимъ для краткости

$$M = \frac{\operatorname{tang}\beta'.\sin(\alpha-\lambda') - \operatorname{tang}\beta\,.\sin(\alpha'-\lambda')}{\operatorname{tang}\beta''.\sin(\alpha'-\lambda') - \operatorname{tang}\beta'.\sin(\alpha''-\lambda')} \qquad (167)$$

тогда

$$\rho'' = \frac{n}{n''}M.\rho + \frac{R.\operatorname{tang}\beta'.\sin(\lambda'-\lambda)}{\operatorname{tang}\beta''.\sin(\alpha'-\lambda') - \operatorname{tang}\beta'.\sin(\alpha''-\lambda')}\left[\frac{n}{n''} - \frac{R''.\sin(\lambda''-\lambda')}{R.\sin(\lambda'-\lambda)}\right] \qquad (168)$$

Означимъ чрезъ N и N'' удвоенныя площади треугольниковъ составленныхъ въ зем-

ной орбитѣ радiусами векторами втораго и третьяго положенiя земли и хордою соединяющею эти положенiя, а также радiусами векторами перваго и втораго положенiя и соотвѣтствующею хордою, тогда

$$N = R'R''.\sin(L'' - L'); \qquad N'' = RR'.\sin(L' - L)$$

вводя сюда долготы Солнца вмѣсто долготъ земли, получимъ

$$N = R'R''.\sin(\lambda'' - \lambda'); \qquad N'' = RR'.\sin(\lambda' - \lambda)$$

откуда

$$\frac{N}{N''} = \frac{R''.\sin(\lambda'' - \lambda')}{R.\sin(\lambda' - \lambda)}$$

По этому выраженiю (168) можно дать видъ

$$\rho'' = \frac{n}{n''} \cdot M.\rho + \frac{R.\operatorname{tang}\beta'.\sin(\lambda' - \lambda)}{\operatorname{tang}\beta''.\sin(\alpha' - \lambda') - \operatorname{tang}\beta'.\sin(\alpha'' - \lambda')}\left[\frac{n}{n''} - \frac{N}{N''}\right] \quad (169)$$

Если примемъ, что отношенiе площадей треугольниковъ равно отношенiю площадей секторовъ, то по первому закону Кеплера можемъ считать

$$\frac{n}{n''} = \frac{t'' - t'}{t' - t}; \qquad \frac{N}{N''} = \frac{t'' - t'}{t' - t}$$

а потому при сдѣланномъ допущенiи послѣднiй членъ предыдущаго уравненiя обращается въ нуль и остальное принимаетъ видъ

$$\rho'' = \frac{t'' - t'}{t' - t} M\rho \quad (170)$$

22. Пользуясь этимъ выраженiемъ, представимъ радiусы векторы кометы въ первомъ и третьемъ ея положенiи, а также хорду k соединяющую эти положенiя въ зависимости отъ ρ.

Мы знаемъ что вообще

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \qquad r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$$
$$k^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2$$

Представляя гелiоцентрическiя координаты третьяго положенiя кометы въ формахъ подобныхъ формамъ (166), имѣемъ

$$x'' = \rho''.\cos\alpha'' - R''.\cos\lambda''$$
$$y'' = \rho''.\sin\alpha'' - R''.\sin\lambda''$$
$$z'' = \rho''.\operatorname{tang}\beta''$$

Если положимъ

$$\frac{t'' - t'}{t' - t} M = M' \quad (171)$$

то

$$\rho'' = M'\rho$$

а потому предыдущимъ выраженіямъ координатъ можно дать видъ

$$x'' = M'.\rho.\cos\alpha'' - R''.\cos\lambda''$$
$$y'' = M'.\rho.\sin\alpha'' - R''.\sin\lambda''$$
$$z'' = M'.\rho.\tang\beta''$$

Обращая вниманіе на выраженія (166), легко находимъ

$$r^2 = \rho^2 + \rho^2.\tang^2\beta + R^2 - 2\rho R.\cos(\alpha - \lambda)$$

или

$$r^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2\beta} + R^2 - 2\rho R.\cos(\alpha - \lambda)$$

Подобнымъ же образомъ выводимъ

$$r''^2 = \frac{M'^2.\rho^2}{\cos^2\beta''} + R''^2 - 2M'\rho R''.\cos(\alpha'' - \lambda'')$$

Пусть

(172) $$\cos\psi = \cos\beta.\cos(\lambda - \alpha); \qquad \cos\psi'' = \cos\beta''.\cos(\lambda'' - \alpha'')$$

тогда

$$r^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2\beta} + R^2 - 2R.\rho\frac{\cos\psi}{\cos\beta}$$

Придавая и вычитая во второй части уравненія по $R^2.\cos^2\psi$, изъ предыдущаго получимъ

$$r^2 = \left[\frac{\rho}{\cos\beta} - R.\cos\psi\right]^2 + R^2.\sin^2\psi$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$r''^2 = \left[\frac{M'\rho}{\cos\beta''} - R''.\cos\psi''\right]^2 + R''^2.\sin^2\psi''$$

Принимая

(173) $$\begin{aligned} R''.\cos\lambda'' - R.\cos\lambda &= g.\cos G \\ R''.\sin\lambda'' - R.\sin\lambda &= g.\sin G \end{aligned}$$

легко составимъ

$$x'' - x = M'\rho.\cos\alpha'' - \rho.\cos\alpha - g.\cos G$$
$$y'' - y = M'\rho.\sin\alpha'' - \rho.\sin\alpha - g.\sin G$$
$$z'' - z = M'\rho.\tang\beta'' - \rho.\tang\beta$$

Пусть

$$M'\rho \,.\, \cos \alpha'' - \rho \,.\, \cos \alpha = \rho\, h \,.\, \cos \zeta \,.\, \cos H$$
$$M'\rho \,.\, \sin \alpha'' - \rho \,.\, \sin \alpha = \rho\, h \,.\, \cos \zeta \,.\, \sin H \qquad (174)$$
$$M'\rho \,.\, \operatorname{tang} \beta'' - \rho . \operatorname{tang} \beta = \rho\, h \,.\, \sin \zeta$$

тогда

$$x'' - x = \rho\, h \,.\, \cos \zeta \,.\, \cos H - g \,.\, \cos G$$
$$y'' - y = \rho\, h \,.\, \cos \zeta \,.\, \sin H - g \,.\, \sin G$$
$$z'' - z = \rho\, h \,.\, \sin \zeta$$

а потому

$$k^2 = \rho^2 h^2 - 2g\, h\rho \,.\, \cos \zeta \,.\, \cos (G - H) + g^2$$

Пусть

$$\cos \zeta \,.\, \cos (G - H) = \cos \varphi \qquad (175)$$

тогда

$$k^2 = [h \,.\, \rho - g \,.\, \cos \varphi]^2 + g^2 \,.\, \sin^2 \varphi$$

Если положимъ еще

$$g \,.\, \sin \varphi = A \,; \qquad R \,.\, \sin \psi = B \,; \qquad R'' \,.\, \sin \psi'' = B''$$
$$u = \rho \,.\, h - g \,.\, \cos \varphi \qquad (176)$$

то

$$k^2 = u^2 + A^2$$
$$r^2 = \left[\frac{u + g \,.\, \cos \varphi}{h \,.\, \cos \beta} - R \,.\, \cos \psi \right]^2 + B^2$$
$$r''^2 = \left[\frac{M' (u + g \,.\, \cos \varphi)}{h \,.\, \cos \beta''} - R'' \,.\, \cos \psi'' \right]^2 + B''^2$$

Положимъ наконецъ здѣсь

$$h \,.\, \cos \beta = f \,; \qquad \frac{h \,.\, \cos \beta''}{M'} = f''$$
$$g \,.\, \cos \varphi - f \,.\, R \,.\, \cos \psi = c \qquad (177)$$
$$g \,.\, \cos \varphi - f'' . R'' . \cos \psi'' = c''$$

и представляя три неизвѣстныя величины r, r'' и k въ функціи четвертой u, получимъ

$$k^2 = u^2 + A^2$$
$$r^2 = \left[\frac{u + c}{f} \right]^2 + B^2 \qquad (178)$$
$$r''^2 = \left[\frac{u + c''}{f''} \right]^2 + B''^2$$

Такимъ образомъ для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ величинъ мы имѣемъ три

уравненія, но чтобы получить необходимое число уравненій, мы прибавимъ къ этимъ тремъ четвертое, извѣстное подъ именемъ *уравненія Ламберта*.

Не приступая къ рѣшенію упомянутыхъ сейчасъ уравненій, покажемъ тѣ выраженія, посредствомъ которыхъ удобнѣе всего опредѣлить величины g, G, h, H и ζ.

Для вычисленія g и G служатъ уравненія (173), которыя примутъ болѣе простой видъ, если перенесемъ начало всѣхъ угловъ на уголъ λ; въ самомъ дѣлѣ вычитая изъ всѣхъ угловъ, входящихъ въ эти уравненія, величину λ, приведемъ эти уравненія къ виду

$$(179)\qquad \begin{aligned} R''.\cos(\lambda''-\lambda)-R &= g.\cos(G-\lambda) \\ R''.\sin(\lambda''-\lambda) &= g.\sin(G-\lambda) \end{aligned}$$

Этими уравненіями и будемъ пользоваться для вычисленія g и G.

Сокративъ уравненія (174) на ρ, получимъ

$$(180)\qquad \begin{aligned} M'.\cos\alpha''-\cos\alpha &= h.\cos\zeta.\cos H \\ M'.\sin\alpha''-\sin\alpha &= h.\cos\zeta.\sin H \\ M'.\operatorname{tang}\beta''-\operatorname{tang}\beta &= h.\sin\zeta \end{aligned}$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на $\sin\alpha''$, второе на $\cos\alpha''$, вычтемъ первое произведеніе изъ втораго, а потомъ умножимъ первое уравненіе на $\cos\alpha''$, второе на $\sin\alpha''$ и произведенія сложимъ; послѣ всего этого получимъ два уравненія

$$(181)\qquad \begin{aligned} \sin(\alpha''-\alpha) &= h.\cos\zeta.\sin(H-\alpha'') \\ M'-\cos(\alpha''-\alpha) &= h.\cos\zeta.\cos(H-\alpha'') \end{aligned}$$

Которыя вмѣстѣ съ послѣднимъ изъ уравненій (180) будутъ служить для опредѣленія h, ζ и H.

28. Для опредѣленія разстояній кометы отъ земли или Солнца мы должны пользоваться уравненіями (178), прибавивъ къ нимъ четвертое уравненіе. Это послѣднее легко можетъ быть получено изъ уравненія Эйлера.

Извѣстно, что разложеніе дуги z по ея синусу представляется въ видѣ

$$z=\sin z+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 z}{3}+\frac{3}{2.4}\,\frac{\sin^5 z}{5}+\frac{3.5}{2.4.6}\,\frac{\sin^7 z}{7}+\ldots\ldots\ldots$$

или

$$z-\sin z=\frac{\sin^3 z}{1.2.3}\left[1+\frac{3^2\sin^2 z}{4.5}+\frac{3^2.5.\sin^4 z}{4.6.7}+\ldots\ldots\ldots\right]$$

Примемъ, какъ это сдѣлали при выводѣ уравненія Эйлера

$$\cos z=\frac{a-h}{a}$$

гдѣ

$$h=\frac{r+r''-k}{2}$$

и подъ a разумѣемъ большую полуось описываемаго коническаго сѣченія. Тогда

$$\sin^2 z = \frac{2h}{a}\left(1 - \frac{h}{2a}\right)$$

Слѣдовательно

$$\sin z = \pm\sqrt{\frac{2h}{a}}\sqrt{1 - \frac{h}{2a}}; \qquad \sin^3 z = \left(\frac{2h}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{h}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

поэтому

$$z - \sin z = \frac{1}{6}\left(\frac{2h}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{h}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{3^2}{4.5}\left(\frac{2h}{a}\right)\left(1 - \frac{h}{2a}\right) + \frac{3^2.5}{4.6.7}\left(\frac{2h}{a}\right)^2\left(1 - \frac{h}{2a}\right)^2 + \cdots\cdots\cdots\right]$$

подобнымъ же образомъ

$$z'' - \sin z'' = \frac{1}{2}\left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{g}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{3^2}{4.5}\left(\frac{2g}{a}\right)\left(1 - \frac{g}{2a}\right) + \frac{3^2.5}{4.6.7}\left(\frac{2g}{a}\right)^2\left(1 - \frac{g}{2a}\right)^2 + \cdots\cdots\right]$$

гдѣ

$$g = \frac{r + r'' + k}{2}$$

Внося эти выраженія разностей $z'' - \sin z''$ и $z - \sin z$ въ уравненіе Эйлера представленное въ формѣ (118), легко получимъ

$$\theta' = \frac{(2g)^{\frac{3}{2}}}{6}\left(1 - \frac{g}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{3^2}{4.5}\left(\frac{2g}{a}\right)\left(1 - \frac{g}{2a}\right) + \cdots\cdots\cdots\right]$$
$$- \frac{(2h)^{\frac{3}{2}}}{6}\left(1 - \frac{h}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{3^2}{4.5}\left(\frac{2h}{a}\right)\left(1 - \frac{h}{2a}\right) + \cdots\cdots\cdots\right]$$

Для параболы $a = \infty$, а потому для этой кривой уравненіе Эйлера принимаетъ видъ

$$\theta' = \frac{(2g)^{\frac{3}{2}}}{6} - \frac{(2h)^{\frac{3}{2}}}{6}$$

или

$$6K(t'' - t) = (2g)^{\frac{3}{2}} - (2h)^{\frac{3}{2}}$$

гдѣ подъ K разумѣемъ Гауссову постоянную величину. Такъ какъ по нашему означенію

$$2g = r + r'' + k; \qquad 2h = r + r'' - k$$

то предыдущее уравненіе представляется также въ видѣ

(182) $$6K(t''-t)=[r+r''+k]^{\frac{3}{2}}-[r+r''-k]^{\frac{3}{2}}$$

въ которомъ оно извѣстно подъ именемъ уравненія *Ламберта.*

Если прибавимъ это уравненіе къ тремъ уравненіямъ (178), то будемъ имѣть четыре уравненія необходимыя для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ величинъ r, r'', k и u.

Если подставимъ въ уравненіе *Ламберта* вмѣсто r, r'' и k величины взятыя изъ выраженій (178), то получимъ уравненіе содержащее только одну неизвѣстную величину u. Хотя это уравненіе и будетъ алгебраическое, но степень его будетъ весьма высока, поэтому для опредѣленія изъ него неизвѣстной величины u трудно будетъ употреблять общіе пріемы, существующіе для рѣшенія численныхъ уравненій; гораздо проще опредѣлить изъ него неизвѣстную какимъ либо искуственнымъ пріемомъ. По большей части уравненіе Ламберта рѣшается пробами. Дается обыкновенно величинѣ u какое либо произвольное значеніе и при помощи этого послѣдняго вычисляются величины r, r'' и k по уравненіямъ (178). Значенія r, r'' и k вычисленныя такимъ образомъ вносятся въ уравненіе Ламберта и степень точности, съ которою удовлетворяется это уравненіе найденными величинами r, r'' и k покажетъ сколь вѣрно выбрано значеніе u. Такъ какъ кометы открываются по большей части въ то время, когда находятся между орбитами Марса и земли, то Ольберсъ предлагаетъ начинать рѣшеніе Ламбертова уравненія съ той величины u, которая соотвѣтствуетъ $r+r''=2$. Не трудно однако показать болѣе точное значеніе u.

Положимъ для краткости $r+r''=s$. Тогда уравненіе Ламберта приметъ видъ

$$6K(t''-t)=(s+k)^{\frac{3}{2}}-(s-k)^{\frac{3}{2}}$$

но

$$(s+k)^{\frac{3}{2}}=s^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}s^{\frac{1}{2}}.k+\frac{3}{2.4}s^{-\frac{1}{2}}.k^2+\frac{3}{2.4.6}s^{-\frac{3}{2}}.k^3+\dots\dots\dots$$

$$(s-k)^{\frac{3}{2}}=s^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}s^{\frac{1}{2}}.k+\frac{3}{2.4}s^{-\frac{1}{2}}.k^2-\frac{3}{2.4.6}s^{-\frac{3}{2}}.k^3+\dots\dots\dots$$

Слѣдовательно

$$6K(t''-t)=3s^{\frac{1}{2}}.k-\frac{1}{2.4}s^{-\frac{3}{2}}.k^3-\frac{1.3.3.5}{4.6.8.10}s^{-\frac{7}{2}}.k^5-\dots\dots\dots$$

или

$$2K(t''-t)=s^{\frac{1}{2}}.k-\frac{1}{4.6}s^{-\frac{3}{2}}.k^3-\frac{1.3.5}{4.6.8.10}s^{-\frac{7}{2}}.k^5-\dots\dots\dots$$

Раздѣливъ все это выраженіе на $s^{\frac{3}{2}}$, получимъ

$$\frac{2K(t''-t)}{s^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{s}-\frac{1}{4.6}\left(\frac{k}{s}\right)^3-\frac{1.3.5}{4.6.8.10}\left(\frac{k}{s}\right)^5-\dots\dots\dots$$

Ограничиваясь первымъ членомъ разложенія, получимъ

$$\frac{2K(t''-t)}{\sqrt{s}}=k$$

Пусть для краткости $2K(t''-t)=T$, тогда

$$T^2=k^2(r+r'') \tag{183}$$

Мы видѣли, что r, r'' и k могутъ быть между прочимъ представлены въ формѣ

$$r^2=\frac{\rho^2}{\cos^2\beta}+R^2-2R\rho\frac{\cos\psi}{\cos\beta}$$

$$r''^2=\frac{M'^2.\rho^2}{\cos^2\beta''}+R''^2-2R''M'\rho\frac{\cos\psi''}{\cos\beta''}$$

$$k^2=\rho^2h^2-2gh.\rho.\cos\zeta.\cos(G-H)+g^2$$

Такъ какъ эксцентриситетъ земной орбиты малъ, то можемъ принять $R=1$ и $R''=1$. Кромѣ того величины

$$-2\rho\frac{\cos\psi}{\cos\beta}+\frac{\rho^2}{\cos^2\beta}; \qquad -2M'\rho\frac{\cos\psi''}{\cos\beta''}+\frac{M'^2.\rho^2}{\cos^2\beta''}$$

по большей части малы, а потому предыдущія выраженія r и r'' могутъ быть разложены въ ряды по степенямъ этихъ малыхъ величинъ; ограничиваясь первыми степенями этихъ послѣднихъ, примемъ

$$r=1-\left[\rho\frac{\cos\psi}{\cos\beta}-\frac{\rho^2}{2\cos^2\beta}\right]; \qquad r''=1-\left[M'\frac{\cos\psi''}{\cos\beta''}.\rho-\frac{M'^2.\rho^2}{2\cos^2\beta''}\right]$$

а потому если положимъ для краткости

$$-2g\,h.\cos\zeta.\cos(G-H)=N \tag{184}$$

то уравненіе (183) представится въ видѣ

$$T^2=[h^2.\rho^2-N.\rho+g^2]\left[2-\left(\frac{\cos\psi}{\cos\beta}+M'\frac{\cos\psi''}{\cos\beta''}\right)\rho+\left(\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{M'^2}{\cos^2\beta''}\right)\frac{\rho^2}{2}\right]$$

Вмѣсто чего можно принять

$$h^2.\rho^2+N.\rho+g^2=\frac{T^2}{2}\left[1+\left(\frac{\cos\psi}{\cos\beta}+M'\frac{\cos\psi''}{\cos\beta''}\right)\frac{\rho}{2}-\left(\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{M'^2}{\cos^2\beta''}\right)\frac{\rho^2}{4}\right]$$

Положимъ здѣсь

$$\frac{T^2}{2}-g^2=F'$$

$$N-\frac{T^2}{4}\left[\frac{\cos\psi}{\cos\beta}+M'\frac{\cos\psi''}{\cos\beta''}\right]=G' \tag{185}$$

$$h^2+\frac{T^2}{8}\left[\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{M'^2}{\cos^2\beta''}\right]=H'$$

тогда предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$H'.\rho^2+G'.\rho=F'$$

откуда

$$\rho = -\frac{G'}{2H'} \pm \sqrt{\frac{G'^2}{4H'^2} + \frac{F'}{H'}}$$

удерживая верхній знакъ, представимъ это въ видѣ

$$\rho = -\frac{G'}{2H'} + \sqrt{\frac{F'}{H'}}\sqrt{\frac{G'^2}{4H'^2}\cdot\frac{H'}{F'} + 1}$$

Пусть

(186) $$\frac{2H'}{G'}\sqrt{\frac{F'}{H'}} = \operatorname{tang}\theta$$

тогда

$$\rho = -\frac{G'}{2H'} + \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{F'}{H'}}$$

что представляется въ видѣ

$$\rho = -\sqrt{\frac{F'}{H'}}\left[\frac{G'}{2H'}\sqrt{\frac{H'}{F'}} - \frac{1}{\sin\theta}\right]$$

или

(187) $$\rho = \sqrt{\frac{F'}{H'}}\cdot\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$$

По большей части эта величина ρ весьма близка къ истинной. Во всякомъ случаѣ такимъ выраженіемъ ея можно пользоваться съ большою выгодою при рѣшеніи пробами уравненія Ламберта. Замѣтимъ однако, что при вычисленіи ρ посредствомъ выраженій (184), (185), (186) и (187) слѣдуетъ пользоваться не болѣе какъ пятизначными логариѳмами. Какъ скоро ρ такимъ образомъ будетъ найдено, то съ нимъ по третьему изъ уравненій (176) опредѣлится u и затѣмъ по выраженіямъ (178) найдутся соотвѣтствующія величины r, r'' и k. Такъ какъ найденными этимъ путемъ величинами r, r'' и k Ламбертово уравненіе точно не удовлетворится, то придется измѣнить нѣсколько вычисленную величину u и съ этимъ новымъ ея значеніемъ сдѣлать новую пробу рѣшенія и т. д. до тѣхъ поръ, пока Ламбертово уравненіе не удовлетворится съ точностію немногихъ единицъ седьмаго десятичнаго знака.

Для упрощенія вычисленія въ отдѣльныхъ пробахъ, на основаніи слѣдующихъ соображеній, составлены особыя таблицы.

Такъ какъ $\frac{k}{r + r''}$ есть всегда правильная дробь, то можно положить

$$\frac{k}{r + r''} = \sin\gamma$$

тогда Ламбертово уравненіе легко представится въ видѣ

$$\frac{6K(t'' - t)}{(r + r'')^{\frac{3}{2}}} = (1 + \sin\gamma)^{\frac{3}{2}} - (1 - \sin\gamma)^{\frac{3}{2}}$$

такъ какъ

$$\left[\cos\frac{\gamma}{2} \pm \sin\frac{\gamma}{2}\right]^2 = 1 \pm \sin\gamma$$

то

$$\frac{6K(t''-t)}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}} = \left[\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right]^3 - \left[\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right]^3$$

или

$$\frac{6K(t''-t)}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}} = 6\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) + 2\sin^3\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

или

$$\frac{6K(t''-t)}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}} = 6\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

что можно также представить въ видѣ

$$\frac{6K(t''-t)}{2^{\frac{3}{2}}(r+r'')^{\frac{3}{2}}} = 3\left(\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right) - 4\left(\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)^3$$

Пусть

$$\sin x = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{2}}$$

тогда предыдущее весьма легко приводится къ формѣ

$$\frac{3K(t''-t)}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \sin 3x \tag{188}$$

Пусть

$$\frac{2K(t''-t)}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}} = \eta \tag{189}$$

тогда предыдущее уравненіе обращается въ

$$\sin 3x = \frac{3\eta}{\sqrt{8}}$$

Мы приняли

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{2}\,.\sin x$$

а потому

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\cos 2x}$$

Слѣдовательно

$$\sin\gamma = 2^{\frac{3}{2}}.\sin x.\sqrt{\cos 2x}$$

Но такъ какъ

$$k = (r + r'')\sin\gamma$$

то

$$k = 2^{\frac{3}{2}}(r + r'')\sin x\sqrt{\cos 2x}$$

полагая

$$\mu = \frac{3\sin x.\sqrt{\cos 2x}}{\sin 3x}$$

представляемъ предыдущее въ видѣ

$$k = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}(r + r'')\mu.\sin 3x$$

исключая отсюда $\sin 3x$ посредствомъ уравненія (188), находимъ

(190) $$k = \frac{2K(t' - t)}{\sqrt{r + r''}}.\mu$$

Посредствомъ найденныхъ теперь выраженій рѣшеніе пробами уравненія Ламберта можетъ быть расположено въ слѣдующемъ порядкѣ. Вычисливъ по изложенному выше способу приближенную величину ρ, найдемъ по третьему изъ уравненій (176) соотвѣтствующее ей значеніе u, съ нимъ по уравненіямъ (178) вычислимъ величины r, r'' и k. Какъ скоро r и r'' найдены, то по уравненію (189) вычислимъ η, съ этой величиной какъ аргументомъ изъ особой таблицы находимъ соотвѣтствующее значеніе μ, посредствомъ котораго изъ уравненія (190) вычисляемъ k; согласіе этой величины k съ тою, которую мы нашли по первому изъ уравненій (178), покажетъ на сколько близко къ истинѣ принятое значеніе u.

Легко видѣть каковы должны быть предѣлы аргумента таблицы служащей для вычисленія μ. Зависимость μ отъ η представляется уравненіями

$$\sin 3x = \frac{3\eta}{\sqrt{8}}; \qquad \mu = \frac{3.\sin x\sqrt{\cos 2x}}{\sin 3x}$$

Понятно, что предѣлами аргумента будутъ тѣ значенія η, между которыми $\sin 3x$ остается дѣйствительной и положительной величиной. Такія значенія суть: $\eta = 0$ и $\eta = \frac{\sqrt{8}}{3}$. Эти величины и должны служить предѣлами аргумента таблицы значеній μ.

Какъ скоро пробами достигнемъ того, что значенія k вычисленныя по первому изъ уравненій (178) и уравненію (190) мало разнятся между собою, напр. на нѣсколько единицъ четвертаго десятичнаго знака, то болѣе точное значеніе корня u можно опредѣлить на основаніи слѣдующаго соображенія.

Предположимъ, что истинное искомое значеніе корня u есть x. Пусть два послѣдовательно принятыя гипотически значенія u будутъ a и a', тогда погрѣшности

этихъ гипотезъ представятся разностями $x - a$ и $x - a'$. Пусть разности величинъ, k соотвѣтствующія двумъ гипотезамъ, будутъ v и v'. Если предположимъ, что эти разности пропорціональны погрѣшностямъ гипотезъ, то будемъ имѣть

$$\frac{x-a}{x-a'}=\frac{v}{v'}$$

откуда

$$x=\frac{a.v'-a.v}{v'-v}$$

Придавая и вычитая въ числителѣ по av, найдемъ

$$x=a-v\frac{a'-a}{v'-v} \tag{191}$$

Вычисленное такимъ образомъ значеніе корня u будетъ довольно близко къ истинѣ, если разности v и v' не велики.

24. Какъ скоро изложеннымъ выше способомъ найденъ точный корень u Ламбертова уравненія, то посредствомъ него можетъ быть опредѣлено точное значеніе разстоянія ρ, а слѣдовательно и разстоянія ρ''. При помощи этихъ двухъ разстояній по выраженіямъ (128) и имъ подобнымъ, соотвѣтствующимъ третьему наблюденію могутъ быть вычислены геліоцентрическія координаты кометы, соотвѣтствующія временамъ двухъ крайнихъ наблюденій. Въ зависимости отъ этихъ координатъ легко опредѣлятся искомые элементы орбиты.

Всѣ планеты, искони составляющія солнечную систему, движутся около Солнца въ одну сторону, именно по направленію знаковъ задіака, или точнѣе по тому направленію, по которому возрастаютъ долготы и прямыя восхожденія. Кометы, приходящія въ солнечную систему изъ отдаленныхъ мировыхъ пространствъ, часто движутся около Солнца по направленіямъ обратнымъ съ направленіемъ движенія планетъ. При такомъ обратномъ движеніи геліоцентрическая долгота кометы въ послѣдующемъ наблюденіи будетъ менѣе геліоцентрической долготы предыдущаго наблюденія. При вычисленіи элементовъ должно быть обращено вниманіе на различіе случаевъ прямаго и обратнаго движенія.

На фигурѣ 6 дуга EQ представляетъ эклиптику, въ ν находится точка весенняго равноденствія. Предположимъ, что долготы считаются въ направленіи отъ ν къ A. Если комета, проходя черезъ восходящій узелъ своей орбиты, движется по направленію отъ A къ P, то геліоцентрическія долготы ея возрастаютъ со временемъ и она имѣетъ прямое движеніе. Въ этомъ случаѣ аргументъ широты AP кометы представляется разностію долготы въ орбитѣ и долготы восходящаго узла; слѣдовательно удерживая означенія сдѣланныя въ n^0 14, имѣемъ для прямаго движенія $u=\lambda-\Theta$. При существованіи обратнаго движенія геліоцентрическія долготы кометы уменьшаются со временемъ. Пусть EQ (фиг. 7) будетъ эклиптика и ν точка весенняго равноденствія. Если геліоцентрическія долготы кометы уменьшаются со временемъ, то орбита этого свѣтила должна имѣть положеніе OO_1, и комета, пройдя черезъ восходящій узелъ A, должна двигаться по направленію къ P'. Отложимъ по орбитѣ отъ A дугу $A\nu'$ рав-

пую дугѣ $A\nu$, тогда дуга $\nu'P'$ представитъ собою долготу кометы въ орбитѣ для случая обратнаго движенія. Слѣдовательно для этого случая $AP' = A\nu' - \nu'P'$, или $u = \theta - \lambda$. Сравнивая это съ предыдущимъ, видимъ, что въ прямомъ и обратномъ движеніи аргументы широты имѣютъ между собою противуположные знаки.

Слѣдовательно если уравненія (130) имѣютъ мѣсто для прямаго движенія, то для обратнаго будетъ

$$- \tang i . \sin (l - \theta) = \tang b$$
$$- \tang i . \sin (l'' - \theta) = \tang b''$$

поэтому если представимъ уравненія (130) въ видѣ

$$\pm \tang i . \sin (l - \theta) = \tang b$$
$$\pm \tang i . \sin (l'' - \theta) = \tang b''$$

то верхніе знаки должны быть приняты въ случаѣ прямаго движенія, а нижніе въ случаѣ обратнаго.

Понятно также, что двойной знакъ можетъ быть отнесенъ на счетъ $\tang i$ и тогда въ обратномъ движеніи $\tang i$ долженъ быть принимаемъ за отрицательную величину, а наклоненіе i должно считаться тогда за уголъ лежащій во второй четверти окружности. Такимъ образомъ будемъ принимать, что наклоненіе орбиты заключается въ предѣлахъ 0° и 180° и при геліоцентрическихъ долготахъ уменьшающихся со временемъ будемъ считать за наклоненіе орбиты не величину i опредѣляющуюся изъ уравненій (130) и (131), но ея дополненіе до 180°, т. е. $180° - i$. При такомъ условіи нѣтъ надобности дѣлать различія между прямымъ и обратнымъ движеніемъ кометъ.

Если отличаемъ прямое движеніе отъ обратнаго и принимаемъ i за величину измѣняющуюся въ предѣлахъ 0° и 90°, то долгота восходящаго узла орбиты и ея наклоненіе въ эклиптикѣ должны быть опредѣлены изъ уравненій подобныхъ по виду уравненіямъ (130) и (131), но имѣющихъ два знака, т. е. изъ уравненій

$$(192)\qquad \begin{aligned} \tang i . \sin (l - \theta) &= \pm \tang b \\ \tang i . \cos (l - \theta) &= \pm \frac{\tang b'' - \tang b . \cos (l'' - l)}{\sin (l'' - l)} \end{aligned}$$

гдѣ верхній знакъ долженъ быть удержанъ въ случаѣ прямаго, а нижній въ случаѣ обратнаго движенія.

Аргументы широты $\lambda - \theta$ и $\lambda'' - \theta$ должны быть опредѣляемы изъ уравненій

$$(193)\qquad \tang (\lambda - \theta) = \pm \frac{\tang (l - \theta)}{\cos i}; \qquad \tang (\lambda'' - \theta) = \pm \frac{\tang (l'' - \theta)}{\cos i}$$

гдѣ опять верхній знакъ соотвѣтствуетъ прямому, а нижній обратному движенію кометы.

За остальные элементы параболической орбиты считаются: разстояніе перигелія отъ узла, разстояніе перигелія отъ Солнца и время прохожденія черезъ перигелій. Означивъ эти элементы чрезъ ω, q и T, опредѣлимъ ихъ на основаніи слѣдующихъ со-

ображеній. Полярное уравненіе параболы имѣетъ видъ

$$r = \frac{q}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)}$$

гдѣ v есть истинная аномалія, но $v = \lambda - \pi$, подъ λ мы разумѣемъ долготу въ орбитѣ и подъ π долготу перигелія. Слѣдовательно для временъ перваго и послѣдняго наблюденія имѣемъ

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \cos\frac{\lambda - \pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}}; \qquad \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \cos\frac{\lambda'' - \pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{r''}} \tag{194}$$

умножимъ первое изъ этихъ уравненій на $\cos\frac{\lambda'' - \lambda}{2}$ и затѣмъ вычтемъ изъ обѣихъ частей уравненія но

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \sin\frac{\lambda'' - \lambda}{2} \cdot \sin\frac{\lambda - \pi}{2}$$

тогда получимъ

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos\frac{\lambda'' - \pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{q}} \sin\frac{\lambda'' - \lambda}{2} \cdot \sin\frac{\lambda - \pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \cos(\lambda'' - \lambda)$$

откуда, обращая вниманіе на второе изъ уравненій (192), находимъ

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sin\frac{\lambda - \pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\lambda'' - \lambda}{2} - \frac{1}{\sqrt{r''}} \operatorname{cosec}\frac{\lambda'' - \lambda}{2} \tag{195}$$

присоединивъ къ этому первое изъ уравненій (192), получимъ два уравненія для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ величинъ π и q. Для прямаго движенія аргументъ широты $u = \lambda - \theta$ и $\lambda = \pi + v$, а для обратнаго $u = \theta - \lambda$ и $\lambda = \pi - v$, но такъ какъ для обоихъ родовъ движенія $u = \omega + v$, то для прямаго движенія $\pi = \omega + \theta$, а для обратнаго $\pi = \theta - \omega$.

Такъ какъ по уравненіямъ (193) извѣстны для временъ наблюденія долготы свѣтилъ въ орбитѣ, то посредствомъ нихъ при помощи долготы перигелія могутъ быть вычислены истинныя аномаліи для тѣхъ же временъ. Именно для прямаго движенія $v = \lambda - \pi$ и для обратнаго $v = \pi - \lambda$.

Остается опредѣлить время прохожденія кометы черезъ перигелій. Въ n^o 6 мы видѣли, что площадь сектора, описаннаго радіусомъ векторомъ въ теченіи промежутка времени t, можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{K.t}{2}\sqrt{p}$$

Для параболы $p = 2q$. Слѣдовательно если означимъ чрезъ F удвоенную площадь сектора описанную параболическимъ радіусомъ векторомъ въ теченіи промежутка времени, отдѣляющаго первое наблюденіе отъ третьяго, то

$$F = K(t'' - t)\sqrt{2q} \tag{196}$$

Общее выраженіе удвоенной площади сектора представленное въ полярныхъ координатахъ есть

$$\int r^2 . dv$$

Слѣдовательно

$$K(t''-t)\sqrt{2q}=\int_v^{v''} r^2 . dv$$

но для параболы

$$r=\frac{q}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)}$$

поэтому

$$K(t''-t)\sqrt{2q}=\int_v^{v''}\frac{q^2}{\cos^4\left(\frac{v}{2}\right)}\cdot dv$$

такъ какъ

$$\int\frac{dv}{\cos^4\left(\frac{v}{2}\right)}=\int\left[1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]\frac{dv}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)}=2\int\left[1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]d\left(\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)$$

то

$$(197)\qquad K(t''-t)\sqrt{2q}=2q^2\left[\operatorname{tang}\left(\frac{v''}{2}\right)-\operatorname{tang}\left(\frac{v}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}^3\left(\frac{v''}{2}\right)-\operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right)\right)\right]$$

Если подъ t'' будемъ разумѣть здѣсь время прохожденія черезъ перигелій, которое означимъ чрезъ T, то для этого времени $v''=0$, ибо всѣ аномаліи считаются отъ перигелія. Тогда предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$K(T-t)\sqrt{2q}=-2q^2\left[\operatorname{tang}\left(\frac{v}{2}\right)+\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right)\right]$$

откуда искомое

$$(198)\qquad T=t-\frac{\sqrt{2}}{K}q^{\frac{3}{2}}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{v}{2}\right)+\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right)\right]$$

что представимъ въ видѣ

$$T=t-\frac{\sqrt{2}}{75 . K}q^{\frac{3}{2}}\left[75 . \operatorname{tang}\left(\frac{v}{2}\right)+25 . \operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right)\right]$$

Пусть

$$(199)\qquad n=\frac{\sqrt{2}}{75 . K},\qquad M=\left[75 . \operatorname{tang}\left(\frac{v}{2}\right)+25 . \operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right)\right]$$

тогда

(200) $$T = t - n \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot M$$

Этими выраженіями мы и должны пользоваться для вычисленія времени прохожденія кометы черезъ перигелій. Для вычисленія T по времени третьяго наблюденія имѣемъ

$$T = t'' - n \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot M''$$

гдѣ M'' есть такая же функція отъ v'', какъ M отъ v.

Въ предыдущихъ выраженіяхъ $\log n = 0.0398723$. Что касается до M, то для вычисленія этой функціи Баркеромъ составлены особыя таблицы расположенныя по аргументу истинной аномаліи. Согласіе двухъ величинъ T вычисленныхъ по времени перваго и третьяго наблюденія покажетъ вѣрность всего вычисленія кометной орбиты.

25. Чтобы пояснить изложенную теорію на частномъ примѣрѣ вычислимъ элементы орбиты большой кометы Coggia.

Посредствомъ меридіаннаго круга Кіевской обсерваторіи, мною опредѣлены между прочимъ слѣдующія видимыя координаты кометы

	сред. кіев. вр.	AR ☄	Decl. ☄
1874 года, 3-го Іюля . .	$12^h\ 51^m\ 46^s.12$	$7^h\ 38^m\ 54^s.16$	$+63°\ 27'\ 28''.55$
7-го Іюля . .	12 40 11 .35	7 43 4 .71	+59 18 32 .22
11-го Іюля . .	12 27 30 .47	7 46 6 .55	+52 32 21 .71

Этими тремя положеніями мы и будемъ пользоваться для вычисленія орбиты. Для указанныхъ временъ наблюденій истинныя координаты центра Солнца суть

	долготы солн.	логар. разст. зем. отъ солн.
3 Іюля . . .	$101°\ 44'\ 42''.07$	0.0072071
7 Іюля . . .	105 33 1 .48	0.0071927
11 Іюля . . .	109 21 25 .92	0.0071433

Принимая для временъ наблюденій видимыя наклоненія эклиптики къ экватору равными

$23°\ 27'\ 27''.43$
23 27 27 .48
23 27 27 .53

Обращаемъ склоненія и прямыя восхожденія кометы въ широты и долготы и находимъ

	долготы ☄	широты ☄
3 Іюля	$104°\ 23'\ 25''.78$	$+41°\ 13'\ 52''.47$
7 Іюля	106 11 46 .79	+37 17 34 .56
11 Іюля	108 25 46 .42	+30 46 0 .69

Поправки этихъ координатъ отъ аберраціи неподвижныхъ звѣздъ и приведенія къ среднему равноденствію начала 1874 года суть слѣдующія:

АБЕР. ВЪ ДОЛГ.	АБЕР. ВЪ ШИР.	ПРЕЦЕССІЯ ВЪ ДОЛГ.	НУТАЦІЯ.
$+26''.70$	$-0''.62$	$25''.18$	$+8''.55$
$+26\ .13$	$-0\ .14$	$25\ .73$	$+8\ .34$
$+23\ .39$	$-0\ .17$	$26\ .38$	$+8\ .15$

Чтобы освободить положенія кометы отъ вліянія параллакса приведемъ ихъ къ фиктивнымъ мѣстамъ наблюденій. Поправки координатъ Солнца соотвѣтствующія этимъ приведеніямъ суть:

ПОПРАВКИ ДОЛГОТЪ	ПОПРАВКИ log. РАЗСТ.
$+2''.26$	$+0.0000250$
$+1\ .87$	$+0.0000277$
$+1\ .86$	$+0.0000315$

Вводя всѣ эти поправки и приводя времена наблюденій къ Гринвичскому меридіану, составляемъ слѣдующія данныя для вычисленія орбиты

Ср. грин. вр.	α ☄	β ☄	λ	log R
1874, Іюля 3 . 45122	$104^\circ\ 23'\ 35''.85$	$+41^\circ\ 13'\ 51''.85$	$101^\circ\ 44'\ 27''.70$	0.0072321
7 . 44317	106 11 55 . 53	27 17 34 . 42	105 32 45 . 96	0.0072204
11 . 43437	108 25 51 . 58	30 46 0 . 52	109 21 9 . 55	0.0071748

посредствомъ этихъ данныхъ изъ уравненій (167), (170), (179), (181), (175), (176) и (181) находимъ

$$
\begin{array}{rlrl}
\log M = & 9.9041342 & & \\
\log g = & 9.1802390 & G = & 195^\circ\ 36'\ 13''.13 \\
\log h = & 9.6531026 & H = & 208\ \ 37\ \ 55\ .87 \\
\log f = & 9.5293537 & \zeta = - & 62\ \ 28\ \ 44\ .48 \\
\log f'' = & 9.6830911 & \varphi = & 82\ \ 14\ \ 54\ .55 \\
A^2 = & 0.0178856 & \psi = & 41\ \ 18\ \ \ 3\ .84 \\
B^2 = & 0.4503732 & \psi'' = & 30\ \ 46\ \ 45\ .40 \\
B''^2 = & 0.2706668 & & \\
C = & -0.2402425 & & \\
C'' = & -0.4028443 & &
\end{array}
$$

Имѣя эти величины, приступимъ къ рѣшенію уравненія Ламберта.

Прежде всего по выраженіямъ (184), (185), (186) и (187), употребляя четырехзначные логариѳмы, находимъ

$$\log N = 8{,}2143_n; \quad F = +0.0195; \quad G' = -0.0503; \quad H' = +0.2272$$

$$\theta = 110^\circ\ 43'; \quad \log \rho = 9.6272$$

Съ найденной теперь величиной ρ по послѣднему изъ уравненій (176) имѣемъ $u = 0.1725$. Примемъ круглымъ числомъ $u = 0.1800$ и съ этою величиною изъ уравненій (178) находимъ

$$k^2 = 0.0503; \qquad r^2 = 0.4821; \qquad r''^2 = 0.4844$$

изъ уравненія (189) посредствомъ этихъ величинъ r и r'' имѣемъ $\eta = 0.1675$; съ этой

величиной какъ аргументомъ изъ упомянутой выше таблицы находимъ $\log\mu = 0.00048$ и по уравненію (190) имѣемъ $\log k = 9.3677$, тогда какъ $\log k$ вычисленный по первому изъ уравненій (178) есть $\log k = 9.3507$. Такимъ образомъ видимъ, что принятая величина u слишкомъ мала. Увеличивъ ее, положимъ круглымъ числомъ $u = 0.2000$ и съ этой величиной въ томъ же порядкѣ какъ прежде находимъ

$$k^2 = 0.0579\,; \qquad r^2 = 0.4645\,; \qquad r''^2 = 0.4477$$
$$\eta = 0.1750\,; \quad \log\mu = 0.00056\,; \quad \log k = 0.3741$$

Такъ какъ мы уже сдѣлали двѣ гипотезы касательно величины u, то можемъ для вычисленія ея точнаго значенія употребить пріемъ изложенный въ концѣ n° 23. Въ нашемъ случаѣ

$$a = 0.1800\,; \qquad a' = 0.2000\,; \qquad v = +\,0.0090\,; \qquad v' = -\,0.0039$$

поэтому уравненіе (191) даетъ $u = 0.19395$. Продолжая такимъ образомъ, находимъ, что точная величина

$$u = 0.1940224$$

Вмѣстѣ съ этой величиной u мы находимъ изъ выраженій (178)

$$k = 0.2356503\,; \qquad \log r = 9.8356026\,; \qquad \log r'' = 9.8305873$$

Посредствомъ полученной точной величины u по третьему изъ уравненій (176) и уравненію $\rho'' = M'\rho$ вычисляемъ

$$\log\rho = 9.6736976\,; \qquad \log\rho'' = 9.5778318$$

Послѣ чего изъ уравненій (128) и (128_*) имѣемъ

$$l = 279^\circ\ 26'\ 59''.00\,; \qquad b = +\,37^\circ\ \ 7'\ 57''.28\,; \qquad \log r = 9.8356027$$
$$l'' = 289\ \ 53\ \ 55\ .53\,; \qquad b'' = +\,19\ \ 25\ \ 49\ .99\,; \qquad \log r'' = 9.8305873$$

Согласіе найденныхъ теперь величинъ радіусовъ векторовъ съ предыдущими ихъ величинами вычисленными по уравненіямъ (178), доказываетъ вѣрность всего вычисленія.

Имѣя геліоцентрическія координаты, переходимъ къ вычисленію элементовъ орбиты. Такъ какъ въ нашемъ случаѣ $l'' > l$, то заключаемъ, что разсматриваемая комета имѣетъ прямое движеніе. Поэтому въ выраженіяхъ (192) и (193) удержимъ верхніе знаки и находимъ

$$\theta = 118^\circ\ 45'\ 41''.70\,; \qquad \lambda = 257^\circ\ 33'\ 31''.42$$
$$i = \ 66\ \ 24\ \ 22\ .35\,; \qquad \lambda'' = 277\ \ 28\ \ 35\ .27$$

здѣсь подъ λ и λ'' мы разумѣемъ долготы кометы въ орбитѣ соотвѣтствующія временамъ перваго и третьяго наблюденія.

Затѣмъ по первому изъ уравненій (194) и уравненію (195) находимъ

$$\pi = 271^\circ\ 18'\ 47''.98\,; \qquad \log q = 9.8293304$$

Наконецъ примѣняя таблицы Баркера изъ уравненія (200) получаемъ

$$T = 9.06204$$

Такъ какъ величина T, вычисленная по времени третьяго наблюденія совершенно согласна съ этой, то заключаемъ, что все вычисленіе вѣрно.

И такъ по тремъ Кіевскимъ наблюденіямъ мы нашли слѣдующую систему элементовъ орбиты кометы Coggia:

$$\begin{aligned} T &= 1874,\ \text{Іюля}\ 9.06204\ \text{ср. Гринп. вр.} \\ \theta &= 118^\circ\ 45'\ 41''.70 \\ i &= \ \ 66\ \ 24\ \ 22\ .35 \\ \pi &= 271\ \ 18\ \ 47\ .98 \\ \log q &= 9.8293304 \end{aligned} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{сред. равнд. 1874.0}$$

Движеніе прямое.

Если вычислимъ по этимъ элементамъ геоцентрическое положеніе свѣтила соотвѣтствующее времени средняго наблюденія, то найдемъ, что разности вычисленныхъ координатъ и координатъ выведенныхъ изъ непосредственныхъ наблюденій суть: въ долготѣ, т. е. $\alpha' - \alpha = -11''.58$ и въ широтѣ, т. е. $\beta' - \beta = -3''.77$. Здѣсь подъ β и α мы разумѣемъ координаты вычисленныя по элементамъ. Такое согласіе наблюдаемыхъ и вычисленныхъ координатъ средняго мѣста, показываетъ, что по крайней мѣрѣ три наблюденія избранныя для вычисленія орбиты дѣйствительно могутъ быть представлены параболой.

26. Опредѣляя отношеніе проложенныхъ на эклиптику разстояній ρ и ρ'' кометы отъ земли по уравненію (171) мы приняли

$$\frac{n}{n''} = \frac{N}{N''}$$

и такимъ образомъ отвергли послѣдній членъ уравненія (169). Подобное допущеніе будетъ довольно близко къ истинѣ только тогда, когда наблюденія, лежащія въ основаніи вычисленія орбиты, будутъ отдѣлены между собою малыми промежутками времени, когда эти промежутки будутъ между собою приблизительно равны и когда, наконецъ, геліоцентрическое движеніе кометы между разсматриваемыми наблюденіями не велико. Если же эти условія не выполняются въ данномъ случаѣ, то не приступая еще къ вычисленію элементовъ, слѣдуетъ исправить найденную величину отношенія ρ'' къ ρ при помощи вычисленныхъ уже значеній r и r''.

Какъ извѣстно отношеніе

$$\frac{n}{n''} = \frac{r'.r''.\sin(v''-v)}{r.r'.\sin(v'-v)}$$

Если вычисленіе кометной орбиты по изложенному выше способу доведено до конца, то по приближенно извѣстнымъ элементамъ легко могутъ быть вычислены величины r' и v'. Что касается до r, r'', v'' и v, то эти величины находятся, какъ мы видѣли, при самомъ вычисленіи элементовъ, первыя же двѣ изъ нихъ приближенно извѣстны еще до вычисленія элементовъ. Чтобы сохранить однако принципъ К. Ф. Гаусса и совершенно отдѣлить вычисленіе разстояній отъ вычисленія элементовъ, необходимо имѣть способъ, по которому можно было бы безъ знанія элементовъ опредѣлить ве-

личину $\frac{n}{n''}$ по r и r'' и при томъ съ такою точностію, съ какою извѣстны r и r''. Для рѣшенія задачи въ этомъ видѣ можно указать нѣсколько пріемовъ, но наиболѣе изящный изъ нихъ предложенъ Ф. В. Бесселемъ и развитъ имъ въ примѣчательномъ мемуарѣ: „Beitrag zur Kometentheorie", помѣщенномъ во второй тетради журнала Astronomische Abhandlungen.

Сущность этой методы заключается въ слѣдующемъ. Мы имѣемъ въ виду опредѣлить величину отношенія $\frac{n}{n''}$ для параболы, а потому вмѣсто r, r' и т. д. внесемъ въ предыдущее выраженіе $\frac{n}{n''}$ величины

$$r=\frac{q}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)};\qquad r'=\frac{q}{\cos^2\left(\frac{v'}{2}\right)}\quad \text{и т. д.}$$

тогда упомянутое отношеніе представится въ видѣ

$$\frac{n}{n''}=\frac{\sin(v''-v')}{\sin(v'-v)}\frac{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{v''}{2}\right)}$$

или

$$\frac{n}{n''}=\frac{\left[2.\sin\frac{v''}{2}\cos\frac{v''}{2}\left(\cos^2\left(\frac{v'}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{v'}{2}\right)\right)-2.\sin\frac{v'}{2}\cdot\cos\frac{v'}{2}\left(\cos^2\left(\frac{v''}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{v''}{2}\right)\right)\right]\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)}{\left[2.\sin\frac{v'}{2}\cos\frac{v'}{2}\left(\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{v}{2}\right)\right)-2.\sin\frac{v}{2}\cdot\cos\frac{v}{2}\left(\cos^2\left(\frac{v'}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{v'}{2}\right)\right)\right]\cos^2\left(\frac{v''}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left[\operatorname{tang}\frac{v''}{2}\cos\frac{v'}{2}-\sin\frac{v'}{2}\right]\left[\cos\frac{v'}{2}+\sin\frac{v'}{2}\operatorname{tang}\frac{v''}{2}\right]}{\left[\sin\frac{v'}{2}-\operatorname{tang}\frac{v}{2}\cos\frac{v'}{2}\right]\left[\cos\frac{v'}{2}+\sin\frac{v'}{2}\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right]}$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя на $\cos\frac{v'}{2}$, найдемъ

$$\frac{n}{n''}=\frac{\left[\operatorname{tang}\frac{v''}{2}-\operatorname{tang}\frac{v'}{2}\right]\left[1+\operatorname{tang}\frac{v'}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{v''}{2}\right]}{\left[\operatorname{tang}\frac{v'}{2}-\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right]\left[1+\operatorname{tang}\frac{v'}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right]}\tag{201}$$

По выраженію (196) удвоенная площадь параболическаго сектора описаннаго въ промежутокъ времени $t''-t$ представляется въ видѣ $K(t''-t)\sqrt{2q}$. Выраженіе той же площади представленной въ функціи истинныхъ аномалій имѣетъ видъ (197). Поэтому заключаемъ, что удвоенныя площади секторовъ описанныя радіусомъ векторомъ въ промежутки времени $t''-t'$ и $t'-t$ могутъ быть представлены выраженіями

$$K(t''-t')\sqrt{2q}=2q^2\left[\operatorname{tang}\frac{v''}{2}-\operatorname{tang}\frac{v'}{2}+\frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}^2\left(\frac{v''}{2}\right)-\operatorname{tang}^3\left(\frac{v'}{2}\right)\right)\right]$$

$$K(t'-t)\sqrt{2q}=2q^2\left[\operatorname{tang}\frac{v'}{2}-\operatorname{tang}\frac{v}{2}+\frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}^3\left(\frac{v'}{2}\right)-\operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right)\right)\right]$$

полагая здѣсь для краткости

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2}=\theta;\qquad \operatorname{tang}\frac{v'}{2}=\theta';\qquad \operatorname{tang}\frac{v''}{2}=\theta''$$

$$\frac{3K}{\sqrt{2}}(t''-t')=\tau;\qquad \frac{3K}{\sqrt{2}}(t'-t)=\tau''$$

легко приведемъ предыдущія уравненія къ виду

$$(202)\qquad \begin{aligned}\tau&=q^{\frac{3}{2}}(\theta''-\theta')[3+\theta''^2+\theta'.\theta''+\theta'^2]\\ \tau''&=q^{\frac{3}{2}}(\theta'-\theta)[3+\theta^2+\theta.\theta'+\theta'^2]\end{aligned}$$

или

$$\tau-q^{\frac{3}{2}}(\theta''-\theta')^3=3q^{\frac{3}{2}}(\theta''-\theta')(1+\theta''.\theta')$$

$$\tau''-q^{\frac{3}{2}}(\theta'-\theta)^3=3q^{\frac{3}{2}}(\theta'-\theta)(1+\theta.\theta')$$

Пусть для краткости

$$(203)\qquad (\theta''-\theta')\sqrt{q}=u;\qquad (\theta'-\theta)\sqrt{q}=u''$$

тогда два предыдущія уравненія представятся въ видѣ

$$\tau-u^3=3q^{\frac{3}{2}}(\theta''-\theta')(1+\theta'.\theta'')$$

$$\tau''-u''^3=3q^{\frac{3}{2}}(\theta'-\theta)(1+\theta.\theta')$$

Раздѣливъ эти уравненія одно на другое, найдемъ

$$\frac{\tau-u'^3}{\tau''-u''^3}=\frac{(\theta''-\theta')(1+\theta''.\theta')}{(\theta'-\theta)(1+\theta.\theta')}$$

Но такъ какъ при сдѣланныхъ означеніяхъ уравненіе (201) принимаетъ видъ

$$\frac{n}{n''}=\frac{(\theta''-\theta')(1+\theta'.\theta'')}{(\theta'-\theta)(1+\theta.\theta')}$$

то заключаемъ, что

$$(204)\qquad \frac{n}{n''}=\frac{\tau-u^3}{\tau''-u''^3}$$

И такъ видимъ, что опредѣленіе отношенія $\frac{n}{n''}$ приводится къ вычисленію двухъ функцій u и u'', которыя могутъ быть представлены въ зависимости отъ извѣстныхъ величинъ r, r'', τ и τ''.

Чтобы имѣть уравненія для опредѣленія функцій u и u'', замѣтимъ, что уравненія (203) даютъ

$$(205)\qquad \theta'=\theta''-\frac{u}{\sqrt{q}};\qquad \theta'=\theta+\frac{u''}{\sqrt{q}}$$

кромѣ того полярное уравненіе описанной кривой для времени перваго и третьяго наблюденія даетъ

$$\frac{r}{q}=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)}; \qquad \frac{r''}{q}=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{v''}{2}\right)}$$

или

$$\theta^2=\frac{r}{q}-1; \qquad \theta''^2=\frac{r''}{q}-1 \tag{206}$$

Подставимъ величины θ' изъ выраженій (205) въ уравненія (202), тогда получимъ

$$\tau=u\,[3q\,(1+\theta''^2)-3\theta''.\,u\sqrt{q}+u^2]$$
$$\tau''=u''[3q\,(1+\theta^2)+3\theta\,.\,u''\sqrt{q}+u''^2]$$

Обращая вниманіе на (206), легко приводимъ это къ виду

$$\begin{aligned}\tau&=u\,[3r''-3\theta''.\,u\sqrt{q}+u^2]\\ \tau''&=u''[3r+3\theta\,.\,u''\sqrt{q}+u''^2]\end{aligned} \tag{207}$$

Вычитая уравненія (205) и отдѣльно уравненія (206), находимъ

$$u''+u=\theta''\sqrt{q}-\theta\sqrt{q}; \qquad r''-r=\theta''^2.\,q-\theta^2.\,q$$

Слѣдовательно

$$\frac{r''-r}{u''+u}=\theta''.\sqrt{q}+\theta.\sqrt{q}$$

Складывая это съ первымъ изъ предыдущихъ уравненій, а потомъ вычитая отсюда тоже уравненіе, имѣемъ

$$2\theta''.\sqrt{q}=\frac{r''-r}{u''+u}+u''+u; \qquad 2\theta\,.\sqrt{q}=\frac{r''-r}{u''+u}-(u''+u)$$

Вносяя это въ уравненія (207), получимъ

$$2\tau=u\left[6r''-3u\left(\frac{r''-r}{u''+u}\right)-3u\,.\,u''-u^2\right]$$
$$2\tau''=u''\left[6r+3u''\left(\frac{r''-r}{u''+u}\right)-3u\,.\,u''-u''^2\right]$$

Эти два уравненія содержатъ двѣ неизвѣстныя величины u и u'' и могутъ служить для опредѣленія этихъ послѣднихъ. Но чтобы упростить опредѣленіе неизвѣстныхъ изъ этихъ уравненій, подвергнемъ ихъ слѣдующимъ преобразованіямъ.

Складывая эти уравненія, легко получимъ

$$2\,(\tau+\tau'')=3\,(r+r'')\,(u+u'')-(u''+u)^3 \tag{208}$$

если же помножимъ первое изъ предыдущихъ уравненій на u'', а второе на u и

вычтемъ первое произведеніе изъ втораго, то получимъ

(209) $$2(\tau''.u - \tau.u'') = u.u''[3(r - r'') + u^2 - u''^2]$$

Положимъ въ этихъ уравненіяхъ

$$u'' + u = 2z; \qquad u'' - u = 2z'$$

Сначала перемножая эти два уравненія, а потомъ вычитая ихъ квадраты одинъ изъ другаго, легко получимъ

$$4zz' = u''^2 - u^2; \qquad z^2 - z'^2 = u.u''$$

Принимая это во вниманіе, придадимъ и вычтемъ въ первой части уравненія (209) сумму $\tau''.u'' + \tau.u$, тогда это послѣднее приведется къ виду

(210) $$2(\tau'' - \tau).z - 2(\tau'' + \tau).z' = (z^2 - z'^2)[3(r - r'') - 4zz']$$

Уравненіе же (208) отъ введенія въ него перемѣнныхъ z и z' представится въ видѣ

(211) $$\tau'' + \tau = 3(r'' + r).z - 4z^3$$

Располагая уравненіе (210) по степенямъ z', имѣемъ

$$z'^3 - \frac{3}{4}\frac{r - r''}{z}.z'^2 + \left[\frac{\tau'' + \tau}{2z} - z^2\right]z' = \frac{\tau'' - \tau}{2} - \frac{3}{4}(r - r'').z$$

Внося сюда вмѣсто $\tau'' + \tau$ его величину изъ уравненія (211) и полагая для краткости

$$A' = \frac{3}{4}\left(\frac{r - r''}{z}\right)$$

(212) $$B' = 3\left[\frac{r'' + r}{2} - z^2\right]$$

$$C' = \frac{\tau'' - \tau}{2} - \frac{3}{4}(r - r'')z$$

находимъ

(213) $$z'^3 - A'.z'^2 + B'.z' = C'$$

Отъ рѣшенія двухъ кубичныхъ уравненій (211) и (213) зависитъ рѣшеніе нашего вопроса. Какъ скоро изъ этихъ уравненій будутъ найдены величины z и z' соотвѣтствующія вопросу, то по соотношеніямъ $u'' + u = 2z$ и $u'' - u = 2z$ опредѣлятся числовыя величины функцій u'' и u, посредствомъ которыхъ изъ уравненія (204) опредѣлится величина отношенія $\frac{n}{n''}$.

Посмотримъ прежде всего въ какой формѣ могутъ быть представлены корни уравненія (211). Раздѣливъ это уравненіе на $(r + r'')^{\frac{3}{2}}$, найдемъ

$$\frac{\tau + \tau''}{(r + r'')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3z}{\sqrt{r + r''}} - \frac{4z^3}{(r + r'')^{\frac{3}{2}}}$$

Пусть

$$\frac{z}{\sqrt{r+r''}} = \sin\frac{x}{3} \tag{214}$$

тогда предыдущее обращается въ

$$\frac{\tau+\tau''}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}} = 3\sin\left(\frac{x}{3}\right) - 4.\sin^3\left(\frac{x}{3}\right)$$

но легко видѣть, что

$$3\sin\left(\frac{x}{3}\right) - 4.\sin^3\left(\frac{x}{3}\right) = \sin x$$

Слѣдовательно

$$\frac{\tau+\tau''}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}} = \sin x \tag{215}$$

Такимъ образомъ, если по этому выраженію, первая часть котораго извѣстна, вычислимъ x, то корни уравненія (211) найдутся по выраженію (214), имѣющему видъ

$$z = \sqrt{r+r''}.\sin\left(\frac{x}{3}\right) \tag{216}$$

Въ этой формѣ заключаются три корня уравненія (211), одинъ изъ этихъ корней, какъ извѣстно, отрицательный и долженъ быть отвергнуть какъ не соотвѣтствующій вопросу, два другіе корня положительны и выборъ одного изъ нихъ долженъ основываться на томъ, что x менѣе 90^0 въ томъ случаѣ, когда геліоцентрическое движеніе кометы между двумя крайними наблюденіями менѣе 180^0, если же это движеніе болѣе 180^0, то и $x > 90^0$.

Если z опредѣлено, то изъ кубическаго уравненія (213) легко можетъ быть найдено значеніе z' соотвѣтствующее вопросу, ибо это уравненіе, какъ видно, имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень.

Какъ скоро по найденнымъ въ первомъ приближеніи величинамъ r и r'' и другимъ даннымъ вопроса будетъ вычислено по изложенному теперь способу отношеніе $\frac{n}{n''}$, то съ этимъ послѣднимъ опредѣлится болѣе точная величина отношенія ρ'' къ ρ, которая послужитъ основаніемъ второму приближенію вычисленія разстояній кометы отъ Солнца въ двухъ крайнихъ наблюденіяхъ.

Уравненіе (169) можно представить въ видѣ

$$\rho'' = \rho\left[\frac{n}{n''}M + \frac{M_0}{\rho}\left(\frac{n}{n''} - \frac{N}{N''}\right)\right] \tag{217}$$

гдѣ

$$M_0 = \frac{R.\operatorname{tang}\beta'.\sin(\lambda'-\lambda)}{\operatorname{tang}\beta''.\sin(\alpha'-\lambda') - \operatorname{tang}\beta'.\sin(\alpha''-\lambda')} \tag{218}$$

$$N = R'.R''.\sin(\lambda''-\lambda'); \qquad N'' = R.R'\sin(\lambda'-\lambda)$$

По величинамъ r, r'' и ρ найденнымъ въ первомъ приближеніи мы можемъ вычислить коэффиціентъ при ρ въ уравненіи (217). Этотъ коэффиціентъ и будетъ представлять собою величину отношенія ρ'' къ ρ для втораго приближенія. Найденная такимъ образомъ величина отношенія должна быть поставлена на мѣсто M' при вычисленіи h, H и ζ изъ уравненій (180) во второмъ приближеніи. Та же величина для M' должна быть принята при вычисленіи f'' по второму изъ уравненій (177).

Если наблюденія кометы, принятыя въ основаніе вычисленія орбиты, отдѣлены между собою равными и небольшими промежутками времени и если кромѣ того геліоцентрическое движеніе кометы не велико, то съ увѣренностію можно сказать, что въ вычисленіи $\frac{n}{n''}$ по изложенному теперь способу не представится надобности, и элементы вычисленные на основаніи величинъ ρ, r и r'' найденныхъ въ первомъ приближеніи представятъ съ желаемою точностію положеніе кометы, соотвѣтствующее времени средняго наблюденія. Если же упомянутое выше условіе не выполняется, то вычисленіе отношенія $\frac{n}{n''}$ по способу Ф. В. Бесселя дѣлается неизбѣжнымъ при изысканіи системы элементовъ кометной орбиты.

27. Мы нашли элементы орбиты кометы Coggia по наблюденіямъ отдѣленнымъ между собою весьма небольшими промежутками времени; чтобы пояснить изложенную теперь теорію, вычислимъ орбиту той же кометы по другимъ наблюденіямъ, болѣе отделеннымъ одно отъ другаго. Въ основаніе вычисленія мы примемъ одно наблюденіе произведенное въ Копенгагенѣ и два наблюденія сдѣланныя въ Кіевѣ. Первое изъ этихъ двухъ Кіевскихъ наблюденій получено мною посредствомъ десятидюймоваго рефрактора, а послѣднее—посредствомъ меридіаннаго круга.

Изъ этихъ трехъ наблюденій выведены слѣдующія видимыя координаты кометы

1874 года	AR ☊	Decl. ☊
27 мая, $10^h\ 40^m\ 26^s.0$ срд. Копенг. вр. . .	$6^h\ 38^m\ 47^s.86$	$+68°\ 51'\ 48''.40$
18 іюня, 16 23 13.8 звзд. Кіев. вр. . . .	7 14 34.99	+68 41 45.23
10 іюля, 19 45 13.8 звзд. Кіев. вр. . . .	7 45 27.89	+54 33 5.90

Для трехъ упомянутыхъ моментовъ наблюденія находимъ изъ Nautical Almanac слѣдующія истинныя координаты Солнца

	долготы солнца.	логар. разст. земли отъ солнца.
27 мая	66° 22′ 1″.76	0.0059200
18 іюня. . . .	87 21 15.24	0.0070251
10 іюля. . . .	108 24 19.31	0.0071593

Принимая во вниманіе видимыя наклоненія эклиптики къ экватору, обращаемъ склоненія и прямыя восхожденія кометы въ широты и долготы и находимъ

	долготы ☊	широты ☊
27 мая.	94° 58′ 44″.41	+45° 34′ 26″.67
18 іюня	99 36 5.23	+45 51 33.09
10 іюля	107 49 34.10	+32 42 53.84

Поправки этихъ координатъ отъ аберраціи неподвижныхъ звѣздъ и приведенія къ среднему равноденствію начала 1874 года суть слѣдующія:

абер. въ долг.	абер. въ шир.	прецессія въ долг.	нутація.
$+25''.15$	$-7''.02$	$20''.09$	$+10''.45$
$+28.20$	-3.12	23.11	$+9.36$
$+23.89$	$+0.13$	26.14	$+8.19$

Поправки координатъ Солнца соотвѣтствующія приведеніямъ къ фиктивнымъ мѣстамъ наблюденій суть:

поправ. долготъ.	поправки log разст.
$+0''.66$	$+0.0000174$
-0.59	$+0.0000191$
$+1.57$	$+0.0000300$

Вводя всѣ эти поправки и приводя времена наблюденій къ Гринвичскому меридіану, составимъ слѣдующія данныя для вычисленія орбиты

сред. Гринв. вр.	α ☊	β ☊	λ	log R
1874, Янв. 147.40980	94° 58′ 59″.92	+45° 34′ 19″.65	66° 21′ 52″.78	0.0059374
169.35665	99 36 19 .68	45 51 30 .57	87 21 0 .90	0.0070442
191.43664	107 49 40 .04	32 42 53 .97	108 24 2 .93	0.0071893

Вычислимъ прежде всего тѣ величины, которыя остаются постоянными во всѣхъ послѣдовательныхъ приближеніяхъ. Эти величины суть: M, M_0, $\frac{N}{N''}$, G, g, B^2, B''^2. Вычисляя ихъ по выраженіямъ (167), (218), (179), (172) и (176), находимъ

$$\log M = 9.5508386 \qquad G = 177^\circ\ 10'\ 4''.15$$
$$\log M_0 = 0.2224929_n \qquad \log g = 9.8622829$$
$$\frac{N}{N''} = 1.0058511 \qquad B^2 = 0.6396567$$
$$B''^2 = 0.3020035$$

За главную неизвѣстную величину мы будемъ считать отношеніе $\frac{\rho''}{\rho}$, которое мы означили чрезъ M'. Эту величину и предстоитъ теперь опредѣлить послѣдовательными приближеніями по способу Бесселя. При вычисленіи въ первыхъ приближеніяхъ совершенно удовлетворительно пользоваться пятизначными логариѳмами. Въ первомъ приближеніи мы примемъ отношеніе площадей треугольниковъ равнымъ отношенію площадей соотвѣтствующихъ секторовъ и вычислимъ величину M' по выраженію (171). Такимъ образомъ въ основаніи перваго приближенія примемъ

$$M' = 9.55347$$

посредствомъ этой величины изъ уравненій (180), (181), (175), (176) и (177) находимъ

$$H = 268^\circ\ 1'.4; \qquad \log\cos\varphi = 7.97956; \qquad c = -0.45488$$
$$\zeta = -50\ 18.2; \qquad A^2 = 0.53030; \qquad c'' = -2.07400$$
$$\log h = 0.01168 \qquad \log f = 9.85678;$$
$$\log f'' = 0.38320;$$

Рѣшая затѣмъ уравненіе Ламберта въ совокупности съ уравненіями (178), легко получаемъ

$$u = 0.91318; \qquad \log k = 0.06744; \qquad r = 1.02270; \qquad r'' = 0.72990$$

Послѣднее изъ уравненій (176) даетъ въ этомъ приближеніи $\log \rho = 9.94558$. Посредствомъ найденныхъ теперь значеній радіусовъ векторовъ по уравненіямъ (215), (216) и (212) находимъ

$$\frac{x}{3} = 14^\circ\ 36'.5; \quad z = +0.33389$$

$$\log A' = 9.81803; \quad \log B' = 0.36069; \quad C' = -0.075747; \quad z' = -0.03269$$

Такъ какъ вообще $u'' + u = 2z$; $u'' - u = 2z'$ (величину означенную здѣсь чрезъ u не должно смѣшивать съ той, которая получается при рѣшеніи уравненія Ламберта), то по уравненіямъ (204) и (217) въ концѣ перваго приближенія получаемъ

$$\frac{n}{n''} = +0.97794; \qquad \log \frac{\rho''}{\rho} = \log M' = 9.60256$$

Эту послѣднюю величину M примемъ за основаніе втораго приближенія и съ нею въ томъ же порядкѣ какъ прежде находимъ во второмъ приближеніи

$H = 266^\circ\ 40'.4$	$\log k = 0.06693$	$u = 0.37495$
$\zeta = -51\quad 4.8$	$\log r = 0.02933$	$u'' = 0.29099$
$\log h = 9.99148$	$\log r'' = 9.83649$	$\frac{n}{n''} = +0.97009$
$\log \cos \varphi = 7.73387$	$\log \rho = 9.97011$	$\log M' = 9.61151$
$A^2 = 0.53032$	$\frac{x}{3} = 14^\circ\ 33'.1$	
$\log f = 9.83658$	$z = +0.33297$	
$\log f'' = 0.31391$	$\log A' = 9.93653$	
$c = -0.42365$	$\log B' = 0.36203$	
$c'' = -1.75825$	$C' = -0.09823$	
	$z' = -0.04198$	

Такимъ образомъ мы нашли послѣдовательно слѣдующія три величины M'

$$\log M'_0 = 9.55347; \qquad \log M'_1 = 9.60256; \qquad \log M'_2 = 9.61151$$

если означимъ первыя и вторыя разности этихъ величинъ чрезъ $\Delta \log M_0$, $\Delta \log M_1$ и $\Delta^2 \log M$, принимая

$$\Delta \log M_0 = \log M'_1 - \log M'_0; \qquad \Delta \log M_1 = \log M'_2 - \log M'_1;$$

$$\Delta^2 \log M = \Delta \log M_1 - \Delta \log M_0$$

то извѣстно, что вѣроятнѣйшая величина $\log M'$ получится по выраженію

$$\log M' = \log M'_2 - \frac{(\Delta \log M_1)^2}{\Delta^2 \log M_0}$$

Примѣненіе этого интерполяціоннаго пріема въ разсматриваемомъ случаѣ даетъ

$\log M' = 9.61350$. Эту величину мы и примемъ за основанiе третьяго приближенiя, въ которомъ все вычисленiе будемъ уже выполнять съ семью десятичными знаками. Не приступая еще однако къ этому, освободимъ положенiе наблюдаемаго свѣтила отъ аберрацiи свѣтилъ имѣющихъ собственное движенiе. Принимая во вниманiе сокращенныя разстоянiя кометы отъ земли найденныя въ послѣднемъ приближенiи, легко найдемъ, что поправки временъ наблюденiй суть

$$\Delta t = 0.00768; \qquad \Delta t' = 0.00563; \qquad \Delta t'' = 0.00261$$

исправленныя же времена будутъ

$$t = 147.40212; \qquad t' = 169.35102; \qquad t'' = 191.43403$$

Такъ какъ при нашемъ означенiи

$$\frac{3K}{\sqrt{2}}(t'' - t') = \tau; \qquad \frac{3K}{\sqrt{2}}(t' - t) = \tau''$$

то въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\tau = 0.8058350; \qquad \tau'' = 0.8009409; \qquad \log(\tau + \tau'') = 0.2059553$$

Итакъ принимая за основанiе третьяго приближенiя величину $\log M' = 9.6135000$, въ томъ же порядкѣ какъ въ двухъ предыдущихъ приближенiяхъ найдемъ:

$$H = 266^\circ\ 19'\ 33''.22 \qquad \zeta = -51\ 16\ 29.93$$
$$\log h = 9.9865530 \qquad \log\cos\varphi = 7.9634204 \qquad A^2 = 0.5303091$$
$$\log f = 9.8316576 \qquad \log f'' = 0.2980396 \qquad c = -0.4160801 \qquad c'' = -1.6923066$$

$$\log k = 0.0677230 \qquad \log r = 0.0342507 \qquad \log r'' = 9.8298834 \qquad \log\rho = 9.9760096$$
$$\frac{x}{3} = 14^\circ\ 31'\ 34''.72; \qquad z = 0.3325635$$
$$\log A' = 9.9618805 \qquad \log B' = 0.3626982 \qquad C' = -0.1037517 \qquad s' = -0.0441952$$

$$u = 0.3767587 \qquad u'' = 0.2883683 \qquad \frac{n}{n''} = 0.9683300 \qquad \log M' = 9.6132347$$

Съ этой величиной M' мы могли бы продолжать вычисленiе, но чтобы сократить работу удобно для опредѣленiя болѣе точнаго значенiя M' воспользоваться какимъ либо интерполяцiоннымъ прiемомъ.

Величина M' получаемая въ концѣ каждаго приближенiя есть функцiя значенiя M', лежащаго въ основанiи разсматриваемой гипотезы. Предположимъ, что посредствомъ двухъ какихъ либо независимыхъ между собою величинъ $\log M'_0$ и $\log M'_1$, которыя мы означимъ чрезъ x_0 и x_1, вычислены указаннымъ выше способомъ соотвѣтствующiя имъ величины $\log M'_2$ и $\log M'_3$, которыя означимъ чрезъ y_0 и y_1; тогда вообще говоря $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$. Если гипотезы сдѣланныя относительно величины M' не очень далеки отъ истины, то величины x_0, y_0, x_1, y_1 могутъ быть принимаемы за координаты нѣкоторой прямой линiи, уравненiе которой должно быть представлено въ видѣ

$$y_1 - y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x)$$

гдѣ подъ x и y разумѣемъ координаты какой либо точки разсматриваемой прямой. Если y представляетъ собою искомое значеніе $\log M'$, то необходимо чтобы $y = x$, ибо начиная вычисленіе гипотезы съ вѣрнымъ значеніемъ M', мы необходимо придемъ къ тому же значенію M'. И такъ полагая въ предыдущемъ уравненіи $y = x$, мы представимъ его въ видѣ

$$y = \frac{y_1 (x_1 - x_0) - x_1 (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)}$$

откуда легко находимъ

$$y_1 - y = \Delta y = \frac{(y_1 - y_0)(x_1 - y_1)}{(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)}$$

Приложимъ эти общія соображенія къ вычисленію функціи M' въ нашемъ случаѣ. Въ началѣ и концѣ второй гипотезы мы имѣли $\log M' = 9.60256$; $\log M' = 9.61151$; въ началѣ и концѣ третьяго приближенія мы нашли

$$\log M' = 9.6135000; \qquad \log M' = 9.6132347$$

Слѣдовательно въ нашемъ случаѣ

$$x_0 = 9.6025600; \qquad x_1 = 9.6135000$$

$$y_0 = 9.6115100; \qquad y_1 = 9.6132347$$

слѣдовательно

$$\Delta y = 0.0000496.5; \qquad y = \log M' = 9.6131850$$

Съ помощію этой величины M' въ томъ же порядкѣ какъ во всѣхъ предыдущихъ приближеніяхъ находимъ

$$H = 266^\circ\ 20'\ 10''.35 \qquad \log k = 0.0667309 \qquad n = 0.3767093$$

$$\zeta = -\ 51\ \ 16\ \ 9\ .44 \qquad \log r = 0.0341073 \qquad n'' = 0.2884459$$

$$\log h = 9.9866974 \qquad \log r'' = 9.8300767$$

$$\log \cos \varphi = 7.9581213 \qquad \log \rho = 9.9758394 \qquad \frac{n}{n''} = 0.9683815$$

$$A^2 = 0.5303102 \qquad \frac{x}{3} = 14^\circ\ 31'\ 37''.85; \ \log M' = 9.6131853$$

$$\log f = 9.8318021 \qquad z = 0.3325776$$

$$\log f'' = 0.2984991 \qquad \log A' = 9.9611580$$

$$c = -\ 0.4163020 \qquad \log B' = 0.3626769$$

$$c'' = -\ 1.6941877 \qquad C' = -\ 0.1035919$$

$$z' = -\ 0.0441317$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что найденное значеніе M' весьма мало отличается отъ принятаго въ началѣ этого приближенія; поэтому полученныя теперь величины $\log \rho$ и $\log M'$ можемъ считать достаточно вѣрными для того, чтобы пользоваться ими при вычисленіи элементовъ орбиты.

И такъ мы имѣемъ

$$\log \rho = 9.9758394; \qquad \log \rho'' = 9.5890247$$

Обращаясь къ уравненіямъ (128) и (128_*) получаемъ изъ нихъ

$$l = 178^\circ\ 24'\ 26''.12; \quad b = 63^\circ\ 8'\ 10''.92; \quad \log r = 0.0341072$$
$$l'' = 288\ \ 45\ \ 16.88; \quad b'' = 21\ \ 38\ \ 17.51; \quad \log r'' = 9.8300766$$

Затѣмъ уравненіе (131) и первое изъ уравненій (130) даютъ

$$\theta = 118^\circ\ 44'\ 31''.14; \qquad i = 66^\circ\ 23'\ 9''.35$$

Изъ уравненій (132) и (132_*) получаемъ слѣдующія долготы въ орбитѣ соотвѣтствующія временамъ двухъ крайнихъ наблюденій

$$\lambda = 185^\circ\ 32'\ 59''.56; \qquad \lambda'' = 275^\circ\ 0'\ 39''.53$$

По первому изъ уравненій (194) и уравненію (195) находимъ

$$\pi = 271^\circ\ 8'\ 29''.32; \qquad \log q = 9.8295813$$

Наконецъ выраженіе (200) по временамъ перваго и третьяго наблюденія дастъ

$$T = 189.89184$$

И такъ мы имѣемъ теперь слѣдующую систему элементовъ орбиты кометы Coggia

$$\begin{aligned} T &= 1874 \text{ года, іюля } 8.89184 \\ \theta &= 118^\circ\ 44'\ 31''.14 \\ i &= \ \ 66\ \ 23\ \ \ 9.35 \\ \pi &= 271\ \ \ 8\ \ 29.32 \\ \log q &= 9.8295813 \end{aligned} \left.\vphantom{\begin{aligned}\theta\\i\\\pi\end{aligned}}\right\} \text{средн. равнд. } 1874.0$$

Движеніе прямое.

Между координатами средняго положенія кометы вычисленными по этимъ элементамъ и координатами выведенными изъ непосредственныхъ наблюденій существуетъ удовлетворительное согласіе.

VI.

Вычисленіе планетныхъ и кометныхъ эфемеридъ. Рѣшеніе задачи Кеплера. Лѣтоисчисленіе. Календарь.

28. Интегралы уравненій эллиптическаго движенія содержатъ шесть произвольныхъ постоянныхъ, называемыхъ элементами орбиты свѣтила. Координаты, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, могутъ быть представлены въ функціи упомянутыхъ постоянныхъ и времени. Если въ этихъ выраженіяхъ будемъ давать времени t произвольныя значенія, то получимъ величины координатъ, соотвѣтствующія этимъ произвольно выбраннымъ моментамъ времени. Рядъ такихъ частныхъ значеній координатъ разсматриваемаго свѣтила называется *эфемеридой* этого свѣтила.

Эфемерида свѣтила вычисленная посредствомъ системы элементовъ найденныхъ по тремъ наблюденіямъ, можетъ служить для двоякой цѣли: съ помощію ея можно искать свѣтило на сферѣ небесной при дальнѣйшихъ наблюденіяхъ; сравненіе же эфемериды съ наблюдаемыми положеніями свѣтила даетъ возможность исправить систему элементовъ, первоначально вычисленную по тремъ наблюденіямъ. Для указанія мѣста свѣтила на сферѣ небесной наиболѣе удобны координаты отнесенныя къ экватору, т. е. склоненіе и прямое восхожденіе. Для исправленія первоначально найденной системы элементовъ, мы часто пользуемся сравненіемъ широтъ и долготъ свѣтила вычисленныхъ по элементамъ съ широтами и долготами выведенными изъ наблюдаемыхъ склоненій и прямыхъ восхожденій. Имѣя это въ виду, мы покажемъ здѣсь способъ составленія эфемериды какъ для координатъ отнесенныхъ къ экватору, такъ равно и для тѣхъ координатъ, основною плоскостію которымъ служитъ эклиптика.

Для вычисленія эфемеридъ относительно эклиптики мы можемъ пользоваться выраженіями координатъ (135) и ихъ преобразованными формами (137), въ которыхъ a, b, c и A, B, C суть функціи однихъ только элементовъ орбиты и потому должны быть принимаемы за величины постоянныя для данной орбиты. Что же касается до времени, то въ формахъ (137) оно входитъ не явно, но въ зависимости отъ координатъ r и v.

Въ выраженіяхъ (135) подъ x, y, z мы разумѣемъ прямолинейныя координаты свѣтила отнесенныя къ такой системѣ, въ которой за плоскость xy принята плоскость эклиптики и ось x направлена въ точку весенняго равноденствія. Повернемъ всю эту систему около оси x на уголъ равный наклоненію ω эклиптики къ экватору, и при

томъ сдѣлаемъ вращеніе такимъ образомъ, чтобы въ новомъ положеніи плоскость xy совпала съ плоскостію экватора. Тогда ось z будетъ направлена въ полюсъ экватора. Назовемъ координаты свѣтила относительно осей въ ихъ новомъ положеніи чрезъ x_1, y_1, z_1, тогда понятно, что

$$x_1 = x$$
$$y_1 = y \cdot \cos\omega - z \cdot \sin\omega$$
$$z_1 = y \cdot \sin\omega + z \cdot \cos\omega$$

Внося сюда вмѣсто x, y, z ихъ величины изъ уравненій (135), находимъ

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cdot \cos u \cdot \cos\theta - r \cdot \sin u \cdot \cos i \cdot \sin\theta \\ y_1 &= r \cdot \cos u \cdot \sin\theta \cdot \cos\omega + r \cdot \sin u \cdot \cos i \cdot \cos\theta \cdot \cos\omega - r \cdot \sin u \cdot \sin i \cdot \sin\omega \\ z_1 &= r \cdot \cos u \cdot \sin\theta \cdot \sin\omega + r \cdot \sin u \cdot \cos i \cdot \cos\theta \cdot \sin\omega + r \cdot \sin u \cdot \sin i \cdot \cos\omega \end{aligned} \quad (219)$$

Положимъ здѣсь

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \sin A_1 &= \cos\theta \\ a_1 \cdot \cos A_1 &= \cos i \cdot \sin\theta \\ b_1 \cdot \sin B_1 &= \sin\theta \cdot \cos\omega \\ b_1 \cdot \cos B_1 &= \cos\theta \cdot \cos i \cdot \cos\omega - \sin i \cdot \sin\omega \\ c_1 \cdot \sin C_1 &= \sin\theta \cdot \sin\omega \\ c_1 \cdot \cos C_1 &= \cos\omega \cdot \sin i + \cos\theta \cdot \cos i \cdot \sin\omega \end{aligned} \quad (220)$$

тогда предыдущія выраженія координатъ примутъ видъ

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cdot a_1 \sin(A_1 + u) \\ y_1 &= r \cdot b_1 \sin(B_1 + u) \\ z_1 &= r \cdot c_1 \sin(C_1 + u) \end{aligned} \quad (221)$$

Но если назовемъ черезъ π долготу перигелія, то $u = \pi - \theta + v$, гдѣ подъ v разумѣемъ истинную аномалію свѣтила. Пусть

$$A_0 = A_1 + \pi - \theta; \quad B_0 = B_1 + \pi - \theta; \quad C_0 = C_1 + \pi - \theta \quad (222)$$

тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cdot a_1 \cdot \sin(A_0 + v) \\ y_1 &= r \cdot b_1 \cdot \sin(B_0 + v) \\ z_1 &= r \cdot c_1 \cdot \sin(C_0 + v) \end{aligned} \quad (223)$$

Этими выраженіями координатъ мы и будемъ пользоваться при вычисленіи эфемериды свѣтила относительно экватора.

Если имѣемъ въ виду составить эфемериду свѣтила относительно эклиптики, то мы должны вычислить геоцентрическія широты и долготы свѣтила, а также опредѣлить разстоянія этого свѣтила отъ земли соотвѣтствующія даннымъ, равно отстоящимъ одинъ отъ другаго моментамъ времени. При сдѣланномъ означеніи подъ x, y, z мы разумѣемъ прямолинейныя геліоцентрическія координаты свѣтила, но мы знаемъ, что геоцентрическія координаты свѣтила равны геліоцентрическимъ координатамъ его же, сложеннымъ съ геоцентрическими координатами центра Солнца. Такъ что если означимъ чрезъ ξ, η, ζ геоцентрическія координаты свѣтила и чрезъ X, Y, Z геоцентрическія координаты центра Солнца, то

$$\xi = x + X; \qquad \eta = y + Y; \qquad \zeta = z + Z$$

координаты x, y, z представляются выраженіями (137). Если означимъ, чрезъ R, L и B^0 разстояніе земли отъ Солнца, геоцентрическую долготу солнца и такую же широту этого свѣтила, то

$$(224) \qquad \begin{aligned} X &= R \,.\cos B_0 \cos L \\ Y &= R \,.\cos B_0 \sin L' \\ Z &= R \,.\sin B_0 \end{aligned}$$

Пусть λ будетъ геоцентрическая долгота планеты или кометы, β такая же широта разсматриваемаго свѣтила и Δ его разстояніе отъ земли, тогда

$$(225) \qquad \begin{aligned} \xi &= \Delta \,.\cos\lambda \,.\cos\beta \\ \eta &= \Delta \,.\sin\lambda \,.\cos\beta \\ \zeta &= \Delta \,.\sin\beta \end{aligned}$$

поэтому

$$(226) \qquad \begin{aligned} \Delta \,.\cos\beta \,.\cos\lambda &= r \,.\, a \,.\sin(A+v) + R \,.\cos B_0 \cos L \\ \Delta \,.\cos\beta \,.\sin\lambda &= r \,.\, b \,.\sin(B+v) + R \,.\cos B_0 \sin L \\ \Delta \,.\sin\beta &= r \,.\, c \,.\sin(C+v) + R \,.\sin R_0 \end{aligned}$$

Такъ какъ центръ Солнца незначительно удаляется отъ плоскости эклиптики, то почти всегда можео считать $B_0 = 0$. Поэтому геоцевтрическія координаты центра Солнца можно представить въ видѣ

$$(227) \qquad X = R \,.\cos L; \qquad Y = R \,.\sin L; \qquad Z = 0$$

Геліоцентрическія координаты свѣтила представленныя въ формѣ (134) отнесены къ такой системѣ, въ которой ось x проведена по линіи узловъ. Если геоцентрическія координаты свѣтила и Солнца захотимъ отнести къ той же системѣ, то для этого достаточно въ выраженіяхъ (225) и (227) уменьшить углы считаемые въ плоскости эклиптики на долготу узла орбиты, такъ что если назовемъ чрезъ ξ_1, η_1, ζ_1; X_1, Y_1, Z_1, геоцентрическія координаты свѣтила и Солнца отнесенныя къ системѣ, въ которой ось x проведена параллельно линіи узловъ орбиты, то будемъ имѣть

$$\xi_1 = \Delta . \cos\beta . \cos(\lambda - \theta); \qquad X_1 = R . \cos(L - \theta)$$

$$\eta_1 = \Delta . \cos\beta . \sin(\lambda - \theta); \qquad Y_1 = B . \sin(L - \theta)$$

$$\zeta_1 = \Delta . \sin\beta \qquad\qquad Z_1 = 0$$

Но такъ какъ вообще

$$\xi_1 = x_1 + X_1; \qquad \eta_1 = y_1 + Y_1; \qquad \zeta_1 = z_1 + Z_1$$

то

$$\begin{aligned} \Delta . \cos\beta . \cos(\lambda - \theta) &= r . \cos u + B . \cos(L - \theta) \\ \Delta . \cos\beta . \sin(\lambda - \theta) &= r . \sin u . \cos i + R . \sin(L - \theta) \\ \Delta . \sin\beta &= r . \sin u . \sin i \end{aligned} \tag{228}$$

гдѣ $u = v + \pi - \theta$. Этими выраженіями едвали не болѣе удобно пользоваться для вычисленія эфемериды, нежели выраженіями (226).

Если за основную плоскость применъ экваторъ и назовемъ чрезъ X', Y', Z' геоцентрическія координаты центра Солнца относительно новой системы осей, то

$$X' = R . \cos L$$

$$Y' = Y . \cos\omega - Z . \sin\omega$$

$$Z' = Y . \sin\omega + Z . \cos\omega$$

или

$$X' = R . \cos L$$

$$Y' = R . \sin L . \cos\omega$$

$$Z' = R . \sin L . \sin\omega$$

Назовемъ чрезъ ξ', η', ζ' линейныя геоцентрическія координаты свѣтила относительно тѣхъ осей, за основную плоскость которыхъ принятъ экваторъ. Пусть геоцентрическое склоненіе и прямое восхожденіе свѣтила будетъ δ и α, тогда

$$\xi' = \Delta . \cos\delta . \cos\alpha$$

$$\eta' = \Delta . \cos\delta . \sin\alpha$$

$$\zeta' = \Delta . \sin\delta$$

Слѣдовательно

$$\begin{aligned} \Delta . \cos\delta . \cos\alpha &= r . a_1 \sin(A_0 + v) + R . \cos L \\ \Delta . \cos\delta . \sin\alpha &= r . b_1 \sin(B_0 + v) + R . \sin L . \cos\omega \\ \Delta . \sin\delta &= r . c_1 \sin(C_0 + v) + R . \sin L . \sin\omega \end{aligned} \tag{229}$$

Величины послѣднихъ членовъ этихъ уравненій, т. е. координаты Солнца относительно земли даются прямо въ нѣкоторыхъ астрономическихъ эфемеридахъ, такъ въ Berliner Astronomisches Jahrbuch даются величины этихъ координатъ для каждаго дня года и при томъ для каждыхъ 12 часовъ. Данныя такимъ образомъ координаты отнесены къ среднему положенію экватора и равноденственной точки начала года.

29. Мы видимъ, что вычисленіе по данной системѣ элементовъ широтъ и долготъ свѣтила или склоненій и прямыхъ восхожденій можетъ быть выполнено или по уравненіямъ (226) и (228), или посредствомъ уравненій (229). Вычисленіе упомянутыхъ координатъ главнымъ образомъ приводится къ вычисленію радіуса вектора r и истинной аномаліи v для тѣхъ моментовъ, для которыхъ желаемъ имѣть геоцентрическія координаты свѣтила.

Если означимъ, какъ прежде, чрезъ μ, T и M_0 среднее суточное движеніе свѣтила, эпоху и среднюю аномалію эпохи, чрезъ t время, для котораго хотимъ вычислить геоцентрическія координаты свѣтила, чрезъ u, v и r эксцентрическую, истинную аномалію и радіусъ векторъ свѣтила, соотвѣтствующіе данному времени t, то между этими величинами, какъ извѣстно, существуютъ соотношенія

$$M_0 + \mu (t - T) = u - e \,.\, \sin u$$

$$r = a (1 - e \,.\, \cos u) ; \qquad \operatorname{tang} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tang} \frac{u}{2}$$

Сумма $M_0 + \mu (t - T)$ есть ни что иное какъ средняя аномалія свѣтила соотвѣтствующая времени t. Слѣдовательно первую часть перваго изъ этихъ уравненій при рѣшеніи разсматриваемаго вопроса слѣдуетъ считать за извѣстную величину. Если рѣшимъ это трансцендентное уравненіе относительно u, то по найденному значенію этой эксцентрической аномаліи u изъ двухъ остальныхъ уравненій легко вычислимъ r и v. Такимъ образомъ вычисленіе по элементамъ величинъ r и v для даннаго времени t приводится къ вычисленію эксцентрической аномалій u по данной средней ζ изъ уравненія

(230) $$\zeta = u - e \,.\, \sin u$$

Рѣшеніе этого уравненія относительно u составляетъ задачу извѣстную подъ именемъ *задачи Кеплера*.

Если эксцентриситетъ орбиты не великъ, то задача Кеплера удобно можетъ быть рѣшена послѣдовательными приближеніями. Въ первомъ приближеніи, въ членѣ зависящемъ отъ эксцентриситета примемъ $u = \zeta$ и приближенную величину эксцентрической аномаліи, соотвѣтствующую такому положенію, означимъ чрезъ u_0, тогда послѣдняя опредѣлится изъ уравненія

$$u_0 = \zeta + e \,.\, \sin \zeta$$

Второе приближенное значеніе эксцентрической аномаліи означимъ чрезъ u_1 и опредѣлимъ его изъ уравненія

$$u_1 = \zeta + e \,.\, \sin u_0$$

Въ третьемъ приближеніи значеніе эксцентрической аномаліи найдемъ изъ выраженія

$$u_2 = \zeta + e \,.\, \sin u_1$$

и т. д. Этотъ способъ рѣшенія задачи Кеплера будетъ представлять достаточную сходимость только для орбитъ съ малыми эксцентриситетами. Для эллиптическихъ кометныхъ орбитъ и даже для кометы Энке, орбита которой имѣетъ сравнительно небольшой эксцентриситетъ, этотъ способъ нельзя считать удобопримѣнимымъ.

Имѣя это въ виду, покажемъ тѣ пріемы, которые были предложены Ф. В. Бесселемъ и П. А. Гансеномъ *) для рѣшенія Кеплеровой задачи.

Изъ уравненія (230) видимъ, что вопросъ объ опредѣленіи эксцентрической аномаліи по данной средней будетъ рѣшенъ, если представимъ $\sin u$ или прямо произведеніе $e.\sin u$ въ функціи отъ ζ. Первому изъ уравненій (30) при сдѣланныхъ означеніяхъ можно дать видъ

$$\sin u = \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}} \sin v$$

Разложимъ функцію

$$\frac{r}{a} \cdot \sin v$$

въ рядъ по синусамъ и косинусамъ дугъ кратныхъ отъ ζ. Вообще такой рядъ долженъ имѣть видъ

$$\frac{r}{a} \cdot \sin v = \alpha_0 + \alpha_1 . \cos \zeta + \alpha_2 . \cos 2\zeta + \alpha_3 . \cos 3\zeta + \cdots\cdots$$
$$+ \beta_1 . \sin \zeta + \beta_2 . \sin 2\zeta + \beta_3 . \sin 3\zeta + \cdots\cdots$$

Такимъ образомъ рѣшеніе вопроса приводится къ опредѣленію коеффиціентовъ α_0, α_1, β_1 и т. д. Примѣняя для этого теорему Фурье, имѣемъ

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r}{a} \cdot \sin v . d\zeta; \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r}{a} \cdot \sin v . \cos k\zeta . d\zeta; \quad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r}{a} \cdot \sin v . \sin k\zeta . d\zeta$$

Но изъ уравненія (230) имѣемъ

$$d\zeta = (1 - e . \cos u) . du$$

и кромѣ того

$$\frac{r}{a} \cdot \sin v = \sqrt{1-e^2} . \sin u$$

поэтому

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 - e . \cos u) . \sin u . du$$

$$\alpha_k = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi}\int_0^{2\pi} (1 - e . \cos u) . \sin u . \cos (ku - ke . \sin u) . du$$

$$\beta_k = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi}\int_0^{2\pi} (1 - e . \cos u) . \sin u . \sin (ku - ke . \sin u) . du$$

*) См. Zeitschrift für Astronomie, Bd. V. pg. 368. Abhandlungen der Berliner Akademie. 1816—17. Astronomische Nachrichten № 886.

Первый изъ этихъ интеграловъ берется непосредственно и подвергнутый влiянiю указанныхъ предѣловъ обращается въ нуль, слѣдовательно $\alpha_0 = 0$ и разсматриваемое разложенiе не имѣетъ члена свободнаго отъ ζ.

Такъ какъ

$$\cos(ku - ke.\sin u)(1 - e.\cos u).du = \frac{1}{k} d[\sin(ku - ke.\sin u)]$$

$$\sin(ku - ke.\sin u)(1 - e.\cos u).du = -\frac{1}{k} d[\cos(ku - ke.\sin u)]$$

то выполняя въ предыдущихъ выраженiяхъ α_k и β_k интегрированiе по частямъ, получимъ

$$\alpha_k = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi.k}\int_0^{2\pi}\cos u.\sin(ku - ke.\sin u).du$$

$$\beta_k = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi.k}\int_0^{2\pi}\cos u.\cos(ku - ke.\sin u).du$$

ибо члены находящiеся внѣ знака интеграла между этими предѣлами обращаются въ нуль. Первое изъ этихъ выраженiй можно представить въ видѣ

$$\alpha_k = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi.ke}\int_0^{2\pi}[\sin(ku - ke.\sin u) - \sin(ku - ke.\sin u)(1 - e.\cos u)]\,du$$

или

$$\alpha_k = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi.ke}\int_0^{2\pi}\sin(ku - ke.\sin u).du - \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi.k^2.e}\int_0^{2\pi}d[\cos(ku - ke\sin u)]$$

Но очевидно, что послѣднiй изъ этихъ двухъ интеграловъ обращается въ нуль и потому

(231) $$\alpha_k = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi.ke}\int_0^{2\pi}\sin(ku - ke.\sin u).du$$

точно также найдемъ

(232) $$\beta_k = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi.ke}\int_0^{2\pi}\cos(ku - ke.\sin u).du$$

Извѣстно, что всякая нечетная степень синуса можетъ быть представлена линейной функціей синусовъ кратныхъ дугъ; четная же степень синуса имѣетъ форму подобной же функціи косинусовъ кратныхъ дугъ, такъ что

$$(-1)^n . 2^{2n} . (\sin \varepsilon)^{2n+1} = \sin (2n+1)\varepsilon - \frac{2n+1}{1} \sin (2n-1)\varepsilon + \frac{(2n+1)2n}{1 . 2} \sin (2n-3)\varepsilon - \cdots$$
$$\pm \frac{(2n+1)\, 2n\, (2n-1) \ldots (n+2)}{1 . 2 . 3 \ldots n} \sin \varepsilon \qquad (A)$$

$$(-1)^n . 2^{2n-1} . (\sin \varepsilon)^{2n} = \cos 2n\varepsilon - \frac{2n}{1} \cos 2(n-1)\varepsilon + \frac{2n(2n-1)}{1 . 2} \cos 2(n-2)\varepsilon - \cdots$$
$$\pm \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)(2n-2) \ldots (n+1)}{1 . 2 . 3 \ldots n} \cos \varepsilon$$

гдѣ подъ n разумѣемъ какое угодно цѣлое число. Если умножимъ первое изъ этихъ выраженій на $\sin 2m\varepsilon . d\varepsilon$, а второе—на $\cos (2m+1)\varepsilon . d\varepsilon$ и возмемъ отъ того и другаго произведенія интегралы въ предѣлахъ 0 и 2π, то очевидно найдемъ

$$\int_0^{2\pi} \sin 2m\varepsilon\, (\sin \varepsilon)^{2n+1} d\varepsilon = 0 ; \quad \int_0^{2\pi} \cos (2m+1)\varepsilon . (\sin \varepsilon)^{2n} d\varepsilon = 0 \qquad (233)$$

гдѣ подъ m разумѣемъ какое угодно цѣлое число. Если умножимъ второе изъ выраженій (A) на $\sin m\varepsilon . d\varepsilon$, а первое на $\cos m\varepsilon . d\varepsilon$ и въ обоихъ случаяхъ возмемъ интегралъ въ предѣлахъ 0 и 2π, то получимъ

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varepsilon . (\sin \varepsilon)^{2n} d\varepsilon = 0 ; \quad \int_0^{2\pi} \cos m\varepsilon . (\sin \varepsilon)^{2n+1} d\varepsilon = 0 \qquad (234)$$

такъ какъ

$$\cos (k . \sin \varepsilon) = 1 - \frac{k^2 . \sin^2 \varepsilon}{2} + \frac{k^4 . \sin^4 \varepsilon}{2 . 3 . 4} - \cdots\cdots$$
$$\sin (k . \sin \varepsilon) = k . \sin \varepsilon - \frac{k^3 . \sin^3 \varepsilon}{2 . 3} + \frac{k^5 . \sin^5 \varepsilon}{2 . 3 . 4 . 5} - \cdots\cdots \qquad (235)$$

то на основаніи выраженій (233) заключаемъ, что для всякаго нечетнаго значенія h

$$\int_0^{2\pi} \cos h\varepsilon . \cos (k . \sin \varepsilon) . d\varepsilon = 0$$

и для всякаго четнаго значенія h

$$\int_0^{2\pi} \sin h\varepsilon . \sin (k . \sin \varepsilon) . d\varepsilon = 0$$

Такъ какъ по выраженію (232)

$$(236) \qquad \beta_k = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi . ke} \int_0^{2\pi} \cos ku . \cos(ke . \sin u) . du + \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi . ke} \int_0^{2\pi} \sin ku \sin(ke . \sin u) . du$$

то на основаніи двухъ предыдущихъ выраженій заключаемъ, что первый членъ предыдущаго будетъ отличенъ отъ нуля только для всѣхъ четныхъ значеній k, а второй членъ не обращается въ нуль только для нечетныхъ значеній k.

По выраженіямъ (234) и (235) заключаемъ, что для какаго угодно значенія k четнаго или нечетнаго

$$\int_0^{2\pi} \sin k\varepsilon . \cos (k . \sin \varepsilon) \, d\varepsilon = 0 ; \qquad \int_0^{2\pi} \cos k\varepsilon . \sin (k . \sin \varepsilon) . d\varepsilon = 0$$

а такъ какъ разность этихъ выраженій приводится къ

$$\int_0^{2\pi} \sin (k\varepsilon - k . \sin \varepsilon) . d\varepsilon = 0$$

то по выраженіе (231) заключаемъ, что $\alpha_k = 0$ и что разложеніе $\frac{r}{a} \cdot \sin v$ можетъ содержать только синусы кратныхъ дугъ отъ ζ. Такимъ образомъ рѣшеніе задачи Кеплера приводится теперь къ опредѣленію величины функціи

$$\int_0^{2\pi} \cos ku . \cos (ke . \sin u) . du$$

для четныхъ значеній k и къ вычисленіе значеній интеграла

$$\int_0^{2\pi} \sin ku . \sin (ke . \sin u) . du$$

для всѣхъ нечетныхъ значеній k.

Мы знаемъ, что

$$2 \cos (ke . \sin u) = c^{(ke . \sin u)\sqrt{-1}} + c^{-(ke . \sin u)\sqrt{-1}}$$

$$2 \sqrt{-1} . \sin (ke . \sin u) = c^{(ke . \sin u)\sqrt{-1}} - c^{-(ke . \sin u)\sqrt{-1}}$$

гдѣ подъ c разумѣемъ основаніе неперовыхъ логариѳмовъ. Вообще

$$c^{mx} = 1 + m.x + \frac{m^2.x^2}{1.2} + \frac{m^3.x^3}{2.3} + \cdots\cdots\cdots$$

$$c^{-\frac{m}{x}} = 1 - \frac{m}{x} + \frac{m^2}{2.x^2} - \frac{m^3}{2.3.x^3} + \cdots\cdots\cdots$$

Пусть

$$J_m^{(0)} = 1 - m^2 + \frac{m^4}{2^2} - \frac{m^6}{2^2.3^2} + \cdots\cdots\cdots$$

$$J_m^{(1)} = m - \frac{m^3}{2} + \frac{m^5}{2^2.3} - \frac{m^7}{2^2.3^2.4} + \cdots\cdots\cdots$$

$$J_m^{(2)} = \frac{m^2}{2} - \frac{m^4}{2.3} + \frac{m^6}{2^2.3.4} - \frac{m^8}{2^2.3^2.4.5} + \cdots\cdots\cdots \qquad (237)$$

. . . .

$$J_m^{(n)} = \frac{m^n}{1.2.3\ldots n}\left[1 - \frac{m^2}{1.(n+1)} + \frac{m^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \frac{m^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right]$$

тогда перемножая предыдущія выраженія, получимъ

$$\begin{aligned} c^{m\left(x-\frac{1}{x}\right)} = J_m^{(0)} &+ x.J_m^{(1)} + x^2.J_m^{(2)} + x^3.J_m^{(3)} + \cdots\cdots\cdots \\ &- \frac{1}{x}J_m^{(1)} + \frac{1}{x^2}J_m^{(2)} - \frac{1}{x^3}J_m^{(3)} + \cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (238)$$

подобнымъ же образомъ перемножая выраженія

$$c^{-mx} = 1 - m.x + \frac{m^2.x^2}{1.2} - \frac{m^3.x^3}{1.2.3} + \cdots\cdots\cdots$$

$$c^{\frac{m}{x}} = 1 + \frac{m}{x} + \frac{m^2}{2.x^2} + \frac{1}{2.3}\frac{m^3}{x^3} + \cdots\cdots\cdots$$

найдемъ

$$\begin{aligned} c^{-m\left(x-\frac{1}{x}\right)} = J_m^{(0)} &- x.J_m^{(1)} + x^2.J_m^{(2)} - x^3.J_m^{(3)} + \cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{1}{x}.J_m^{(1)} + \frac{1}{x^2}.J_m^{(2)} + \frac{1}{x^3}.J_m^{(3)} + \cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (239)$$

Функція $J_m^{(n)}$ извѣстна подъ именемъ Бесселевой трансцендентной функціи. Если примемъ въ этихъ разложеніяхъ

$$x = c^{u\sqrt{-1}} = \cos u + \sqrt{-1}.\sin u$$

$$\frac{1}{x} = c^{-u\sqrt{-1}} = \cos u - \sqrt{-1}.\sin u$$

то

$$x + \frac{1}{x} = 2 \,.\, \cos u \qquad\qquad x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{-1} \,.\, \sin u$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \,.\, \cos 2u \qquad\qquad x^2 - \frac{1}{x^2} = 2\sqrt{-1} \,.\, \sin 2u$$

$$\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots$$

Поэтому разложенія (238) и (239) принимаютъ видъ

$$c^{(2m \,.\, \sin u)\sqrt{-1}} = J_m^{(0)} + 2\sqrt{-1} \,.\, J_m^{(1)} \sin u + 2 \,.\, J_m^{(2)} \cos 2u + 2\sqrt{-1} \,.\, J_m^{(3)} \sin 3u + \cdots$$

$$c^{-(2m \,.\, \sin u)\sqrt{-1}} = J_m^{(0)} - 2\sqrt{-1} \,.\, J_m^{(1)} \sin u + 2 \,.\, J_m^{(2)} \cos 2u - 2\sqrt{-1} \,.\, J_m^{(3)} \sin 3u + \cdots$$

откуда чрезъ сложеніе и вычитаніе находимъ

$$\cos (2m \,.\, \sin u) = J_m^{(0)} + 2\, J_m^{(2)} \cos 2u + 2\, J_m^{(4)} \cos 4u + \cdots\cdots$$

$$\sin (2m \,.\, \sin u) = \qquad 2\, J_m^{(1)} \sin u + 2\, J_m^{(3)} \sin 3u + 2\, J_m^{(5)} \sin 5u + \cdots\cdots$$

Прилагая къ опредѣленію коеффиціентовъ этихъ періодическихъ рядовъ теорему Фурье, находимъ

$$(240) \qquad J_m^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos (2m \,.\, \sin u) \cos ku \,.\, du$$

гдѣ подъ k разумѣемъ всѣ чотныя числа; также

$$(240_*) \qquad J_m^{(k')} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin (2m \,.\, \sin u) \sin k'u \,.\, du$$

гдѣ подъ k' разумѣемъ всѣ нечетныя числа. Слѣдовательно если примемъ здѣсь $2m = ke$, то выраженію (236) искомаго коеффиціента β_k можно дать видъ

$$\beta_k = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \left[\frac{2}{k} J_{\frac{ke}{2}}^{(k)} + \frac{2}{k'} J_{\frac{k'e}{2}}^{(k')} \right]$$

Слѣдовательно если условимся давать k значенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ натуральнаго ряда, то можемъ представить этотъ коеффиціентъ въ видѣ

$$(241) \qquad \beta_k = \frac{2 \,.\, \sqrt{1 - e^2}}{k \,.\, e} J_{\frac{ke}{2}}^{(k)}$$

Такъ какъ мы видѣли, что $\alpha_k = 0$, то разложеніе $\frac{r}{a} \cdot \sin v$ можно представить въ формѣ

$$\frac{r}{a} \cdot \sin v = \sum_{k=1}^{k=\infty} \beta_k \,.\, \sin k\zeta$$

или

$$\frac{r}{a}\cdot\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2}{k}J^{(k)}_{\frac{ke}{2}}\sin k\zeta \tag{242}$$

Мы знаемъ, что

$$u = \zeta + e\,.\sin u$$

и кромѣ того

$$e\,.\sin u = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{r}{a}\cdot\sin v$$

а потому рѣшеніе задачи Кеплера представляется теперь въ видѣ

$$u = \zeta + \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2}{k}J^{(k)}_{\frac{ke}{2}}\sin k\zeta \tag{243}$$

гдѣ, какъ видно изъ уравненій (237)

$$J^{(k)}_{\frac{ke}{2}} = \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^k}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,k}\left[1-\frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^2}{1.(k+1)}+\frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^4}{1.2(k+1)(k+2)}-\frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^6}{1.2.3\,(k+1)(k+2)(k+3)}+\ldots\right]$$

30. Рѣшая задачу Кеплера, мы имѣли въ виду опредѣлить для даннаго времени истинную аномалію свѣтила, движущагося въ эллиптической орбитѣ. Для этого по средней аномаліи, которая вычисляется для даннаго времени непосредственно по элементамъ, мы находимъ сначала эксцентрическую аномалію по выраженію (243) и послѣ того по эксцентрической аномаліи изъ выраженія (31) вычисляемъ уже истинную аномалію. Есть однако возможность найти истинную аномалію прямо по средней, не переходя черезъ эксцентрическую. Мы достигнемъ этого, если покажемъ способъ вычисленія разности $v-\zeta$, т. е. разности истинной аномаліи и средней по данной средней. Такая разность извѣстна подъ именемъ *уравненія центра*. Слѣдовательно рѣшеніе задачи, о которой мы теперь говоримъ, приводится къ вычисленію уравненія центра.

Мы знаемъ, что элементарная площадь сектора описанная радіусомъ векторомъ въ теченіи промежутка времени dt можетъ быть представлена въ видѣ $\frac{K}{2}\sqrt{a(1-e^2)}\,dt$; иначе таже площадь можетъ быть представлена въ видѣ $\frac{r^2}{2}\cdot dv$; слѣдовательно

$$r^2.dv = K\sqrt{a(1-e^2)}\,.\,dt$$

гдѣ подъ v можемъ разумѣть истинную аномалію. Мы знаемъ, что средняя аномалія ζ имѣетъ видъ $\zeta = \mu t + M_0$, гдѣ μ есть среднее суточное движеніе свѣтила, слѣдовательно

$$dt = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{K}\cdot d\zeta$$

Вносяя это въ предыдущее выраженіе, получимъ

(244) $$dv = \frac{a^2}{r^2} \cdot \sqrt{1 - e^2} \, . \, d\zeta$$

Мы видѣли, что $r = a\,(1 - e \, . \cos u)$, слѣдовательно

$$\frac{a^2}{r^2} = (1 - e \, . \cos u)^{-2}$$

Это намъ показываетъ, что $\frac{a^2}{r^2}$ есть функція четная отъ u, а слѣдовательно и отъ ζ; поэтому упомянутая функція должна имѣть такой видъ, при которомъ она не измѣняла бы величины при перемѣнѣ знака ζ. Такое свойство имѣетъ между прочимъ періодическій рядъ содержащій одни только косинусы кратныхъ дугъ отъ ζ. И такъ положимъ, что

$$\frac{a^2}{r^2} = A_0 + A_1 \, . \cos \zeta + A_2 \, . \cos 2\zeta + \cdots + A_k \, . \cos k\zeta + \cdots$$

Опредѣлимъ пока только коеффиціентъ A_0. По теоремѣ Фурье

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^2}{r^2} \cdot d\zeta$$

но такъ какъ

$$r = a\,(1 - e \, . \cos u)\,; \qquad d\zeta = (1 - e \, . \cos u)\, du$$

то

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{du}{1 - e \, . \cos u} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{du}{(1 - e) \cos^2 \left(\frac{u}{2}\right) + (1 + e) \sin^2 \left(\frac{u}{2}\right)}$$

или

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sec^2 \left(\frac{u}{2}\right) du}{(1 - e) + (1 + e) \operatorname{tang}^2 \left(\frac{u}{2}\right)}$$

Введемъ сюда новое перемѣнное z подъ условіемъ

$$z = \operatorname{tang} \frac{u}{2}$$

тогда выраженіе коеффиціента A_0 приметъ видъ

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 \, . \, dz}{(1 - e) + (1 + e)\, z^2}$$

или

$$A_0 = \frac{2}{\pi\sqrt{1-e^2}} \int_0^\infty \frac{d\left(z\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)}{1+\frac{1+e}{1-e}z^2} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

Слѣдовательно

$$\frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + A_1 . \cos\zeta + A_2 . \cos 2\zeta + A_3 . \cos 3\zeta + \cdots\cdots\cdots$$

Внося это въ уравненіе (244), получимъ

$$dv - d\zeta = \sqrt{1-e^2}\,[A_1 . \cos\zeta + A_2 . \cos 2\zeta + A_3 . \cos 3\zeta + \cdots\cdots\cdots]\, d\zeta$$

Если положимъ здѣсь

$$A_k . \frac{\sqrt{1-e^2}}{k} = C_k$$

то интегрируя предыдущее выраженіе, найдемъ

$$v - \zeta = C_1 . \sin\zeta + C_2 . \sin 2\zeta + C_3 . \sin 3\zeta + \cdots\cdots\cdots \tag{245}$$

Такъ какъ

$$\frac{dv}{d\zeta} = 1 + C_1 . \cos\zeta + 2C_2 . \cos 2\zeta + 3C_3 . \cos 3\zeta + \cdots\cdots\cdots$$

то по уравненію (244) имѣемъ

$$\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2} = 1 + C_1 . \cos\zeta + 2C_2 . \cos 2\zeta + \cdots\cdots + kC_k . \cos k\zeta + \cdots\cdots\cdots$$

откуда по теоремѣ Фурье имѣемъ

$$C_k = \frac{\sqrt{1-e^2}}{k . \pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{r^2} . \cos k\zeta . d\zeta$$

или

$$C_k = \frac{\sqrt{1-e^2}}{k . \pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos[ku - ke . \sin u] . du}{1 - e . \cos u} \tag{246}$$

Для выполненія указаннаго здѣсь интегрированія разложимъ прежде всего функцію

$$\frac{1}{1 - e . \cos u}$$

Такъ какъ

$$\cos u = \frac{c^{iu} + c^{-iu}}{2}$$

гдѣ c есть основаніе неперовыхъ логариѳмовъ и $i = \sqrt{-1}$, то

$$(247) \qquad 1 - e . \cos u = 1 - \frac{e}{2}\left(c^{iu} + c^{-iu}\right)$$

Допустимъ, что вторая часть этого выраженія разложена на два множителя и функція $1 - e . \cos u$ представлена въ видѣ

$$(248) \qquad 1 - e . \cos u = [\alpha + \beta . c^{iu}]\,[\alpha + \beta . c^{-iu}]$$

или

$$1 - e . \cos u = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta\,[c^{iu} + c^{-iu}]$$

Для того чтобы это выраженіе было тождественно съ (247), необходимо чтобы

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1\,; \qquad \alpha\beta = -\frac{e}{2}$$

откуда

$$(\alpha + \beta)^2 = 1 - e; \qquad (\alpha - \beta)^2 = 1 + e$$

Слѣдовательно

$$2\alpha = \sqrt{1-e} + \sqrt{1+e}; \qquad 2\beta = \sqrt{1-e} - \sqrt{1+e}$$

Зная теперь коеффиціенты α и β, представимъ выраженіе (248) въ видѣ

$$1 - e . \cos u = \alpha^2 \left[1 + \frac{\beta}{\alpha} c^{iu}\right] \left[1 + \frac{\beta}{\alpha} c^{-iu}\right]$$

Такъ какъ β есть величина существенно отрицательная, то положимъ

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$$

тогда

$$\frac{1}{1 - e . \cos u} = \alpha^{-2} \left[1 - \lambda . c^{iu}\right]^{-1} \left[1 - \lambda . c^{-iu}\right]^{-1}$$

Разлагая двучлены по строкѣ Ньютона и перемножая разложенія, найдемъ

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{1 - e . \cos u} = {} & 1 + \lambda^2 + \lambda^4 + \lambda^6 + \cdots\cdots \\ & + [\lambda + \lambda^3 + \lambda^5 + \lambda^7 + \cdots\cdots]\,(c^{iu} + c^{-iu}) \\ & + [\lambda^2 + \lambda^4 + \lambda^6 + \cdots\cdots]\,(c^{2iu} + c^{-2iu}) \\ & + [\lambda^3 + \lambda^5 + \lambda^7 + \cdots\cdots]\,(c^{3iu} + c^{-3iu}) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Но такъ какъ

$$1 + \lambda^2 + \lambda^4 + \lambda^6 + \cdots\cdots = \frac{1}{1 - \lambda^2}$$

то легко представить предыдущее въ видѣ

$$\frac{\alpha^2}{1-e.\cos u}=\frac{1}{1-\lambda^2}[1+2\lambda.\cos u+2\lambda^2.\cos 2u+2\lambda^3.\cos 3u+\cdots\cdots]$$

Мы приняли

$$\lambda=\frac{\sqrt{1+e}-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}+\sqrt{1-e}}=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}$$

поэтому

$$\frac{1}{\alpha^2(1-\lambda^2)}=\frac{2[1+\sqrt{1-e^2}]}{(1+\sqrt{1-e^2})^2-e^2}$$

что послѣ весьма простыхъ преобразованій приводится къ виду

$$\frac{1}{\alpha^2(1-\lambda^2)}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

И такъ

$$\frac{1}{1-e.\cos u}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}[1+2\lambda.\cos u+2\lambda^2.\cos 2u+2\lambda^3.\cos 3u+\cdots\cdots]$$

внося это въ выраженіе (246), найдемъ

$$C_k=\frac{1}{k.\pi}\int_0^{2\pi}\cos(ku-ke.\sin u).du$$

$$+\frac{2\lambda}{k.\pi}\int_0^{2\pi}\cos(ku-ke.\sin u)\cos u.du$$

$$+\frac{2\lambda^2}{k.\pi}\int_0^{2\pi}\cos(ku-ke.\sin u)\cos 2u.du+\quad \text{и т. д.}$$

Сравнивая выраженія (241) и (232), видимъ, что

$$\int_0^{2\pi}\cos(ku-ke.\sin u).du=2\pi.J^{(k)}_{\frac{ke}{2}}$$

но такъ какъ

$$2.\cos u.\cos(ku-ke.\sin u)=\cos[(k+1)u-ke.\sin u]+\cos[(k-1)u-ke.\sin u]$$
$$2.\cos 2u.\cos(ku-ke.\sin u)=\cos[(k+2)u-ke.\sin u]+\cos[(k-2)u-ke.\sin u]$$

то отсюда заключаемъ, что

$$\int_0^{2\pi} \cos(ku - ke.\sin u)\cos u.du = \pi\left[J_{\frac{ke}{2}}^{(k+1)} + J_{\frac{ke}{2}}^{(k-1)}\right]$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(ku - ke.\sin u)\cos 2u.du = \pi\left[J_{\frac{ke}{2}}^{(k+2)} + J_{\frac{ke}{2}}^{(k-2)}\right]$$

и т. д. Слѣдовательно

$$\text{(249)}\quad \frac{k}{2}C_k = J_{\frac{ke}{2}}^{(k)} + \lambda\left[J_{\frac{ke}{2}}^{(k+1)} + J_{\frac{ke}{2}}^{(k-1)}\right] + \lambda^2\left[J_{\frac{ke}{2}}^{(k+2)} + J_{\frac{ke}{2}}^{(k-2)}\right] + \cdots$$

Этимъ выраженіемъ и слѣдуетъ пользоваться для вычисленія коэффиціента общаго члена ряда, представляющаго собою уравненіе центра.

31. Едвали не болѣе простую форму для уравненія центра нашелъ П. А. Ганзенъ. Соображенія, на которыхъ онъ основываетъ выводъ этой формы, заключаются въ слѣдующемъ.

Полагая въ уравненіи (244)

$$e = \sin\varphi; \qquad \frac{r}{a} = \rho$$

находимъ изъ него

$$\text{(250)}\qquad v = \int \frac{\cos\varphi}{\rho^2}\cdot d\zeta$$

Для того чтобы развить ρ^{-2} въ рядъ по косинусамъ дугъ кратныхъ отъ средней аномаліи, положимъ

$$y = e^{iu}; \qquad z = e^{i\zeta}$$

гдѣ i есть $\sqrt{-1}$; а u и ζ означаютъ эксцентрическую и среднюю аномаліи. Такъ какъ $r = a(1 - e.\cos u)$, то при нашихъ означеніяхъ это приметъ видъ

$$\rho = 1 - \frac{\sin\varphi}{2}[y + y^{-1}]$$

или

$$\rho = 1 - \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}[y + y^{-1}]$$

Помножимъ и раздѣлимъ вторую часть этого уравненія на $\sec^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, тогда найдемъ

$$\rho = \left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - (y + y^{-1})\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right]\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Что легко представляется въ видѣ

$$\rho = \left[1 - y \cdot \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right]\left[1 - y^{-1} \cdot \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right]\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Положимъ для краткости

$$\beta = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$$

тогда

$$\rho = \frac{[1 - y \cdot \beta][1 - \beta \cdot y^{-1}]}{1 + \beta^2}$$

Мы знаемъ, что

$$\zeta = u - e \cdot \sin u \tag{251}$$

но при сдѣланныхъ означеніяхъ

$$i.\zeta = \log z; \qquad i.u = \log y$$

поэтому помножив предыдущее уравненіе на i, представимъ его въ видѣ

$$\log z = \log y - (y - y^{-1})\frac{\sin\varphi}{2}$$

откуда

$$z = y \cdot e^{-(y - y^{-1})\frac{\sin\varphi}{2}}$$

Изъ уравненія (251) имѣемъ

$$\frac{d\zeta}{du} = 1 - e \cdot \cos u$$

Но при нашемъ означеніи

$$1 - e \cdot \cos u = \rho$$

Слѣдовательно

$$\frac{d\zeta}{du} = \rho$$

Мы приняли

$$i.\zeta = \log z; \qquad i.u = \log y$$

откуда

$$i \cdot d\zeta = \frac{dz}{z}; \qquad i \cdot du = \frac{dy}{y}$$

поэтому

$$\frac{d\zeta}{du} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{y}{z}$$

Такимъ образомъ

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \cdot \rho$$

или

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \frac{(1 - y \,.\, \beta)(1 - \beta \,.\, y^{-1})}{1 + \beta^2}$$

Имѣя это, примемъ на основаніи упомянутыхъ выше соображеній

$$\frac{\cos\varphi}{\rho^2} = B_0 + 2B_1 \,.\, \cos\zeta + 2B_2 \,.\, \cos 2\zeta + 2B_3 \,.\, \cos 3\zeta + \cdots\cdots$$

такъ какъ

$$2 \,.\, \cos\zeta = c^{i\zeta} + c^{-i\zeta} = z + z^{-1}$$

$$2 \,.\, \cos 2\zeta = c^{2i\zeta} + c^{-2i\zeta} = z^2 + z^{-2}, \quad \text{и т. д.}$$

то

$$\frac{\cos\varphi}{\rho^2} = B_0 + B_1(z + z^{-1}) + B_2(z^2 + z^{-2}) + B_3(z^3 + z^{-3}) + \cdots\cdots$$

Слѣдовательно, считая $B_k = B_{-k}$, можемъ представить это въ видѣ

(252) $$\frac{\cos\varphi}{\rho^2} = \sum_{k=+\infty}^{k=-\infty} B_k \,.\, z^k$$

Если умножимъ обѣ части этого уравненія на $z^{-k}.d\zeta$ и возмемъ интегралъ въ предѣлахъ $-\pi$ и $+\pi$, то получимъ

$$B_k = \frac{\cos\varphi}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{z^{-k}.\, d\zeta}{\rho^2}$$

Мы видѣли, что

$$d\zeta = \frac{dz}{i \,.\, z}$$

и кромѣ того замѣтимъ, что при $\zeta = -\pi$ и $\zeta = +\pi$ имѣемъ

$$z = c^{-i\,.\,\pi} \quad \text{и} \quad z = c^{+i\,.\,\pi}$$

Слѣдовательно

$$B_k = \frac{\cos\varphi}{2i \,.\, \pi} \int_{c^{-i\pi}}^{c^{+i\pi}} \frac{z^{-k}}{\rho^2} \cdot \frac{dz}{z}$$

Принимая во вниманіе, что

$$\cos\varphi = \frac{1 - \operatorname{tang}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$$

и внося въ подъинтегральную функцію вмѣсто ρ, z^{-k} и $\frac{dz}{z}$ ихъ выше найденныя величины, получаемъ

$$B_k = \frac{1-\beta^2}{2i.\pi}\int_{c^{-i\pi}}^{c^{+i\pi}} y^{-k-1}\left[1-\beta.y\right]^{-1}\left[1-\beta.y^{-1}\right]^{-1} c^{\mu.\beta(y-y^{-1})}.dy \qquad (253)$$

гдѣ

$$\mu = \frac{k.\sin\varphi}{2\beta} = k.\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Если расположимъ подъинтегральную функцію по степенямъ y и будемъ интегрировать отдѣльные члены разложенія въ указанныхъ предѣлахъ, то легко убѣдимся, что интегралы всѣхъ членовъ обратятся въ нули за исключеніемъ того члена, который содержитъ множителя y^{-1}; ибо

$$\int_{c^{-i\pi}}^{c^{+i\pi}} y^p.dy = 0$$

для всѣхъ значеній p за исключеніемъ $p = -1$, для котораго предыдущій интегралъ обращается въ

$$\int_{c^{-i\pi}}^{c^{+i\pi}} \frac{dy}{y} = 2\pi.i$$

Поэтому если въ разложеніи подъинтегральной функціи выраженія (253) возмемъ коеффиціентъ того члена, который содержитъ производителемъ y^{-1} и умножимъ этотъ коеффиціентъ на $1-\beta^2$, то получимъ коеффиціентъ B_k разложенія $\frac{\cos\varphi}{\rho^2}$.

Подъинтегральную функцію выраженія (253) можно разсматривать какъ произведеніе слѣдующихъ трехъ множителей

$$y^{-k-1}; \quad \left(1-\beta.y\right)^{-1}.c^{\mu\beta y}; \quad \left(1-\beta.y^{-1}\right)^{-1}c^{-\mu\beta y^{-1}}$$

но

$$\left[1-\beta.y\right]^{-1} c^{\mu\beta.y}=\left[1+\beta.y+\beta^2.y^2+\cdots\right]\left[1+\mu.\beta.y+\frac{\mu^2}{2}\beta^2.y^2+\frac{\mu^3}{2.3}\beta^3.y^3+\cdots\right]$$

Перемножая эти два ряда, находимъ

$$\begin{aligned}\left[1-\beta.y\right]^{-1}.c^{\mu\beta.y}=1+\ \beta.y+\ \beta^2.y^2+\ \beta^3.y^3+\cdots\cdots\\ +\mu\beta.y+\mu\beta^2.y^2+\mu\beta^3.y^3+\cdots\cdots\\ +\frac{\mu^2}{2}\beta^2.y^2+\frac{\mu^2}{2}\beta^3.y^3+\cdots\cdots\\ +\frac{\mu^3}{2.3}\beta^3.y^3+\cdots\cdots\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}P_1&=1+\mu\\ P_2&=1+\mu+\frac{\mu^2}{2}\\ P_3&=1+\mu+\frac{\mu^2}{2}+\frac{\mu^3}{2.3}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ P_k&=1+\mu+\frac{\mu^2}{2}+\frac{\mu^3}{2.3}+\cdots\cdots+\frac{\mu^k}{1.2.3\ldots k}\end{aligned}$$

Тогда

$$\left[1-\beta.y\right]^{-1}.c^{\mu\beta.y}=1+P_1\,\beta.y+P_2\,\beta^2.y^2+P_3\,\beta^3.y^3+\cdots\cdots \tag{254}$$

Множитель

$$\left[1-\beta.y^{-1}\right]^{-1}.c^{-\mu\beta.y^{-1}}$$

получается изъ множителя

$$\left[1-\beta.y\right]^{-1}.c^{\mu\beta.y}$$

если въ этомъ послѣднемъ замѣнимъ μ и y чрезъ $-\mu$ и y^{-1}, а потому заключаемъ что

$$\begin{aligned}\left[1-\beta.y^{-1}\right]^{-1}.c^{-\mu\beta.y^{-1}}=1+\ \beta.y^{-1}+\ \beta^2.y^{-2}+\ \beta^3.y^{-3}+\cdots\cdots\\ -\mu\beta.y^{-1}-\mu\beta^2.y^{-2}-\mu\beta^3.y^{-3}-\cdots\cdots\\ +\frac{\mu^2}{2}\beta^2.y^{-2}+\frac{\mu^2}{2}\beta^3.y^{-3}+\cdots\cdots\\ -\frac{\mu^3}{2.3}\beta^3.y^{-3}-\cdots\cdots\end{aligned}$$

Полагая здѣсь

$$Q_1 = 1 - \mu$$
$$Q_2 = 1 - \mu + \frac{\mu^2}{2}$$
$$Q_3 = 1 - \mu + \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^3}{1.3}$$

и т. д.

находимъ

$$\left[1 - \beta . y^{-1}\right]^{-1} . e^{-\mu\beta . y^{-1}} = 1 + Q_1\beta . y^{-1} + Q_2\beta^2 . y^{-2} + Q_3\beta^3 . y^{-3} + \cdots \tag{255}$$

Перемножая ряды (254) и (255), получаемъ

$$\left[1 - \beta . y\right]^{-1} . e^{\mu\beta . y}\left[1 - \beta . y^{-1}\right]^{-1} . e^{-\mu\beta . y^{-1}} =$$
$$1 + P_1Q_2 . \beta^2 + P_2Q_2 . \beta^4 + \cdots$$
$$+ y\left[P_1 . \beta + P_2Q_1 . \beta^3 + P_3Q_2 . \beta^5 + \cdots\right]$$
$$+ y^2\left[P_2 . \beta^2 + P_3Q_1 . \beta^4 + P_4Q_2 . \beta^6 + \cdots\right]$$
$$+ \cdots$$

Если умножимъ это на y^{-k-1}, то получимъ подъинтегральную функцію выраженія (253). Означимъ эту функцію чрезъ $F_k(y)$, тогда

$$\begin{aligned} F_k(y) = & y^{-k-1}\left[1 + P_1 . Q_1 . \beta^2 + P_2 . Q_2 . \beta^4 + \cdots\right] \\ & + y^{-k}\quad\left[P_1 . \beta + P_2 . Q_1 . \beta^3 + P_3 . Q_2 . \beta^5 + \cdots\right] \\ & + y^{-k+1}\left[P_2 . \beta^2 + P_3 . Q_1 . \beta^4 + P_4 . Q_2 . \beta^6 + \cdots\right] \\ & + \cdots \end{aligned} \tag{256}$$

если умножимъ это на dy и будемъ интегрировать между предѣлами $e^{-i\pi}$ и $e^{i\pi}$, то всѣ интегралы обратятся въ нули за исключеніемъ тѣхъ, подъинтегральныя функціи которыхъ содержатъ перемѣнное въ видѣ y^{-1}.

Для того члена разложенія (252), въ которомъ $k = 0$, первый членъ предыдущаго выраженія содержитъ y^{-1}, и множитель при этой степени перемѣннаго есть

$$1 + P_1 . Q_1 . \beta^2 + P_2 . Q_2 . \beta^4 + \cdots$$

При $k = 1$, т. е. во второмъ членѣ разложенія (252) второй членъ выраженія (256) содержитъ множителя y^{-1} съ коэффиціентомъ

$$P_1 . \beta + P_2 . Q_1 . \beta^3 + P_3 . Q_2 . \beta^5 + \cdots$$

При $k = 2$; коэффиціентъ при y^{-1} есть

$$P_2 . \beta^2 + P_3 . Q_1 . \beta^4 + P_4 . Q_2 . \beta^6 + \cdots$$

и т. д. Слѣдовательно коэффиціентъ при y^{-1} въ общемъ членѣ разложенія (252) есть

$$P_k\beta^k + P_{k+1}.Q_1.\beta^{k+2} + P_{k+2}.Q_2.\beta^{k+4} + \cdots\cdots$$

Но мы видѣли, что умноживъ этотъ коэффиціентъ на $1-\beta^2$, получимъ искомое выраженіе для B_k, слѣдовательно

(257) $$B_k = (1-\beta^2)\left[P_k.\beta^k + P_{k+1}.Q_1.\beta^{k+2} + P_{k+2}.Q_2.\beta^{k+4} + \cdots\right]$$

Замѣтимъ, что $P_0 = 1$, ибо при $k = 0$; $\mu = 0$. Поэтому

$$B_0 = (1-\beta^2)\left[1 + P_1.Q_1.\beta^2 + P_2.Q_2.\beta^4 + \cdots\cdots\right]$$

но такъ какъ при $k = 0$, $\mu = 0$, то для $k = 0$

$$P_1 = 1; \qquad P_2 = 1; \ldots \qquad Q_1 = 1; \qquad Q_2 = 1 \ldots$$

а потому

$$B_0 = (1-\beta^2)\left[1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots\cdots\right]$$

но

$$1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots\cdots = \frac{1}{1-\beta^2}$$

Слѣдовательно

$$B_0 = 1.$$

Мы приняли

$$\frac{\cos\varphi}{\rho^2} = B_0 + 2B_1.\cos\zeta + 2B_2.\cos 2\zeta + \cdots\cdots$$

что можно представить въ видѣ

$$\frac{\cos\varphi}{\rho^2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{k=\infty} B_k.\cos k\zeta$$

Внося это въ выраженіе (250) и интегрируя, имѣемъ

$$v - \zeta = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2}{k}.B_k.\sin k\zeta$$

или обращая вниманіе на выраженіе (257), находимъ

(258) $$v - \zeta = (1-\beta^2)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2}{k}\left[P_k.\beta^k + P_{k+1}.Q_1.\beta^{k+2} + P_{k+2}.Q_2.\beta^{k+4} + \cdots\right]\sin k\zeta.$$

это и есть данная П. А. Гансеномъ форма уравненія центра.

32. Зная уравненіе центра, можно опредѣлить геліоцентрическую долготу свѣтила, вовсѣ не вычисляя для этого радіуса вектора.

Назвавъ какъ прежде аргументъ широты свѣтила чрезъ u, дадимъ уравненіямъ (129) видъ

$$\sin u \,.\, \sin i = \sin b$$

$$\sin u \,.\, \cos i = \sin (l - \theta) \,.\, \cos b$$

$$\cos u = \cos (l - \theta) \,.\, \cos b$$

гдѣ какъ прежде подъ l и b разумѣемъ геліоцентрическія координаты свѣтила, а подъ θ и i два элемента опредѣляющіе положеніе плоскости орбиты въ пространствѣ.

Помноживъ второе изъ этихъ уравненій на $\cos u$, а третье на $\sin u$, вычтемъ первое произведеніе изъ втораго, тогда получимъ

$$\sin u \,.\, \cos u - \cos u \,.\, \sin u \,.\, \cos i = \cos b \,.\, \sin (u - l + \theta)$$

или

$$2 \,.\, \sin u \,.\, \cos u \,.\, \sin^2 \left(\frac{i}{2}\right) = \cos b \,.\, \sin (u - l + \theta)$$

или наконецъ

$$\sin 2u \,.\, \sin^2 \left(\frac{i}{2}\right) = \cos b \,.\, \sin (u - l + \theta) \tag{259}$$

Помноживъ третье изъ начальныхъ уравненій на $\cos u$ и сложивъ со вторымъ умноженнымъ на $\sin u$, найдомъ

$$\cos^2 u + \sin^2 u \,.\, \cos i = \cos b \,.\, \cos (u - l + \theta)$$

или

$$\cos^2 u + \sin^2 u \left[\cos^2 \left(\frac{i}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{i}{2}\right)\right] = \cos b \,.\, \cos (u - l + \theta)$$

откуда легко находимъ

$$\cos^2 \left(\frac{i}{2}\right) + \cos 2u \,.\, \sin^2 \left(\frac{i}{2}\right) = \cos b \,.\, \cos (u - l + \theta)$$

раздѣливъ уравненіе (259) на это послѣднее, получимъ

$$\operatorname{tang} (u - l + \theta) = \frac{\operatorname{tang}^2 \left(\frac{i}{2}\right) . \sin 2u}{1 + \operatorname{tang}^2 \left(\frac{i}{2}\right) . \cos 2u}$$

уголъ $u - l + \theta$ называется *приведеніемъ къ эклиптикѣ*. Для планетныхъ орбитъ i не велико, а потому приведеніе къ эклиптикѣ удобно представляется въ видѣ ряда расположеннаго по степенямъ $\operatorname{tang} \frac{i}{2}$, этотъ рядъ, какъ извѣстно, имѣетъ форму

$$(u - l + \theta) . \sin 1'' = \operatorname{tang}^2 \left(\frac{i}{2}\right) \sin 2u - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tang}^4 \left(\frac{i}{2}\right) \sin 4u + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tang}^6 \left(\frac{i}{2}\right) \sin 6u - \cdots\cdots$$

означимъ чрезъ ψ выраженное въ дугѣ приведеніе къ эклиптикѣ, т. е. положимъ

$$\psi = \operatorname{tang}^2 \left(\frac{i}{2}\right) \frac{\sin 2u}{\sin 1''} - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tang}^4 \left(\frac{i}{2}\right) \frac{\sin 4u}{\sin 1''} + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tang}^6 \left(\frac{i}{2}\right) \frac{\sin 6u}{\sin 1''} - \cdots\cdots \tag{260}$$

тогда

$$u - l + \theta = \psi$$

откуда

$$l = u + \theta - \psi$$

но такъ какъ $u = v + \omega = v + \pi - \theta$, гдѣ подъ ω разумѣемъ разстояніе перигелія отъ узла, а подъ π долготу перигелія и подъ v истинную аномалію, то

$$l = v + \pi - \psi$$

Если означимъ чрезъ ξ уравненіе центра, то $\xi = v - M$, гдѣ подъ M разумѣемъ среднюю аномалію свѣтила, поэтому

$$l = \xi + M + \pi - \psi$$

Сумма $M + \pi$ называется *средней долготой* свѣтила, если означимъ ее чрезъ L, то будемъ имѣть

$$l = L + \xi - \psi$$

Такимъ образомъ мы видимъ еще одинъ способъ вычисленія геліоцентрической долготы свѣтила по элементамъ. Что касается до средней долготы, то она вычисляется по элементамъ гораздо болѣе просто чѣмъ долгота геліоцентрическая.

33. Опредѣленіемъ величины уравненія центра рѣшается вопросъ о вычисленіи по элементамъ истинной аномаліи свѣтила для даннаго времени. Наиболѣе простое и удобное въ практическихъ примѣненіяхъ рѣшеніе этой задачи предложено К. Ф. Гауссомъ. Трудность при вычисленіи истинной аномаліи по элементамъ представляется только тогда, когда эксцентриситетъ орбиты великъ и сама орбита по формѣ приближается къ параболѣ, но этотъ случай Гауссъ и имѣлъ въ виду, предлагая, хотя не прямое, но тѣмъ не менѣе весьма остроумное рѣшеніе упомянутаго вопроса.

Сущность методы Гаусса заключается въ слѣдующемъ. Предположимъ, что за эпоху принято время прохожденія свѣтила черезъ перигелій его орбиты. Означимъ это время через T. Пусть данное время, для котораго хотимъ вычислить истинную аномалію, будетъ t; тогда средняя аномалія, соотвѣтствующая времени t, представится въ формѣ

$$\zeta = \frac{K(t - T)}{a^{\frac{3}{2}}}$$

Если u есть эксцентрическая аномалія, соотвѣтствующая времени t, то

(261) $$\frac{K(t - T)}{a^{\frac{3}{2}}} = u - e \sin u$$

Назовемъ какъ прежде чрезъ q разстояніе перигелія отъ Солнца, и замѣтимъ, что для эллиптической орбиты вообще

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos v}$$

Въ перигеліи $r = q$ и $v = 0$, поэтому для эллиптической орбиты $q = a(1-e)$ и уравненію (261) можно дать видъ

$$\frac{K(t-T)(1-e)^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{3}{2}}} = u - e.\sin u$$

или

$$\frac{K(t-T)\sqrt{1-e}}{q^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{1-e} - \frac{e.\sin u}{1-e}$$

что легко представляется въ видѣ

$$\frac{K(t-T)\sqrt{1-e}}{q^{\frac{3}{2}}} = \frac{9}{10}\cdot\frac{u}{1-e} + \frac{u}{10(1-e)} - \frac{9}{10}\cdot\frac{e.\sin u}{1-e} - \frac{e.\sin u}{10(1-e)}$$

Придадимъ и вычтемъ во второй части этого уравненія сумму

$$\frac{9}{10}\frac{e.u}{1-e} + \frac{\sin u}{10(1-e)}$$

тогда все уравненіе приведется къ виду

$$\frac{K(t-T)\sqrt{1-e}}{q^{\frac{3}{2}}} = \frac{9u+\sin u}{10} + \frac{1+9e}{10(1-e)}(u - e.\sin u)$$

или

$$\frac{K(t-T)\sqrt{1-e}}{q^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{10}{9u+\sin u} = 1 + \frac{1+9e}{1-e}\left[\frac{u-\sin u}{9u+\sin u}\right]$$

или еще

$$\frac{K(t-T)\sqrt{1-e}}{2q^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{20}{9u+\sin u} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1+9e}{5(1-e)}\,15\left[\frac{u-\sin u}{9u+\sin u}\right]$$

Полагая здѣсь

$$15\,\frac{u-\sin u}{9u+\sin u} = A \qquad (262)$$

умножимъ обѣ части предыдущаго уравненія на $\sqrt{A}$, тогда найдемъ

$$\frac{K(t-T)\sqrt{1-e}}{2q^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{20\sqrt{A}}{9u+\sin u} = \sqrt{A} + \left[\frac{1+9e}{5(1-e)}\right]\frac{A^{\frac{3}{2}}}{3}$$

пусть

$$\frac{9u+\sin u}{20\sqrt{A}} = B; \qquad \sqrt{\frac{1+9e}{5(1-e)}}\,A = \operatorname{tang}\frac{w}{2} \qquad (263)$$

тогда предыдущее уравненіе обращается въ

$$\frac{K(t-T)\sqrt{1-e}}{2q^{\frac{3}{2}}.B}=\sqrt{A}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5(1-e)}{1+9e}}\operatorname{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right)$$

Раздѣливъ обѣ части этого уравненія на $\sqrt{\frac{5(1-e)}{1+9e}}$, получимъ

(264) $$\frac{K(t-T)}{\sqrt{2}\,.\,q^{\frac{3}{2}}}\frac{\sqrt{\frac{1+9e}{10}}}{B}=\operatorname{tang}\left(\frac{w}{2}\right)+\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right)$$

Если бы B была извѣстная величина, то вычисливъ посредствомъ нея и элементовъ первую часть этого уравненія, мы приняли бы найденную величину за аргументъ и съ нимъ изъ таблицъ Баркера нашли бы соотвѣтствующее значеніе w. Чтобы пользоваться упомянутыми таблицами, мы умножимъ все предыдущее уравненіе на 75 и примемъ

(265) $$M=\frac{75\,K(t-T)\sqrt{\frac{1+9e}{10}}}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}.B}$$

Посмотримъ прежде всего на основаніи какихъ соображеній можетъ быть вычислена функція B.

Извѣстно, что

$$\sin u=\frac{2\operatorname{tang}\frac{u}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{u}{2}\right)}$$

положимъ

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{u}{2}\right)=\theta$$

тогда

(266) $$\sin u=\frac{2\sqrt{\theta}}{1+\theta}$$

или

(267) $$\sin u=2\sqrt{\theta}\,[1-\theta+\theta^2-\theta^3+\cdots\cdots]$$

Согласно съ сдѣланнымъ означеніемъ

$$u=2\operatorname{arc}.(\operatorname{tang}=\sqrt{\theta})$$

но извѣстно, что

$$\operatorname{arc}.(\operatorname{tang}=\sqrt{\theta})=\sqrt{\theta}-\frac{(\sqrt{\theta})^3}{3}+\frac{(\sqrt{\theta})^5}{5}-\cdots\cdots$$

поэтому

$$u = 2\sqrt{\theta}\left[1 - \frac{\theta}{3} + \frac{\theta^2}{5} - \frac{\theta^3}{7} + \cdots\cdots\right] \qquad (268)$$

посредствомъ этого и выраженія (267) легко составляемъ

$$\begin{aligned} 15\,(u - \sin u) &= 2\sqrt{\theta}\left[10.\theta - \frac{60}{5}\theta^2 + \frac{90}{7}\theta^3 - \frac{120}{9}\theta^4 + \cdots\cdots\right] \\ 9u + \sin u &= 2\sqrt{\theta}\left[10 - \frac{12}{3}\theta + \frac{14}{5}\theta^2 - \frac{16}{7}\theta^3 + \cdots\cdots\right] \end{aligned} \qquad (269)$$

Если первое изъ этихъ выраженій раздѣлимъ на второе, то при означеніи (262) найдемъ.

$$A = \theta - \frac{4}{5}\theta^2 + \frac{24}{35}\theta^3 - \frac{1592}{2625}\theta^4 + \frac{78856}{144375}\theta^5 - \cdots\cdots \qquad (270)$$

Обратимъ этотъ рядъ и разложимъ θ по степенямъ A. Для этого допустимъ, что

$$\theta = A + \alpha.A^2 + \beta.A^3 + \gamma.A^4 + \cdots\cdots$$

Если бы мы хотѣли ограничиться четвертою степенью A, то для опредѣленія коэффиціентовъ α, β и γ составили бы посредствомъ этого:

$$\begin{aligned} \theta^2 &= A^2 + \alpha^2.A^4 + 2\alpha.A^3 + 2\beta.A^4 \\ \theta^3 &= A^3 + 3\alpha.A^4 \\ \theta^4 &= A^4 \end{aligned}$$

Внося эти выраженія степеней θ въ рядъ (270), представимъ его въ формѣ

$$\begin{aligned} A = A &+ \left(\alpha - \frac{4}{5}\right)A^2 + \left(\beta - \frac{8}{5}\alpha + \frac{24}{35}\right)A^3 \\ &+ \left(\gamma - \frac{4}{5}\alpha^2 - \frac{8}{5}\beta + \frac{72}{35}\alpha - \frac{1592}{2625}\right)A^4 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Слѣдовательно для опредѣленія коэффиціентовъ α, β, γ, и т. д имѣемъ уравненія

$$\alpha - \frac{4}{5} = 0$$

$$\beta - \frac{8}{5}\alpha + \frac{24}{35} = 0$$

$$\gamma - \frac{4}{5}\alpha^2 + \frac{8}{5}\beta + \frac{72}{35}\alpha - \frac{1592}{2625} = 0$$

и т. д.

откуда

$$\alpha = \frac{4}{5}; \qquad \beta = \frac{104}{175}; \qquad \gamma = \frac{1112}{2625} \qquad \text{и т. д.}$$

Такимъ образомъ

(271) $$0 = A + \frac{4}{5} A^2 + \frac{104}{175} A^3 + \frac{1112}{2625} A^4 + \cdots\cdots$$

Слѣдовательно рядъ (270) можно представить въ видѣ

$$\frac{A}{\theta} = 1 - \frac{4}{5} \left[A + \frac{4}{5} A^2 + \frac{104}{175} A^3 + \frac{1112}{2625} A^4 \right]$$
$$+ \frac{24}{35} \left[A^2 + \frac{4}{5} A^4 + \frac{8}{5} A^3 + \frac{208}{175} A^4 \right]$$
$$- \frac{1592}{2625} \left[A^3 + \frac{12}{5} A^4 \right]$$
$$+ \frac{78856}{144375} A^4$$

или

(272) $$\frac{A}{\theta} = 1 - \frac{4}{5} A + \frac{8}{175} A^2 + \frac{8}{525} A^3 + \frac{1896}{336875} A^4 + \cdots\cdots$$

Раздѣливъ все выраженіе (270) на θ и извлекая затѣмъ изъ него корень, легко находимъ

$$\sqrt{A} = \sqrt{\theta} \left[1 - \frac{2}{5} \theta + \frac{46}{175} \theta^2 - \frac{104}{525} \theta^3 + \cdots\cdots \right]$$

Посредствомъ этого и втораго изъ выраженій (269) по первому изъ выраженій (263) составляемъ наконецъ

(273) $$B = 1 + \frac{3}{175} A^2 + \frac{2}{525} A^3 + \frac{471}{336875} A^4 + \cdots\cdots$$

Этотъ рядъ показываетъ, что B мало разнится отъ единицы и если будемъ считать A за величину перваго порядка, то B разнится отъ единицы величинами втораго порядка. На основаніи всего этого разсматриваемый теперь вопросъ можетъ быть рѣшенъ послѣдовательными приближеніями въ слѣдующемъ порядкѣ. Въ первомъ приближеніи примемъ $B = 1$, тогда первая часть уравненія (264) будетъ содержать однѣ только извѣстныя величины; поэтому принимая

(274) $$\frac{75 . K(t - T)}{\sqrt{2}\, q^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1 + 9e}{10}} = M_0$$

съ этой величиной какъ аргументомъ изъ таблицъ Баркера вычислимъ приближенное значеніе w, которое означимъ чрезъ w_0. Пусть

$$\frac{5(1 - e)}{1 + 9e} = N$$

тогда второе изъ уравненій (263) принимаетъ видъ

$$A = N . \tang^2 \left(\frac{w}{2} \right)$$

откуда посредствомъ найденнаго приближеннаго значенія w можетъ быть вычислено A; съ нимъ по выраженію (273) или посредствомъ особой таблицы, расположенной по аргументу A, опредѣлится соотвѣтствующее значеніе B, при помощи котораго будетъ затѣмъ вычислена величина M по выраженію (265). Эта послѣдняя послужитъ въ свою очередь аргументомъ для опредѣленія изъ таблицъ Баркера болѣе точнаго значенія w. Въ случаѣ надобности на этой величинѣ w можетъ быть основано третье приближеніе. Но по большей части двухъ приближеній вполнѣ достаточно для удовлетворительно точнаго рѣшенія вопроса. Какъ скоро w найдено, то не трудно вычислить главную неизвѣстную величину—истинную аномалію свѣтила. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ

$$\frac{A}{\theta}=\frac{1}{C^2}$$

то для опредѣленія C имѣемъ по выраженію (272)

$$\frac{1}{C^2}=1-\frac{4}{5}A+\frac{8}{175}A^2+\frac{8}{525}A^3+\cdots\cdots \tag{275}$$

посредствомъ этого выраженія можетъ быть составлена для вычисленія C особая таблица, расположенная по аргументу A. При помощи значенія A найденнаго въ послѣднемъ приближенія возьмемъ изъ этой таблицы соотвѣтствующее значеніе C. Такъ какъ мы приняли

$$\operatorname{tang}\frac{u}{2}=\sqrt{\theta}$$

то при сдѣланныхъ теперь означеніяхъ уравненіе (31), представляющее зависимость между истинной и эксцентрической аномаліей, обращается въ

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)=\frac{1+e}{1-e}A.C^2$$

или внося сюда вмѣсто A его величину взятую изъ втораго уравненія (263), имѣемъ

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2}=C.\sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}}\cdot\operatorname{tang}\frac{w}{2} \tag{276}$$

Какъ скоро C и w вычислены, то изъ этого выраженія опредѣлится искомая истинная аномалія v.

Для рѣшенія обратнаго вопроса, т. е. для опредѣленія времени прохожденія черезъ перигелій по данной истинной аномаліи, удобно поступить слѣдующимъ образомъ. Мы приняли $\theta=\operatorname{tang}^2\left(\frac{u}{2}\right)$, слѣдовательно

$$\theta=\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)$$

Вычисливъ посредствомъ этого величину θ, примемъ въ первомъ приближеніи $\theta=A$ и съ этой величиною A изъ выше упомянутой таблицы, расположенной по аргументу

A найдемъ соотвѣтствующее значеніе функціи C, посредствомъ котораго изъ выраженія

$$A = \frac{1 - e}{C^2 (1 + e)} \operatorname{tang}^2 \left(\frac{v}{2}\right)$$

получимъ болѣе точное значеніе A; съ нимъ снова возьмемъ изъ таблицъ величину функціи C и т. д. до тѣхъ поръ, пока два послѣдовательно вычисленныя значенія C будутъ разниться между собою желательно мало.

Изъ уравненія (276) имѣемъ

$$\operatorname{tang} \frac{w}{2} = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + 9e}{5 (1 + e)}} \operatorname{tang} \frac{v}{2}$$

Отсюда по найденной величинѣ C вычислимъ w, съ нимъ изъ таблицъ Баркера получимъ по выраженію (265) величину M, и наконецъ искомое

(277) $$T = t - \frac{\sqrt{2}}{75} \cdot q^{\frac{3}{2}} . M . B . \sqrt{\frac{10}{1 + 9e}}$$

что касается до B, то мы знаемъ, что величина этой функціи берется изъ особой таблицы, расположенной по аргументу A.

34. При вычисленіи кометныхъ эфемеридъ въ случаѣ параболической орбиты выраженіямъ (223) геліоцентрическихъ координатъ свѣтила можно дать другой видъ. Для параболы

$$r = \frac{q}{\cos^2 \left(\frac{v}{2}\right)}$$

а потому для разсматриваемаго случая

$$x_1 = a_1 . q . \sin (A_0 + v) . \sec^2 \left(\frac{v}{2}\right)$$

$$y_1 = b_1 . q . \sin (B_0 + v) . \sec^2 \left(\frac{v}{2}\right)$$

$$z_1 = c_1 . q . \sin (C_0 + v) . \sec^2 \left(\frac{v}{2}\right)$$

Вычисленіе этихъ выраженій для всякаго времени приводится къ вычисленію по элементамъ истинной аномаліи кометы для избранныхъ моментовъ.

Выраженіе (198) приводится къ виду

(278) $$\frac{75 . K (t - T)}{\sqrt{2} . q^{\frac{3}{2}}} = 75 . \operatorname{tang} \left(\frac{v}{2}\right) + 25 . \operatorname{tang}^3 \left(\frac{v}{2}\right)$$

Первая часть этого уравненія можетъ быть вычислена по элементамъ непосредственно и должна служить аргументомъ, по которому изъ таблицъ Баркера найдется истинная аномалія. Если нѣтъ подъ руками этихъ таблицъ, то предыдущее уравненіе и ему

подобныя могутъ быть рѣшены слѣдующимъ простымъ способомъ. Сократимъ предыдущее уравненіе на 75, дадимъ ему видъ

$$\frac{(t-T).K}{\sqrt{2}\,.\,q^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{tang}\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right) \qquad (278_*)$$

Положимъ здѣсь

$$\operatorname{tang}\left(\frac{v}{2}\right) = 2.\operatorname{cotg} 2\gamma \qquad (279)$$

откуда легко находимъ

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{tang}\gamma$$

Поэтому

$$\operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right) = \operatorname{cotg}^3\gamma - \operatorname{tang}^3\gamma - 3.\operatorname{cotg}\gamma.\operatorname{tang}\gamma\,[\operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{tang}\gamma]$$

или

$$\operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right) + 3.\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \operatorname{cotg}^3\gamma - \operatorname{tang}^3\gamma$$

Внося это въ начальное уравненіе, получимъ

$$\frac{3\,(t-T).K}{\sqrt{2}.q^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{cotg}^3\gamma - \operatorname{tang}^3\gamma$$

Пусть

$$\operatorname{cotg}\gamma = \sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}} \qquad (280)$$

тогда предыдущее приметъ видъ

$$\frac{3K\,(t-T)}{(2q)^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{cotg}\beta \qquad (281)$$

Изъ этого уравненія мы можемъ вычислить β, ибо первая часть совершенно извѣстна при данной системѣ элементовъ. Съ найденнымъ значеніемъ β по выраженію (280) опредѣлимъ γ, посредствомъ котораго изъ выраженія (279) легко можетъ быть вычислена искомая истинная аномалія.

35. Если истинная аномалія по величинѣ близка къ 180°, что легко можетъ встрѣтиться, даже при наблюденіяхъ по времени не очень далекихъ отъ прохожденія черезъ перигелій, въ случаѣ малаго q, то вычисленіе истинной аномаліи по изложенному способу или посредствомъ таблицъ Баркера представляетъ нѣкоторое затрудненіе; для избѣжанія его Бессель предлагаетъ слѣдующій искуственный пріемъ.

Представимъ уравненіе (278_*) въ видѣ

$$\frac{K(t-T)}{\sqrt{2}.q^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right)\left[1+3.\operatorname{cotg}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]$$

Помноживъ и раздѣливъ вторую часть этого уравненія на $\left[1+\operatorname{cotg}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]^3$, положимъ

(282) $$\frac{1+3.\operatorname{cotg}^2\left(\frac{v}{2}\right)}{\left[1+\operatorname{cotg}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]^3} = b$$

и тогда найдемъ

$$\frac{K(t-T)}{\sqrt{2}.q^{\frac{3}{2}}} = \frac{b}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right)\left[1+\operatorname{cotg}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]^3$$

или

(283) $$\frac{K(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2}} = \frac{b}{3}\left[\operatorname{tang}\frac{v}{2}+\operatorname{cotg}\frac{v}{2}\right]^3$$

или

$$\frac{K(t-T)}{\sqrt{2}.q^{\frac{3}{2}}} = \frac{8.b}{3.\sin^3 v}$$

откуда

$$\sin v = \frac{2\sqrt{2q}.\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{6K(t-T)}}$$

Пусть

(284) $$\sin w = \frac{2.\sqrt{2q}}{\sqrt[3]{6K(t-T)}}$$

Такъ какъ по выраженію (282) видно, что b можетъ разниться отъ единицы только величинами четвертаго порядка относительно $\operatorname{cotg}\frac{v}{2}$, который при v близкомъ къ 180° есть во всякомъ случаѣ малая величина, то заключаемъ, что w мало разнится отъ v. Пусть

$$v = w + \xi$$

гдѣ ξ есть слѣдовательно малая дуга, которую теперь и опредѣлимъ. Мы приняли

$$\frac{8}{\sin^3 w} = \frac{3(t-T)}{\sqrt{2}.q^{\frac{3}{2}}}$$

но по уравненію (278_*)

$$\frac{3(t-T)}{\sqrt{2}.q^{\frac{3}{2}}} = 3.\text{tang}\left(\frac{v}{2}\right) + \text{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right)$$

или

$$\frac{8}{\sin^3 w} = 3.\text{tang}\left(\frac{w+\xi}{2}\right) + \text{tang}^3\left(\frac{w+\xi}{2}\right) \tag{285}$$

но мы знаемъ, что тождественно

$$\frac{8}{\sin^3 w} = \left[\text{tang}\frac{w}{2} + \text{cotg}\frac{w}{2}\right]^3$$

или

$$\frac{8}{\sin^3 w} = \text{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right)\left[1 + \text{cotg}^2\left(\frac{w}{2}\right)\right]^3$$

или наконецъ

$$\frac{8}{\sin^3 w} = \frac{\left[1 + \text{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)\right]^3}{\text{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right)}$$

Сравнивая это съ выраженіемъ (285), имѣемъ

$$\frac{\left[1 + \text{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)\right]^3}{\text{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right)} = 3.\text{tang}\left(\frac{w+\xi}{2}\right) + \text{tang}^3\left(\frac{w+\xi}{2}\right) \tag{286}$$

Положимъ, для краткости

$$\text{tang}\,\frac{w}{2} = \theta; \qquad \text{tang}\,\frac{\xi}{2} = x$$

и замѣтивъ, что при этихъ означеніяхъ

$$\text{tang}\,\frac{w+\xi}{2} = \frac{\theta + x}{1-\theta.x}$$

представимъ уравненіе (286) въ видѣ

$$\frac{[1+\theta^2]^3}{\theta^3} = 3\,\frac{\theta + x}{1-\theta.x} + \left[\frac{\theta + x}{1-\theta.x}\right]^3$$

или

$$[1 + 3\theta^2 + 3\theta^4 + \theta^6][1 - 3\theta.x + 3\theta^2.x^2 - \theta^3.x^3] =$$
$$3\,[\theta^4 + x.\theta^3][1 - 2\theta.x + \theta^2.x^2] + \theta^3[\theta^3 + 3\theta^2.x + 3\theta.x^2 + x^3]$$

Располагая это по степенямъ x, имѣемъ

$$\frac{1+3\theta^2}{3\theta[1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6]} = x - \theta\,.\,x^2 + \frac{\theta^2[2 + 6\theta^2 + 3\theta^4 + \theta^6]}{3[1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6]}\,x^3$$

Изъ этого кубичнаго уравненія и можетъ быть опредѣлена искомая величина x. Однако принимая во вниманіе малость величины x, Бессель предлагаетъ болѣе простое рѣшеніе вопроса.

Положимъ

$$\frac{1+3\theta^2}{3\theta\,[1+4\theta^2+2\theta^4+\theta^6]}=y$$

и ограничиваясь вторыми степенями малой величины x, имѣемъ изъ предыдущаго

$$y=x-\theta.x^2$$

Допустимъ, что

$$x=y+Ay^2$$

Внося это въ предыдущее и удерживая только вторыя степени y, имѣемъ

$$y=y+A.y^2-\theta.y^2$$

Слѣдовательно

$$A-\theta=0;\qquad A=\theta$$

поэтому

$$x=y+\theta.y^2$$

Мы приняли $\tang\frac{\xi}{2}=x$, слѣдовательно

$$\frac{\xi}{2}=\text{arc}\,(\tang=x)$$

или

$$\frac{\xi}{2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$$

Но такъ какъ мы условились ограничиться только вторыми степенями x, то можемъ принять

$$\xi=2x$$

или

(287) $$\xi=2y+2\theta.y^2$$

На основаніи этого выраженія Бессель составилъ особую таблицу, изъ которой можемъ брать ξ по аргументу w. Такимъ образомъ вычисленіе v будетъ теперь состоять въ слѣдующемъ. Непосредственно по элементамъ изъ выраженія (284) вычислимъ сначала w, съ нимъ какъ аргументомъ изъ особой таблицы найдемъ поправку ξ и тогда искомая аномалія v получится какъ сумма $v=w+\xi$.

36. Изложенные способы вычисленія координатъ по элементамъ пояснимъ теперь на нѣкоторыхъ частныхъ примѣрахъ.

Въ n⁰ 9 мы нашли по тремъ близкимъ между собою Московскимъ наблюденіямъ систему элементовъ орбиты кометы Энке. Чтобы видѣть достоинство этой системы, вычислимъ посредствомъ нея положеніе кометы, соотвѣтствующее какому либо наблюденію по времени отдаленному отъ принятыхъ въ основаніе вычисленія орбиты. Одни изъ послѣднихъ наблюденій кометы во время прошлаго ея появленія были сдѣланы въ Австраліи въ Виндзорѣ. Вычислимъ положеніе кометы соотвѣтствующее времени одного изъ этихъ наблюденій, напр. времени наблюденія 7 Мая.

7-го Мая въ Виндзорѣ положеніе кометы опредѣлено для $17^h\ 17^m\ 50^s$ средняго мѣстнаго времени и изъ наблюденій найдено, что въ этотъ моментъ видимое склоненіе и прямое восхожденіе кометы были

$$AR = 1^h\ 1^m\ 14^s.3\,; \qquad \delta = -10^\circ\ 53'\ 45''.0$$

Посмотримъ на сколько положеніе вычисленное по упомянутымъ выше элементамъ соглашается съ этимъ наблюдавшимся мѣстомъ кометы.

Для вычисленія истинной аномаліи по элементамъ примѣнимъ методу Гаусса. Прежде всего по элементамъ изъ выраженій

$$q = a\,(1 - e); \qquad T = t - \frac{M}{\mu}$$

вычислимъ разстояніе перигелія кометной орбиты отъ Солнца и время прохожденія кометы черезъ перигелій. Мы видѣли, что для разсматриваемаго случая

$$\log a = 0.3304385\,; \qquad \log e = 9.9265148$$

Слѣдовательно

$$\log q = 9.5226295$$

Вычислимъ время прохожденія черезъ перигелій по временамъ перваго и третьяго основнаго наблюденія. Мы видѣли, что

$$\begin{aligned} t &= 9.311233; & M &= 348^\circ\ 55'\ 11''.03 = -11^\circ\ \ 4'\ 48''.97; \\ t'' &= 23.344121; & M'' &= 353\ \ 20\ \ 14\ .78 = -\ \ 6\ \ 39\ \ 45\ .22; \end{aligned} \quad \log\mu = 3.0543488$$

Посредствомъ этого находимъ

$$\frac{M}{\mu} = -35.19687; \qquad \frac{M''}{\mu} = -21.16386$$

Слѣдовательно

$$T = 44.507981; \qquad T = 44.508042$$

За время прохожденія черезъ перигелій мы примемъ среднюю изъ этихъ двухъ величинъ, т. е. будемъ считать

$$T = 44.508012$$

Въ выраженіи (274) подъ t мы разумѣемъ данное время наблюденія, въ разсматриваемомъ случаѣ это есть 7 Мая, $17^h\ 17^m\ 50^s$ ср. Виндз. вр. Восточная долгота Виндзора отъ Москвы есть $7^h\ 32^m\ 58^s.74$, а потому среднее Московское время на-

блюденія есть Марта 68.402972. И такъ въ нашемъ случаѣ

$$t - T = 23.894960$$

Посредствомъ всего этого изъ выраженія (274) находимъ

$$\log M_0 = 2.0217135$$

Съ этой величиной какъ аргументомъ изъ таблицъ Баркера находимъ $w_0 = 91^\circ\ 53'\ 36''.81$; посредствомъ чего по выраженіямъ

$$(288) \qquad N = \frac{5\,(1-e)}{1+9e}\,; \qquad A = N.\operatorname{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)$$

вычисляемъ

$$\log A = 8.9854233$$

Съ этой величиной какъ аргументомъ изъ таблицъ приложенныхъ къ сочиненію Оппольцера „Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten" находимъ

$$\log B = 0.0000712$$

имѣя это, по выраженію $M = \frac{M_0}{B}$ получимъ

$$\log M = 2.0216423$$

и съ этой величиной какъ аргументомъ изъ таблицъ Баркера выводимъ

$$w = 91^\circ\ 53'\ 14''.74$$

Слѣдовательно болѣе точное значеніе A вычисленое по выраженіямъ (288) будетъ $\log A = 8.9853305$. Понятно, что этимъ вторымъ приближеніемъ слѣдуетъ ограничиться, ибо съ этой величиной A получаемъ тоже значеніе B какъ прежде. Съ найденной теперь величиной A какъ аргументомъ изъ упомянутыхъ выше таблицъ находимъ

$$\log C = 0.0173758$$

Посредствомъ этого и величины w полученной въ послѣднемъ приближеніи изъ выраженія (276) находимъ

$$\log \operatorname{tang} \frac{v}{2} = 0.0468654\,; \qquad v = 96^\circ\ 10'\ 15''.28$$

Такъ какъ вообще

$$r = \frac{p}{1 + e.\cos v}\,; \qquad u = \omega + v$$

гдѣ $p = a\,(1 - e^2)$ и подъ u разумѣемъ аргументъ широты свѣтила, то заключаемъ, что въ нашемъ случаѣ

$$\log p = 9.7884693\,; \qquad \log r = 9.8297915\,; \qquad u = 280^\circ\ 46'\ 47''.32$$

Соотвѣтствующая времени наблюденія долгота Солнца приведенная къ среднему рав-

ноденствію начала 1874 года, и видимая изъ locus fictus observationis, а также логариомъ разстоянія упомянутой сейчасъ точки отъ центра Солнца суть

$$L = 46^0\ 47'\ 6''.85\,; \qquad \log R = 0.0042070$$

Имѣя всѣ эти данныя, изъ уравненій (228) находимъ

$$\alpha = 10^0\ 47'\ 18''.45\,; \qquad \beta = -15^0\ 47'\ 39''.46$$

Если по приведеннымъ выше склоненію и прямому восхожденію кометы вычислимъ ея широту и долготу, освободимъ эти координаты отъ вліянія оберраціи и приведемъ ихъ къ среднему равноденствію начало года, то получимъ

$$\alpha = 9^0\ 44'\ 34''.71\,; \qquad \beta = -16^0\ 3'\ 32''.68$$

Сравнивая эти координаты выведенныя изъ непосредственныхъ наблюденій, съ координатами вычисленными по элементамъ орбиты, найденнымъ въ n⁰ 9, видимъ, что разность вычисленной и наблюдаемой долготы достигаетъ одного градуса, а разность широтъ болѣе четверти градуса; такое несогласіе наблюдаемыхъ и вычисленныхъ координатъ показываетъ, что найденные элементы орбиты весьма далеки отъ истинныхъ, самая же неточность элементовъ объясняется тѣмъ, что наблюденія принятыя въ основаніе вычисленія отдѣлены между собой незначительными промежутками времени и обнимаютъ только малую дугу разсматриваемой орбиты.

Вычисленіе по элементамъ положеній такихъ кометъ, которыя движутся по параболическимъ путямъ, весьма просто. Опредѣленіе истинной аномаліи свѣтила для даннаго времени въ этомъ случаѣ не представляетъ никакихъ трудностей. Чтобы пояснить на частномъ примѣрѣ ходъ такаго вычисленія, опредѣлимъ по элементамъ орбиты кометы Coggia, найденнымъ изъ наблюденій 27 Мая, 18 Іюня и 10 Іюля, положеніе кометы соотвѣтствующее времени средняго наблюденія. Считая отъ начала года, мы видимъ, что среднее Гринвичское время наблюденія есть 1874 года, Января 169.35102. Мы нашли, что при такомъ же счетѣ время прохожденія черезъ перигелій было Января 189.89184. Слѣдовательно въ уравненія (278) для нашего случая $t - T = -20.54082$. Мы приняли

$$M = \frac{75.K(t-T)}{\sqrt{2}.q^{\frac{3}{2}}}.$$

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ $\log q = 9.8295813$, то

$$\log M = 1.5283736_n$$

Съ этой величиной какъ аргументомъ изъ таблицъ Баркера находимъ

$$v = -46^0\ 0'\ 39''.93$$

Мы знаемъ, что для параболы $r = \dfrac{q}{\cos^2\left(\dfrac{v}{2}\right)}$, а потому въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\log r = 9.9015648$$

Мы нашли по упомянутымъ выше наблюденіямъ, что для кометы Coggia разстояніе перигелія отъ узла, т. е. $\omega = 152^0\ 23'\ 58''.18$, слѣдовательно для времени средняго наблюденія аргументъ широты есть $u = 106^0\ 23'\ 18''.25$. Имѣя все это и помня, что для времени средняго наблюденія $L = 87^0\ 21'\ 0''.90$, $\log R = 0.0070442$, по уравненіямъ (228) легко находимъ

$$\alpha = 99^0\ 36'\ 7''.20; \qquad \beta = 45^0\ 51'\ 1''.85$$

Разности этихъ координатъ отъ координатъ выведенныхъ изъ непосредственныхъ наблюденій суть: въ долготѣ $+\ 12''.48$ и въ широтѣ $+\ 28''.72$. Мы беремъ эти разности, вычитая вычисленныя координаты изъ наблюдаемыхъ. Значительная часть этихъ оставшихся разностей должна быть объяснена тѣмъ, что путь рассматриваемой кометы по формѣ уклоняется отъ параболы и долженъ быть представленъ эллипсисомъ съ весьма большимъ эксцентриситетомъ.

37. Въ эфемеридахъ малыхъ планетъ кромѣ координатъ дается еще время оппозиціи планеты, т. е. указывается то время, въ которое геліоцентрическая долгота разсматриваемаго свѣтила равна долготѣ земли. Опредѣлить это время не трудно.

Если означимъ какъ прежде чрезъ l, θ, u, i геліоцентрическую долготу планеты, долготу восходящаго узла орбиты, аргументъ широты и наклоненіе орбиты къ эклиптикѣ, то для опредѣленія l имѣемъ

$$\operatorname{tang}(l - \theta) = \operatorname{tang} u \,.\, \cos i$$

вычисливъ посредствомъ этого выраженія для нѣсколькихъ моментовъ отдѣленныхъ одинъ отъ другаго напр. на 10 дней величины l, найдемъ изъ таблицъ для тѣхъ же моментовъ долготы Солнца L. Предположимъ, что для времени t и t' мы вычислили геліоцентрическія долготы l и l' планеты и нашли для тѣхъ же моментовъ долготы Солнца L и L'. Соотвѣтствующія долготы земли будутъ $L + 180^0$ и $L' + 180^0$. Означимъ искомое время оппозиціи планеты чрезъ T_0 и чрезъ l_0 и $L_0 + 180^0$ геліоцентрическія долготы планеты и земли для времени оппозиціи. Тогда

$$l_0 = l + \frac{(l' - l)}{(t' - t)}(t - T_0)$$

$$180^0 + L_0 = 180^0 + L + \frac{L' - L}{t' - t}(t - T_0)$$

Слѣдовательно

$$l + \frac{l' - l}{t' - t}(t - T_0) = L + 180^0 + \frac{L' - L}{t' - t}(t - T_0)$$

откуда искомое

$$(289) \qquad T_0 = t + \frac{l - L - 180^0}{l' - l - (L' - L)}(t' - t)$$

Мы предполагаемъ въ этомъ вычисленіи, что геліоцентрическія долготы измѣняются пропорціонально времени, но такое допущеніе соотвѣтствуетъ той степени точности, съ которою опредѣляется время оппозиціи.

38. Въ связи съ рѣшеніемъ труднаго вопроса о вычисленіи истинной аномаліи свѣтила для даннаго времени по элементамъ находится изысканіе той величины, знаніемъ которой обусловливается возможность перехода отъ истиннаго времени къ среднему и обратно. Въ главѣ о времени и его измѣреніи мы дали понятіе объ уравненіи времени; теперь представляется возможность развить болѣе подробно тѣ соображенія, которыми мы руководствуемся при измѣреніи времени какъ въ общежитіи, такъ и при рѣшеніи извѣстныхъ астрономическихъ вопросовъ.

Мы называемъ уравненіемъ времени разность прямыхъ восхожденій истиннаго и средняго Солнца, т. е. воображаемой точки равномѣрно движущейся по экватору. Величина уравненія времени легко можетъ быть опредѣлена примѣненіемъ предыдущихъ общихъ соображеній къ изученію движенія земли.

Мы знаемъ, что видимое угловое движеніе Солнца равно угловому движенію земли около Солнца; поэтому мы получимъ истинную долготу Солнца, если къ истинной аномаліи земли ν придадимъ долготу Π Солнца, которую имѣетъ это послѣднее въ то время, какъ земля находится въ перигеліи своей орбиты. Точно также, если означимъ чрезъ ζ среднюю аномалію земли, то сумма $\zeta + \Pi$ представитъ долготу перваго средняго Солнца, т. е. той точки, которая равномѣрно движется по эклиптикѣ, или другими словами, среднюю долготу Солнца. И такъ если означимъ чрезъ λ истинную долготу Солнца, чрезъ L среднюю долготу этого свѣтила, то будемъ имѣть: $\lambda = \nu + \Pi$, $L = \zeta + \Pi$, откуда $\lambda = L + \nu - \zeta$; но $\nu - \zeta$ есть ничто иное какъ уравненіе центра для земной орбиты, которое можетъ быть вычислено на основаніи общаго выраженія (258), если примѣнимъ его къ земной орбитѣ. Эта послѣдняя въ началѣ 1850 года имѣла эксцентриситетъ $e = 0.0167712$, а потому внося эту величину эксцентриситета въ общее выраженіе (258) и представляя все въ секундахъ дуги, получимъ

$$\nu - \zeta = 6918''.37 \sin \zeta + 72''.52 . \sin 2\zeta + 1''.05 \sin 3\zeta + \cdots\cdots$$

Слѣдовательно

$$\lambda = L + 6918''.37 . \sin \zeta + 72''.52 . \sin 2\zeta + 1''.05 . \sin 3\zeta + \cdots\cdots$$

но такъ какъ $\zeta = L - \Pi$ и $\Pi = 280^\circ\ 21'\ 40''.0$, то

$$\begin{aligned} \lambda = L + 1244''.31 \sin L & \quad + 6805''.56 \cos L \\ - 67.82 \sin 2L & \quad + 25.66 \cos 2L \\ - 0.54 \sin 3L & \quad - 0.90 \cos 3L \\ - \cdots\cdots & \quad - \cdots\cdots \end{aligned} \qquad (A)$$

когда λ такимъ образомъ вычислена, то не трудно опредѣлить истинное прямое восхожденіе Солнца, ибо мы знаемъ, что

$$\operatorname{tang} A = \operatorname{tang} \lambda . \cos \varepsilon$$

гдѣ подъ A разумѣемъ истинное прямое восхожденіе Солнца, а подъ ε наклоненіе эклиптики къ экватору, такимъ образомъ по данному λ изъ этого уравненія опредѣлится A. Такъ какъ мы принимаемъ, что прямое восхожденіе средняго Солнца, движущагося равномѣрно по экватору, равно долготѣ Солнца, равномѣрно движущагося

по эклиптикѣ, то понятно, что прямое восхожденіе Солнца движущагося равномѣрно но экватору будетъ равно L. Если назовемъ наконецъ уравненіе времени чрезъ w, то представляя его во времени, будемъ имѣть

$$w = \frac{A - L}{15}$$

И такъ мы видимъ, что опредѣленіе уравненія времени приводится къ опредѣленію средней долготы Солнца. Посмотримъ на основаніи какихъ соображеній можетъ быть найдена эта координата. Означимъ чрезъ L, M и π среднюю долготу, среднюю, аномалію и долготу перигелія какой бы то не было планеты для времени t, пусть L' и M' будутъ средняя долгота и средняя аномалія планеты для времени t'. Если время обращенія планеты выраженное въ дняхъ есть T, то

$$\frac{360^\circ}{T} = \mu$$

представитъ собою суточное измѣненіе средней долготы планеты, слѣдовательно $L' = L + (t' - t).\mu$, но такъ какъ $M = L - \pi$; $M' = L' - \pi$, то $M' - M = L' - L$ или $M' = M + (t' - t).\mu$.

Средняя долгота считается относительно той точки, отъ которой считаются долготы вообще, т. е. отъ точки весенняго равноденствія, но отъ прецессіи и нутаціи эта точка перемѣщается въ пространствѣ и такимъ образомъ μ не представляетъ суточнаго движенія планеты, имѣющаго мѣсто относительно какой либо неподвижной точки неба. Время обращенія планеты относительно такой неподвижной точки, напр. относительно какой либо неподвижной звѣзды называется *звѣзднымъ обращеніемъ планеты*, тогда какъ время обращенія относительно движущейся равноденственной точки называется *тропическимъ обращеніемъ*. По одному не трудно однако опредѣлить другое.

Въ новыхъ солнечныхъ таблицахъ принимается, что длина звѣзднаго года, или то время, которое употребляетъ центръ Солнца, чтобы сдѣлать полный оборотъ относительно неподвижной звѣзды, есть $365^d\ 6^h\ 9^m\ 9^s.35$, или $365^d.2563582$. Слѣдовательно въ 365 25 среднихъ сутокъ Солнце проходитъ дугу въ $360^\circ - 22''.617656$. Равноденственная точка движется по обратному направленію съ Солнцемъ, поэтому тропическій годъ короче звѣзднаго и при томъ короче на столько времени, сколько Солнце употребляетъ для прохожденія малой дуги равной годичной прецессіи. Величина годичной прецессіи есть $50''.2235 + 0''.000244361.t$, гдѣ первый членъ представляетъ годичную прецессію для 1800 года. Такъ какъ въ сутки звѣзднымъ движеніемъ Солнце проходитъ дугу

$$\frac{360^\circ - 22''.617656}{365.25}$$

то понятно, что дугу равную годичной прецессіи оно пройдетъ въ

$$\frac{50''.2235 + 0''.000244361.t}{\left[\frac{360^\circ - 22''.617656}{365.25}\right]}$$

долей дня, что составляетъ

$$0.014154 + 0.00000068848.t$$

долей дня. На такую величину тропическій годъ короче звѣзднаго. Слѣдовательно величина тропическаго года есть

$$365^d.242220027 - 0^d.00000068848.t$$

или

$$365^d\ 5^h\ 48^m\ 46^s.42 - 0^s.00595\,(t - 1800)$$

Если назовемъ чрезъ T продолжительность тропическаго года, то среднее суточное тропическое движеніе Солнца представится чрезъ

$$\mu = \frac{360^\circ}{T}$$

гдѣ примемъ

$$T = 365^d.242220027 - 0.0000006885.t$$

Слѣдовательно

$$\mu = 59'\,8''.3302 + 0''.0000006902.t$$

Десятичныя доли сутокъ, содержащіяся въ году, не легко могутъ быть приняты во вниманіе при лѣтоисчисленіи въ общежитіи. Если отвергнемъ эти десятичныя доли и будемъ считать круглымъ числомъ за продолжительность года 365 сутокъ, то происходящая отъ того погрѣшность въ лѣтоисчисленіи для короткаго промежутка времени, напр. для нѣсколькихъ десятковъ лѣтъ, будетъ невелика, но въ теченіи многихъ столѣтій накопившаяся отъ этого погрѣшность дѣлается причиною совершенно инаго расположенія по мѣсяцамъ временъ года. Такъ, если въ извѣстную эпоху весеннее равноденствіе и начало весны совпадало съ началомъ Марта мѣсяца, то черезъ 500 лѣтъ начало весны будетъ въ Октябрѣ и тогда мѣсяцы Октябрь, Ноябрь и Декабрь будутъ составлять весну, а Іюль, Сентябрь и Августъ—зиму. Это неудобство вызвало особое постановленіе Юлія Цезаря, который по совѣтамъ Александрійскаго астронома Созигена составилъ календарь, предписавъ считать годъ въ 365 среднихъ сутокъ и вмѣстѣ съ тѣмъ увеличивать годъ одними сутками, т. е. считать его въ 366 дней черезъ каждые четыре года. Годъ состоящій изъ 365 дней названъ простымъ, а годъ заключающій въ себѣ 366 дней названъ высокоснымъ. На такомъ основаніи за 46 лѣтъ до Р. Х. Юліемъ Цезаремъ былъ составленъ календарь, который и былъ потомъ принятъ христіанскою церковью по постановленіе перваго Никейскаго собора.

По Юліанскому календарю годъ заключаетъ въ себѣ 365.25 сутокъ, точная же его продолжительность, какъ мы видѣли, есть 365.24222. Слѣдовательно при лѣтоисчисленіи по Юліанскому календарю погрѣшность въ принятой длинѣ года доходитъ до $0^d,00778$. Если умножимъ это число на 1257, то въ произведеніи получимъ 9.78 сутокъ. Отсюда заключаемъ, что черезъ 1257 лѣтъ послѣ Никейскаго собора, или въ 1582 году по Р. Х. счетъ времени сдѣлался невѣренъ приблизительно на десять дней. Въ самомъ дѣлѣ тогда считали по Юліанскому календарю на десять дней менѣе противъ надлежащаго. Чтобы исправить эту погрѣшность папа Григорій XIII въ 1582 г. предписалъ всѣмъ католикамъ считать вмѣсто 5-го Октября 15-е число того же мѣ-

сяца; кромѣ того, чтобы устравить погрѣшность и на будущее время, онъ хотя и оставилъ Юліанскій високосный годъ, но всѣ года, которыхъ двѣ послѣднія цифры суть нули, предписалъ считать простыми, за высокосные же изъ вѣковыхъ годовъ— считать тѣ, которые дѣлятся на 400 безъ остатка; такимъ образомъ 1700, 1800, 1900 по Григоріанскому календарю суть простые годы, а 2000, 2400, 2800—высокосные. По этому правилу въ 400 годахъ заключается не 100 высокосныхъ, а только 97. Слѣдовательно по Григоріанскому календарю 400 лѣтъ заключаютъ въ себѣ $400.365 + 97$ дней или 146097 дней; раздѣливъ это на 400, получимъ въ частномъ 365,2425, что слѣдовательно и принимается по Григоріанскому календарю за длину тропическаго года. Эта продолжительность болѣе истинной на 0.00028 долей сутокъ и лишній день по Григоріанскому счету противъ истиннаго накопляется только въ 4000 лѣтъ.

Послѣ этихъ замѣчаній не трудно уже показать какимъ образомъ можетъ быть вычислена средняя долгота Солнца для какой угодно эпохи по извѣстной средней долготѣ данной эпохи.

Мы условимся называть эпохой средней солнечной долготы величину средней солнечной долготы соотвѣтствующую началу опредѣленнаго года. Мы знаемъ, что въ перигеліи истинная и средняя долготы Солнца равны между собою, ибо въ этой точкѣ истинная и средняя аномалія обращаются въ нули; поэтому, зная время прохожденія Солнца черезъ перигелій и долготу этой точки, не трудно вычислить среднюю долготу Солнца для всякаго другаго времени, для этого къ долготѣ перигелія должно придать число μt, гдѣ μ есть среднее суточное тропическое движеніе Солнца, и какъ мы видѣли $\mu = 59' \, 8''.33$, а t есть число дней протекшихъ отъ упомянутаго времени прохожденія черезъ перигелій до разсматриваемаго момента. Если такимъ образомъ найдена одна какая нибудь эпоха, напр. найдена средняя долгота Солнца для 0^h перваго Января 1800 года, то не трудно вычислить всякую другую эпоху. Такъ если по эпохѣ 1800 года хотимъ вычислить эпоху 1900 года, то къ первой должны придать произведеніе числа дней, заключающихся въ этомъ столѣтіи, на среднее тропическое движеніе. Число дней можно представить такимъ образомъ: $365.100 + E\left(\frac{100}{4}\right) - 1$. Первый членъ представляетъ число дней въ столѣтіи, при чемъ каждый годъ считается въ 365 дней, второй членъ есть число добавочныхъ дней равное числу высокосныхъ лѣтъ въ разсматриваемомъ промежуткѣ времени; по Григоріанскому календарю 1900 годъ не есть высокосный, поэтому въ разсматриваемыхъ ста годахъ только 24 высокосныхъ и это число представляется чрезъ $E\left(\frac{100}{4}\right) - 1$. И такъ разсматриваемое число дней есть

$$365.100 + E\left(\frac{100}{4}\right) - 1 = 36524$$

Слѣдовательно если означимъ эпоху 1800 года чрезъ E_0, а эпоху 1900 чрезъ E_1, то

$$E_1 = E_0 + 36524.\mu$$

гдѣ подъ μ разумѣемъ среднее суточное тропическое движеніе Солнца. Точно также

эпоха E' для 1876 года представится чрезъ

$$E' = E_0 + 76\,(365\,.\,\mu) + 19\,.\,\mu$$

ибо

$$E\left(\frac{76}{4}\right) = 19$$

Если означимъ чрезъ A эпоху начала простаго года, то эпохи начала каждаго мѣсяца будутъ:

эпоха	0 Февр.	(1-го Февр. 0^h)	$= A + 31\,.\,\mu$
„	0 Марта	(1-го Марта 0^h)	$= A + 59\,.\,\mu$
„	0 Апр.	(1-го Апр. 0^h)	$= A + 90\,.\,\mu$
„	0 Мая	(1-го Мая 0^h)	$= A + 120\,.\,\mu$
„	0 Іюня	(1-го Іюня 0^h)	$= A + 151\,.\,\mu$
„	0 Іюля	(1-го Іюля 0^h)	$= A + 181\,.\,\mu$
„	0 Авг.	(1-го Авг. 0^h)	$= A + 212\,.\,\mu$
„	0 Сент.	(1-го Сент. 0^h)	$= A + 243\,.\,\mu$
„	0 Октб.	(1-го Октб. 0^h)	$= A + 273\,.\,\mu$
„	0 Ноябр.	(1-го Ноябр. 0^h)	$= A + 304\,.\,\mu$
„	0 Дек.	(1-го Дек. 0^h)	$= A + 334\,.\,\mu$

Если означимъ каждую изъ этихъ эпохъ чрезъ B, то эпохи 1-го, 2-го, 3-го, ..., n-го числа каждаго мѣсяца будутъ $B + \mu$; $B + 2\mu$; ..... $B + n\mu$. Если годъ высокосный, то за эпоху 0 Января принимается обыкновенно $A + \mu$ и потому эпоха каждаго дня въ двухъ первыхъ мѣсяцахъ высокоснаго года на μ менѣе соотвѣтствующихъ эпохъ простаго года, но такъ какъ Февраль высокоснаго года имѣетъ однимъ днемъ болѣе чѣмъ Февраль простаго года, то разность между эпохами дней всѣхъ остальныхъ мѣсяцевъ, начиная съ Марта, въ простыхъ и высокосныхъ годахъ уничтожится.

Для удобства вычисленія эпохъ замѣтимъ, что такъ какъ $\mu = 0^\circ\ 59'\ 8''.33$, то измѣненіе средней долготы

въ 365 дней есть	359°	45′	40″.40
„ одинъ часъ	0	2	27 .85
„ одну минуту	0	0	2 .46
„ „ секунду	0	0	0 .04

Кромѣ того замѣтимъ, что приращеніе средней долготы отъ эпохи высокоснаго года до 0 Февраля есть $29^\circ\ 34'\ 10''$. Подобное же приращеніе для простаго года есть $30^\circ\ 33'\ 18''$. Приращеніе средней долготы отъ эпохи до 0 Марта есть $58^\circ\ 9'\ 11''$ въ томъ и другомъ случаѣ. Такимъ образомъ для обоихъ случаевъ приращеніе средней долготы отъ эпохи до 0 Апрѣля есть $88^\circ\ 42'\ 30''$ и т. д.

Въ основаніи этихъ соображеній вычислимъ для примѣра среднюю долготу Солнца для 1845 года, 12 Іюня $0^h\ 42^m\ 24^s$ средняго Готскаго времени. Эпоха начала 1800 года, т. е. средняя долгота Солнца для 1800 года, 0 Января средняго Готскаго

времени есть	279°	52′	45″.43
$45\,(365.\mu) =$	349	15	18.00
$\mu.E\left(\frac{45}{4}\right) =$	10	50	31.63
Эпоха начала 1845 года	279°	58′	35″.06
„ 0 Іюня или 151.μ. . . .	148	49	57.83
Измѣненіе долготы въ 12 дней . .	11	49	39.96
„ „ „ 42ᵐ . . .		1	45.00
„ „ „ 24ˢ . . .			0.96
Искомая средняя долгота	80°	39′	49″.96

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, напр. при редукціяхъ видимыхъ положеній звѣздъ къ среднимъ или обратно астрономы считаютъ за начало года тотъ моментъ, въ который средняя долгота Солнца равна 280°. Такъ какъ средняя долгота Солнца равна его среднему прямому восхожденію, или, что все равно, звѣздному времени въ средній полдень, то понятно, что упомянутое начало года относится къ счету времени подъ такимъ меридіаномъ, на которомъ средній полдень случается, въ то мгновеніе, когда средняя долгота Солнца есть 280°. Въ таблицахъ Бессэля (Tabulæ Regiomontanæ), гдѣ даны коэффиціенты A, B, C, D, E служащіе для приведенія видимыхъ положеній звѣздъ къ среднимъ *), долготы считаются отъ Парижа. Чтобы пользоваться этими таблицами, необходимо знать долготу k, считаемую отъ Парижа для упомянутаго выше меридіана, подъ которымъ средняя долгота Солнца въ началѣ года равна 280°. Если означимъ чрезъ L среднюю долготу Солнца соотвѣтствующую тому моменту, когда въ Парижѣ считается начало года, то понятно, что

$$k = \frac{L - 280^\circ}{\mu}$$

гдѣ μ есть суточное приращеніе средней долготы Солнца, т. е. $\mu = 59'\ 8''.33$. Если найдемъ, что k есть положительная величина, то меридіанъ, подъ которымъ въ началѣ года средняя долгота Солнца равна 280°, лежитъ къ востоку отъ Парижа, въ противномъ случаѣ—къ западу. Такъ какъ тропическій годъ содержитъ не ровно 365 среднихъ сутокъ, а это число сутокъ съ дробью, то k въ разные года имѣетъ разныя величины. Эти величины даны Бесселемъ для всѣхъ годовъ отъ 1750 до 1850 года въ его Tabulæ Regiomontanæ. Вольферсъ даетъ въ Tabulæ reductionum observationum astronomicarum annis 1860 usque ad 1880 respondentes величины k для всѣхъ годовъ отъ 1860 до 1880. Въ тѣхъ и другихъ таблицахъ величина k выражена въ доляхъ сутокъ.

Въ тѣхъ же таблицахъ даются величины логариѳмовъ коэффиціентовъ A, B, C, D, для каждыхъ десяти дней года, считая отъ начала его подъ тѣмъ меридіаномъ, долгота котораго отъ Парижа есть k. За начало года подъ этимъ меридіаномъ принимается $18^h\ 40^m$ (ибо $280^\circ = 18^h\ 40^m$) звѣзднаго времени 0-го Января для простаго года и $18^h\ 40^m$ звѣзднаго времени 1-го Января для каждаго высокоснаго года.

*) См. Т. I., стр. 342.

Если при помощи упомянутыхъ таблицъ хотимъ вычислить логариемы A, B, C, D, для звѣзднаго времени θ, считаемаго подъ тѣмъ же меридіаномъ отстоящимъ на долготу k отъ Парижа, то къ аргументу слѣдуетъ прибавить величину

$$\frac{\theta - 18^h\ 40^m}{24}$$

которая должна быть всегда положительна и менѣе единицы. Такимъ образомъ аргументъ будетъ

$$k + \frac{\theta - 18^h\ 40^m}{24} = k + \frac{\theta}{24} - 0.778$$

Если же θ менѣе $18^h\ 40^m$, то къ θ должно придать 24^h, и тогда аргументъ представится въ видѣ:

$$k + \frac{\theta + 24^h - 18^h\ 40^m}{24} = k + \frac{\theta + 5^h\ 20^m}{24}$$

если послѣдній членъ есть цѣлое число съ дробью, то понятно что это цѣлое число должно быть опущено.

Такимъ образомъ мы видимъ, что счотъ дней принятый въ упомянутыхъ выше таблицахъ отличается отъ счета принятаго астрономами, которые за начало дня считаютъ время кульминаціи Солнца; въ таблицахъ же принимается за начало дня тотъ моментъ, когда кульминируетъ точка экватора, имѣющая прямое восхожденіе $18^h\ 40^m$. Слѣдовательно если прямое восхожденіе Солнца болѣе чѣмъ $18^h\ 40^m$, то упомянутая точка будетъ кульминировать прежде Солнца и тогда табличный счотъ дней мѣсяца получимъ, придавая единицу къ обыкновенному счету дней имѣющихъ начало въ полдень.

Если хотимъ вычислить коеффиціенты A, B, C, D для звѣзднаго времени считаемаго подъ меридіаномъ, долгота котораго отъ Парижа есть λ, то къ данному числу дней мѣсяца слѣдуетъ прибавить величину $k + \lambda$, которая называется *приведеніемъ дня* (reductio diei), а сумма даннаго числа дня и величины $k + \lambda$ называется *приведеннымъ числомъ дня* (dies reductus). Такимъ образомъ если назовемъ полный аргументъ таблицъ чрезъ J, то

$$J = \text{dies reductus} + \frac{\theta - 18^h\ 40^m}{24}$$

или для другаго выше упомянутаго случая

$$J = \text{dies reductus} + \frac{\theta + 5^h\ 20^m}{24}$$

оба эти выраженія аргумента представимъ въ формѣ

$$J = \text{dies reductus} + \frac{\theta - 18^h\ 40^m}{24} + i$$

условившись считать $i = 0$ отъ начала года до того времени, когда прямое восхожденіе Солнца дѣлается равнымъ θ. Послѣ же этого слѣдуетъ принимать $i = +1$. День принятый въ таблицахъ за 0 января считается подъ меридіаномъ таблицъ съ

того момента, когда звѣздное время въ средній полдень равно $18^h\ 40^m$. Тѣ звѣзды, прямыя восхожденія которыхъ менѣе $18^h\ 40^m$, кульминируютъ прежде этого полудня и слѣдовательно не въ день 0-го января, но въ предыдущій день. Поэтому заключаемъ, что въ общемъ выраженіи аргумента J слѣдуетъ принимать $i = 1$ съ начала года до того дня, въ который прямое восхожденіе Солнца сдѣлается равнымъ прямому восхожденію звѣзды, а послѣ того слѣдуетъ считать $i = 2$.

VII.

Измѣненія координатъ свѣтила обусловливающіяся измѣненіями элементовъ его орбиты. Опредѣленіе вѣроятнѣйшихъ орбитъ планетъ и кометъ изъ сочетанія многихъ наблюденій этихъ свѣтилъ.

39. Если бы координаты свѣтилъ, выводимыя изъ астрономическихъ наблюденій и другія величины взятыя изъ астрономическихъ эфемеридъ для вычисленія орбиты, были совершенно точны, то и элементы, найденныя по тремъ наблюденіямъ, точно представляли бы другія наблюдаемыя положенія свѣтила, по крайней мѣрѣ близкія къ основнымъ, взятымъ для вычисленія орбиты. При такихъ условіяхъ дальнѣйшими наблюденіями свѣтила найденная система элементовъ могла бы только повѣряться, а не поправляться; но такъ какъ изъ всѣхъ нашихъ наблюденій мы получаемъ величины только въ извѣстной степени приближенныя къ истинѣ, то неточность величинъ, лежащихъ въ основаніи вычисленія орбиты, извѣстнымъ образомъ вліяетъ на результатъ, и найденными по тремъ наблюденіямъ элементами будутъ представляться всѣ другія наблюденія того же свѣтила болѣе или менѣе неточно.

Принимая это во вниманіе, слѣдуетъ разсматривать систему элементовъ, найденныхъ по тремъ наблюденіямъ, не какъ конечный результатъ вычисленія орбиты, а какъ одно изъ средствъ къ достиженію этого результата. Если изслѣдуется орбита вновь открытаго свѣтила, планеты или кометы, то найденная по тремъ наблюденіямъ система элементовъ прежде всего должна служить для вычисленія приближенной эфемериды свѣтила, посредствомъ которой можно было бы слѣдить за движеніемъ свѣтила при развитіи дальнѣйшаго ряда его наблюденій. Какъ скоро изъ многочисленныхъ наблюденій вычислены координаты свѣтила, соотвѣтствующія опредѣленнымъ моментамъ времени, то на основаніи приближенной системы элементовъ, найденныхъ по тремъ наблюденіямъ, должны быть вычислены положенія свѣтила для тѣхъ же моментовъ, для которыхъ получены координаты изъ непосредственныхъ наблюденій. Разности наблюдаемыхъ и соотвѣтствующихъ имъ вычисленныхъ координатъ послужатъ данными для исправленія найденной системы элементовъ. Поправки этихъ послѣднихъ должны быть опредѣлены подъ тѣмъ условіемъ, чтобы сумма квадратовъ разностей между наблюдаемыми положеніями и положеніями вычисленными по исправленной системѣ элементовъ была наименьшая.

Если по трем наблюдениям вычислена орбита свѣтила, т. е. найдена нѣкоторая система элементовъ этой орбиты, то дальнѣйшими наблюденіями свѣтила слѣдуетъ пользоваться для исправленія этой первоначальной системы, т. е. для опредѣленія такаго коническаго сѣченія, которое наиболѣе близко подходило бы къ той части дѣйствительно описанной свѣтиломъ кривой, въ которой расположены наблюдавшіяся положенія свѣтила. Такую кривую наиболѣе представляющую извѣстный рядъ наблюденій, мы будемъ называть *вѣроятнѣйшей орбитой*, элементы же ея—*оскулирующими*.

Предположимъ, что ψ есть координата свѣтила относенная къ той или другой системѣ осей и плоскостей координатъ. Какъ извѣстно всякую координату можно представить въ функціи элементовъ и времени, а слѣдовательно координату ψ можно представить въ видѣ

$$\psi = f(\theta, \pi, i, \varphi, M_0, \mu, t)$$

Предположимъ, что вычисляя по этому выраженію для извѣстнаго времени величину ψ на основаніи извѣстной системы элементовъ, мы находимъ числовое значеніе этой координаты, которое означимъ чрезъ ψ_0. Допустимъ, что изъ непосредственныхъ наблюденій для того же самаго момента времени найдена величина разсматриваемой координаты и эту величину означимъ чрезъ ψ'. Понятно, что для того, чтобы получить систему элементовъ, которая въ предѣлахъ погрѣшностей наблюденій представляла бы разсматриваемое наблюденіе, другими словами, чтобы согласить вычисленіе съ наблюденіями, необходимо къ найденнымъ первоначально элементамъ придать поправки, которыя мы означимъ чрезъ $\Delta\theta$, $\Delta\pi$, Δi, и т. д. Если первоначальная система элементовъ близка къ искомой, то наблюдаемое и вычисленное положеніе свѣтила будутъ мало разниться между собою, а потому искомыя поправки элементовъ будутъ на столько малы, что квадратами и высшими степенями ихъ можно пренебрегать.

Предположимъ, что измѣненныя величины элементовъ, будучи внесены въ предыдущее общее выраженіе координаты, удовлетворяютъ ему и что наблюдаемое положеніе свѣтила соотвѣтствуетъ времени τ, тогда

$$\psi' = f(\theta + \Delta\theta, \pi + \Delta\pi, \ldots \tau)$$

Мы предположили, что съ помощію первоначальной системы элементовъ для того же времени τ найдено частное значеніе разсматриваемой координаты, которое мы означимъ чрезъ ψ_0. Такимъ образомъ

$$\psi_0 = f(\theta, \pi, i, \ldots \tau)$$

Разлагая предыдущее выраженіе ψ' въ рядъ по строкѣ Тейлора и ограничиваясь первыми степенями малыхъ измѣненій $\Delta\theta$, $\Delta\pi$ и т. д., найдемъ

$$(290) \qquad \psi' - \psi_0 = \frac{d\psi}{d\theta} \cdot \Delta\theta + \frac{d\psi}{d\pi} \cdot \Delta\pi + \cdots\cdots\cdots + \frac{d\psi}{dM_0} \cdot dM_0$$

Если будемъ знать числовыя величины производныхъ входящихъ сюда, то пользуясь разностями значеній координатъ выводимыхъ изъ наблюденій и значеній ихъ

вычисленныхъ по извѣстной системѣ элементовъ, составимъ столько подобныхъ условныхъ уравненій, имѣющихъ линейную форму относительно неизвѣстныхъ $\Delta\theta$, $\Delta\pi$ и т. д., сколько будетъ сдѣлано отдѣльныхъ сравненій.

Изъ каждаго отдѣльнаго наблюденія надъ положеніемъ свѣтила выводятся обыкновенно двѣ его координаты, соотвѣтствующія времени наблюденія, а слѣдовательно, если будемъ пользоваться n наблюдаемыми положеніями свѣтила, то будемъ имѣть $2n$ условныхъ уравненій для опредѣленія шести неизвѣстныхъ величинъ въ случаѣ эллиптической орбиты и пяти въ случаѣ орбиты параболической. Составивъ изъ этихъ условныхъ уравненій по способу наименьшихъ квадратовъ окончательныя уравненія, рѣшимъ ихъ и найдемъ вѣроятнѣйшія величины поправокъ $\Delta\theta$, $\Delta\pi$ и т. д. Таковъ общій планъ рѣшенія вопроса объ опредѣленіи вѣроятнѣйшей орбиты изъ совокупности многихъ наблюденій. Что касается до производныхъ $\frac{d\psi}{d\theta}$, $\frac{d\psi}{d\pi}$ и т. д., то понятно, что ими представляется вліяніе измѣненія элементовъ на измѣненія координатъ свѣтила.

40. Опредѣлимъ прежде всего видъ этихъ производныхъ для координатъ отнесенныхъ къ экватору, ибо изъ непосредственныхъ наблюденій выводятся чаще всего склоненія и прямыя восхожденія свѣтила.

Если означимъ чрезъ α и β прямое восхожденіе и склоненіе свѣтила, чрезъ x, y, z его геліоцентрическія координаты отнесенныя къ экватору, то вообще можно принять

$$\alpha = f(x, y, z); \qquad \delta = F(x, y, z)$$

тогда разумѣя подъ θ, π, i и т. д. элементы орбиты, будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\theta} &= \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} + \frac{d\alpha}{dy}\cdot\frac{dy}{d\theta} + \frac{d\alpha}{dz}\cdot\frac{dz}{d\theta} \\ \frac{d\delta}{d\theta} &= \frac{d\delta}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} + \frac{d\delta}{dy}\cdot\frac{dy}{d\theta} + \frac{d\delta}{dz}\cdot\frac{dz}{d\theta} \end{aligned} \tag{291}$$

и такъ далѣе для каждаго изъ элементовъ орбиты.

Примемъ плоскость экватора за плоскость xy, начало координатъ расположимъ въ центрѣ земли, ось x направимъ въ точку весенняго равноденствія. Назовемъ координаты свѣтила относительно такой системы осей чрезъ ξ, η, ζ. Предположимъ, что чрезъ центръ Солнца проведены оси параллельныя этимъ. Назовемъ координаты свѣтила относительно этихъ осей чрезъ x, y, z. Пусть наконецъ X, Y, Z будутъ координаты центра Солнца относительно центра земли и упомянутыхъ выше осей проведенныхъ чрезъ этотъ центръ. Тогда

$$\xi = x + X; \qquad \eta = y + Y; \qquad \zeta = z + Z$$

гдѣ

$$\xi = \Delta.\cos\delta.\cos\alpha; \qquad \eta = \Delta.\cos\delta.\sin\alpha; \qquad \zeta = \Delta.\sin\delta$$

если подъ Δ разумѣемъ разстояніе разсматриваемаго свѣтила отъ центра земли. Слѣдовательно

$$x + X = \Delta.\cos\delta.\cos\alpha$$
$$y + Y = \Delta.\cos\delta.\sin\alpha$$
$$z + Z = \Delta.\sin\delta$$

Величины X, Y, Z вычисляются на основаніи данныхъ получаемыхъ изъ общихъ астрономическихъ эфемеридъ, или прямо могутъ быть взяты изъ Nautical Almanac, а потому при диффренцированіи предыдущихъ уравненій для той цѣли, которую мы имѣемъ теперь въ виду, эти величины должны быть разсматриваемы какъ постоянныя.

И такъ

$$dx = \cos\alpha.\cos\delta.d\Delta - \Delta.\sin\delta.\cos\alpha.d\delta - \Delta.\cos\delta.\sin\alpha.d\alpha$$
$$dy = \sin\alpha.\cos\delta.d\Delta - \Delta.\sin\delta.\sin\alpha.d\delta + \Delta.\cos\delta.\cos\alpha.d\alpha$$
$$dz = \sin\delta.d\Delta + \Delta.\cos\delta.d\delta$$

Послѣднее изъ этихъ уравненій даетъ

$$d\Delta = \frac{dz}{\sin\delta} - \Delta.\operatorname{cotg}\delta.d\delta$$

Внося это въ два первыя изъ предыдущихъ уравненій, имѣемъ

$$dx = \cos\alpha.\operatorname{cotg}\delta.dz - \frac{\Delta}{\sin\delta}\cdot\cos\alpha.d\delta - \Delta.\sin\alpha.\cos\delta.d\alpha$$

$$dy = \sin\alpha.\operatorname{cotg}\delta.dz - \frac{\Delta}{\sin\delta}\cdot\sin\alpha.d\delta + \Delta.\cos\alpha.\cos\delta.d\alpha$$

откуда легко находимъ

$$(292)\qquad \begin{aligned} \cos\delta.d\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\Delta}dy - \frac{\sin\alpha}{\Delta}dx \\ d\delta &= \frac{\cos\delta}{\Delta}dz - \frac{\cos\alpha.\sin\delta}{\Delta}dx - \frac{\sin\alpha.\sin\delta}{\Delta}dy \end{aligned}$$

Поэтому заключаемъ, что

$$(293)\qquad \begin{aligned} \cos\delta\frac{d\alpha}{dx} &= -\frac{\sin\alpha}{\Delta}; &\quad \frac{d\delta}{dx} &= -\frac{\cos\alpha.\sin\delta}{\Delta} \\ \cos\delta\frac{d\alpha}{dy} &= \frac{\cos\alpha}{\Delta}; &\quad \frac{d\delta}{dy} &= -\frac{\sin\alpha.\sin\delta}{\Delta} \\ \cos\delta\frac{d\alpha}{dz} &= 0; &\quad \frac{d\delta}{dz} &= \frac{\cos\delta}{\Delta} \end{aligned}$$

Такимъ образомъ изъ уравненій (291) мы видимъ, что для составленія производныхъ координатъ α и δ взятыхъ по элементамъ, необходимо найти производныя линейныхъ координатъ x, y, z по этимъ элементамъ, ибо остальныя производныя входящія въ выраженія (291) теперь составлены и имѣютъ форму (293).

41. Имѣя въ виду составить производныя прямолинейныхъ координатъ по элементамъ, опредѣлимъ относительно экватора положеніе плоскости орбиты свѣтила.

Помощію такаго преобразованія значительно упрощается вычисленіе коэффиціентовъ въ выраженіяхъ представляющихъ зависимость между измѣненіемъ координатъ и измѣненіемъ элементовъ.

Пусть EQ (фиг. 8) представляетъ собою пересѣченіе сферы небесной плоскостію эклиптики, AQ—пересѣченіе той же сферы плоскостію экватора и PP'—пересѣченіе ея же плоскостію орбиты. Если назовемъ чрезъ i' наклоненіе орбиты къ экватору, то $PaQ' = i'$. Означимъ чрезъ θ' прямое восхожденіе восходящаго узла орбиты надъ плоскостію экватора, тогда $\nu a = \theta'$. Если въ p находится разсматриваемое свѣтило, то дугу pa будемъ называть аргументомъ широты свѣтила относительно экватора. Положимъ $ba = \omega_0$. Положеніе плоскости орбиты относительно экватора опредѣляется величинами θ' и i'. Чтобы вычислить ихъ по даннымъ θ и i, обратимся къ треугольнику νba, стороны котораго суть: $\nu b = \theta$; $\nu a = \theta'$; $ab = \omega_0$; имъ противулежатъ углы: $\nu ab = 180^0 - i'$; $\nu ba = i$; $b\nu a = \varepsilon$; гдѣ подъ ε разумѣемъ наклоненіе эклиптики къ экватору. Примѣняя къ рѣшенію этого треугольника уравненія Гаусса, имѣемъ

$$\cos\frac{i'}{2}\sin\frac{\theta'+\omega_0}{2} = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{i-\varepsilon}{2}$$

$$\cos\frac{i'}{2}\cos\frac{\theta'+\omega_0}{2} = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{i+\varepsilon}{2}$$

$$\sin\frac{i'}{2}\sin\frac{\theta'-\omega_0}{2} = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{i-\varepsilon}{2} \qquad (294)$$

$$\sin\frac{i'}{2}\cos\frac{\theta'-\omega_0}{2} = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{i+\varepsilon}{2}$$

посредствомъ этихъ выраженій по даннымъ i, θ и ε легко находимъ i', θ' и ω_0. Имѣя эти послѣднія, представимъ геліоцентрическія координаты свѣтила въ зависимости отъ i', θ' и ω_0.

Проведемъ чрезъ центръ Солнца плоскость параллельную плоскости экватора. Предположимъ, что эта плоскость пересѣкаетъ сферу описанную произвольнымъ радіусомъ около центра Солнца по кругу EQ (фиг. 9). Пусть сѣченіе той же сферы плоскостію орбиты представляется кругомъ pp' и въ P пусть проэктируется изъ центра Солнца на упомянутую сферу разсматриваемое свѣтило. Тогда дуга Pa, которую означимъ чрезъ u, будетъ представлять аргументъ широты свѣтила относительно экватора, а уголъ $PaQ = i'$. Проведемъ въ плоскости EQ изъ центра Солнца принимаемаго за начало координатъ линію параллельную пересѣченію экватора съ эклиптикой и эту линію примемъ за ось x; за положительный конецъ оси будемъ считать ту часть, которая направлена въ точку весенняго равноденствія; ось y проведемъ перпендикулярно къ оси x такимъ образомъ, чтобы положительный конецъ этой оси пересѣкался со сферой въ точкѣ прямое восхожденіе которой есть 90^0. Назовемъ координаты свѣтила относительно такихъ осей чрезъ x, y, z. Тогда

$$x = r.\cos(r,x); \qquad y = r.\cos(r,y); \qquad z = r.\cos(r,z)$$

Изъ треугольника xPa, въ которомъ $Pa = u$; $xa = \theta'$; $xaP = 180^0 - i'$, имѣемъ

$$\cos(r,x) = \cos\theta'.\cos u - \sin\theta'.\sin u.\cos i'$$

Изъ треугольника aPy, въ которомъ $ay = 90^0 - \theta'$, $Pay = i'$, получаемъ

$$\cos(r, y) = \sin\theta' . \cos u + \cos\theta' . \sin u . \cos i'$$

и наконецъ изъ треугольника zaP, въ которомъ $za = 90^0$; $zaP = 90^0 - i$, находимъ

$$\cos(r, z) = \sin u . \sin i'$$

слѣдовательно

$$x = r.[\cos u . \cos\theta' - \sin u . \sin\theta' . \cos i']$$
$$y = r.[\cos u . \sin\theta' + \sin u . \cos\theta' . \cos i']$$
$$z = r . \sin u . \sin i'$$

откуда заключаемъ, что

(295)
$$dx = \frac{dx}{dr}\cdot dr + \frac{dx}{du}\cdot du + \frac{dx}{d\theta'}\cdot d\theta' + \frac{dx}{di'}\cdot di'$$
$$dy = \frac{dy}{dr}\cdot dr + \frac{dy}{du}\cdot du + \frac{dy}{d\theta'}\cdot d\theta' + \frac{dy}{di'}\cdot di'$$
$$dz = \frac{dz}{dr}\cdot dr + \frac{dz}{du}\cdot du + \frac{dz}{d\theta'}\cdot d\theta' + \frac{dz}{di'}\cdot di'$$

по предыдущимъ выраженіямъ координатъ составляемъ

$$\frac{dx}{du} = -r[\sin u . \cos\theta' + \sin\theta' . \cos i' . \cos u]$$
$$\frac{dy}{du} = -r[\sin u . \sin\theta' - \cos\theta' . \cos i' . \cos u]$$
$$\frac{dz}{du} = r . \sin i' . \cos u$$
$$\frac{dx}{dr} = \cos u . \cos\theta' - \sin u . \sin\theta' . \cos i'$$
$$\frac{dy}{dr} = \cos u . \sin\theta' + \cos u . \cos\theta' . \cos i'$$
$$\frac{dz}{dr} = \sin u . \sin i'$$
$$\frac{dx}{d\theta'} = -r[\cos u . \sin\theta' + \sin u . \cos i' . \cos\theta']$$
$$\frac{dy}{d\theta'} = -r[\sin u . \cos i' . \sin\theta' - \cos u . \cos\theta']$$
$$\frac{dz}{d\theta'} = 0$$
$$\frac{dx}{di'} = r . \sin u . \sin\theta' . \sin i'$$
$$\frac{dy}{di'} = r . \sin u . \cos\theta' . \sin i'$$
$$\frac{dz}{di'} = r . \sin u . \cos i'$$

Повернемъ систему осей координатъ около оси z на уголъ θ' и при томъ такъ, чтобы ось x прошла чрезъ восходящій узелъ орбиты надъ экваторомъ. Такое преобразованіе приведется къ тому чтобы уменьшить углы считаемые въ плоскости экватора на уголъ θ'. Въ предыдущихъ выраженіяхъ входитъ одинъ только уголъ считаемый въ плоскости экватора, именно уголъ θ', а потому для нихъ выполнимъ упомянутое преобразованіе, если положимъ въ нихъ $\theta' = 0$. И такъ при указанномъ теперь положеніи оси x имѣемъ

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{du} &= -r.\sin u. & \frac{dx}{d\theta'} &= -r.\sin u.\cos i' \\
\frac{dy}{du} &= r.\cos u.\cos i' & \frac{dy}{d\theta'} &= r.\cos u \\
\frac{dz}{du} &= r.\cos u.\sin i' & \frac{dz}{d\theta'} &= 0 \\
\frac{dx}{dr} &= \cos u & \frac{dx}{di'} &= 0 \\
\frac{dy}{dr} &= \sin u.\cos i' & \frac{dy}{di'} &= -r.\sin u.\sin i' \\
\frac{dz}{dr} &= \sin u.\sin i' & \frac{dz}{di'} &= r.\sin u.\cos i'
\end{aligned}
\tag{296}
$$

Эти выраженія суть составныя части дифференціаловъ dx, dy, dz, которыя должны быть внесены въ выраженіи (292), а потому въ этихъ послѣднихъ при упомянутомъ выше положеніи оси x уголъ α считаемый въ плоскости экватора также долженъ быть уменьшенъ на величину θ'. Такимъ образомъ выраженія (292) обращаются теперь въ

$$
\begin{aligned}
\cos\delta.d\alpha &= -\frac{\sin(\alpha-\theta')}{\Delta}dx + \frac{\cos(\alpha-\theta')}{\Delta}dy \\
d\delta &= -\cos(\alpha-\theta')\frac{\sin\delta}{\Delta}dx - \sin(\alpha-\theta')\frac{\sin\delta}{\Delta}\cdot dy + \frac{\cos\delta}{\Delta}dz
\end{aligned}
\tag{297}
$$

Принимая во вниманіе выраженія (296), легко приводимъ уравненія (295) къ виду

$$
\begin{aligned}
dx &= \cos u.dr - r.\sin u.du - r.\sin u.\cos i'.d\theta' \\
dy &= \sin u.\cos i'.dr + r.\cos u.\cos i'.du + r.\cos u.d\theta' - r.\sin u.\sin i'.di' \\
dz &= \sin u.\sin i'.dr + r.\cos u.\sin i'.du + r.\sin u.\cos i'.di'
\end{aligned}
$$

Внося это въ выраженія (297) и полагая для краткости

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha-\theta').\cos i' &= a'.\sin A'; & \sin(\alpha-\theta') &= a'.\cos A' \\
\sin i' &= m'.\sin M'; & -\sin(\alpha-\theta')\cos i' &= m'.\cos M' \\
m'.\sin(M'+\delta) &= b'.\sin B'; & \cos(\alpha-\theta')\sin\delta' &= b'.\cos B' \\
\cos(\alpha-\theta') &= c'.\sin C'; & \sin(\alpha-\theta')\cos i' &= c'.\cos C' \\
\cos i' &= k'.\sin K'; & \sin(\alpha-\theta')\sin i' &= k'.\cos K'
\end{aligned}
\tag{298}
$$

находимъ

$$\cos\delta.d\alpha = -\frac{a'}{\Delta}\cos(A'+u).dr + \frac{r.a'}{\Delta}\sin(A'+u).du$$

$$+\frac{r.c'}{\Delta}\sin(C'+u).d\theta' - \frac{r.\sin u.\sin i'}{\Delta}\cos(\alpha-\theta').di'$$

(299)

$$d\delta = -\frac{b}{\Delta}\cos(B'+u).dr + \frac{r.b'}{\Delta}\sin(B'+u).du$$

$$-\frac{r.a'}{\Delta}\sin\delta.\cos(A'+u)\,d\theta' + \frac{r.k'}{\Delta}\sin u.\sin(K'+u).di'$$

Если означимъ чрезъ ω' разстояніе перигелія орбиты отъ ея узла надъ экваторомъ, разстояніе считаемое по орбитѣ, то очевидно, что $u = \omega' + v$, гдѣ подъ v разумѣемъ истинную аномалію и принимаемъ $\omega' = \pi' - \theta'$. Что касается до π', то мы считаемъ эту величину слѣдующимъ образомъ. Отложимъ по орбитѣ отъ точки a (фиг. 8), т. е. отъ узла на экваторѣ дугу $ad = \theta'$, тогда, предполагая что въ f находится перигелій орбиты, принимаемъ $fd = \pi'$, слѣдовательно $\pi' = fb + ba + ad$, но такъ какъ $fb = \pi - \theta$, то $\pi' = \pi - \theta + \omega_0 + \theta'$. И такъ мы видимъ, что $du = dv + d\omega'$, а потому если внесемъ въ предыдущія уравненія (299) вмѣсто du эту его величину, то увидимъ, что упомянутыя уравненія будутъ содержать въ себѣ дифференціалы: dr, dv, $d\omega'$, $d\theta'$ и di'. Чтобы пользоваться этими уравненіями для рѣшенія нашего вопроса, опредѣлимъ измѣненіе координатъ r и v въ зависимости отъ измѣненія элементовъ орбиты, т. е. представимъ dr и dv въ функціи дифференціаловъ элементовъ.

42. Такъ какъ координатами v и r опредѣляется положеніе свѣтила въ орбитѣ, то эти координаты могутъ зависѣть только отъ трехъ элементовъ φ, M_0 и μ; поэтому

$$dr = \frac{dr}{d\varphi}\cdot d\varphi + \frac{dr}{dM_0}\cdot dM_0 + \frac{dr}{d\mu}\cdot d\mu$$

$$dv = \frac{dv}{d\varphi}\cdot d\varphi + \frac{dv}{dM_0}\cdot dM_0 + \frac{dv}{d\mu}\cdot d\mu$$

Разсматривая же прямолинейныя координаты какъ функціи упомянутыхъ трехъ элементовъ, имѣемъ

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dx}{dr}\cdot\frac{dr}{d\varphi} + \frac{dx}{dv}\cdot\frac{dv}{d\varphi}$$

$$\frac{dx}{dM_0} = \frac{dx}{dr}\cdot\frac{dr}{dM_0} + \frac{dx}{dv}\cdot\frac{dv}{dM_0}$$

$$\frac{dx}{d\mu} = \frac{dx}{dr}\cdot\frac{dr}{d\mu} + \frac{dx}{dv}\cdot\frac{dv}{d\mu}$$

и подобныя же выраженія для производныхъ двухъ другихъ координатъ. Видъ частныхъ производныхъ $\frac{dx}{dr}$, $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dr}$, $\frac{dy}{dv}$ и т. д. опредѣляется первыми шестью изъ вы-

раженій (296), а потому остается опредѣлить видъ производныхъ $\frac{dr}{d\varphi}$, $\frac{dv}{d\varphi}$, $\frac{dr}{dM_0}$; $\frac{dv}{dM_0}$, $\frac{dr}{d\mu}$, $\frac{dv}{d\mu}$. Назвавъ эксцентрическую аномалію чрезъ E, а среднюю—чрезъ M, имѣемъ

$$M = E - e.\sin E$$

откуда, полагая $e = \sin\varphi$, находимъ

$$dM = [1 - \sin\varphi.\cos E]\, dE - \cos\varphi.\sin E.d\varphi$$

Но мы знаемъ, что

$$r = a\,(1 - \sin\varphi.\cos E); \qquad r.\sin v = a.\cos\varphi.\sin E$$

поэтому

$$dM = \frac{r}{a}\, dE - \frac{r}{a}\cdot\sin v.d\varphi$$

откуда

$$dE = \frac{a}{r}\cdot dM + \sin v.d\varphi \tag{300}$$

Но такъ какъ

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right).\operatorname{tang}\frac{E}{2}$$

то взявъ отъ обѣихъ частей этого уравненія логариѳмъ, а потомъ дифференціалъ, получимъ

$$\frac{dv}{2.\sin\frac{v}{2}\cdot\cos\frac{v}{2}} = \frac{dE}{2.\sin\frac{E}{2}\cdot\cos\frac{E}{2}} + \frac{d\varphi}{2.\sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right).\cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

что приводится къ виду

$$dv = \frac{\sin v}{\sin E}\cdot dE + \frac{\sin v}{\cos\varphi}\cdot d\varphi$$

Вносл сюда вмѣсто dE выше найденную его величину, послѣ замѣны $\sin E$ чрезъ $\frac{r.\sin v}{a.\cos\varphi}$ получимъ

$$dv = \left(\frac{a}{r}\right)^2.\cos\varphi.dM + \frac{\sin v}{\cos\varphi}\left[\frac{a}{r}\cos^2\varphi + 1\right] d\varphi$$

Но мы знаемъ, что $p = a.\cos^2\varphi$, а потому предъидущее обращается въ

$$dv = \left(\frac{a}{r}\right)^2.\cos\varphi.dM + \frac{\sin v}{\cos\varphi}\left[\frac{p}{r} + 1\right] d\varphi$$

Извѣстно также, что

$$\frac{p}{r} = 1 + \sin\varphi.\cos v$$

поэтому

$$dv = \left(\frac{a}{r}\right)^2 . \cos\varphi . dM + \left[\frac{2}{\cos\varphi} + \operatorname{tang}\varphi . \cos v\right] \sin v . d\varphi$$

Чтобы окончательно развить dv, остается исключить dM и замѣнить его дифференціалами элементовъ.

Мы знаемъ, что

$$M = M_0 + \mu . (t - T); \qquad \mu = \frac{K\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

гдѣ T есть эпоха и ей соотвѣтствуетъ средняя аномалія M_0. При дифференцированіи перваго изъ этихъ выраженій для нашей цѣли мы должны разсматривать t какъ постоянную величину, ибо это есть данное время, для котораго по элементамъ вычисляется та или другая координата. Кромѣ того изъ двухъ величинъ M_0 и T по смыслу вопроса только одна должна быть разсматриваема какъ перемѣнная, именно та изъ нихъ, которую мы считаемъ за элементъ. Принимая все это во вниманіе, будемъ дифференцировать предыдущія выраженія, но отъ втораго изъ нихъ предварительнаго возмемъ логариемъ. И такъ

$$dM = dM_0 + (t - T)\, d\mu; \qquad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{da}{a} \tag{301}$$

Внося это въ послѣднее выраженіе dv, находимъ

$$dv = \left(\frac{a}{r}\right)^2 . \cos\varphi . dM_0 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 (t - T) \cos\varphi . d\mu + \left[\frac{2}{\cos\varphi} + \operatorname{tang}\varphi . \cos v\right] \sin v . d\varphi \tag{302}$$

Перейдемъ къ опредѣленію производныхъ r по элементамъ. Изъ выраженія

$$r = a\,(1 - \sin\varphi . \cos E)$$

находимъ

$$dr = \frac{r}{a} \cdot da + a . \sin\varphi . \sin E . dE - a . \cos\varphi . \cos E . d\varphi$$

Внося сюда вмѣсто dE его величину изъ выраженія (300), имѣемъ

$$dr = \frac{r}{a} \cdot da + a . \sin\varphi . \sin E \left[\frac{a}{r} \cdot dM + \sin v . d\varphi\right] - a . \cos\varphi . \cos E . d\varphi$$

Но такъ какъ

$$\sin E = \frac{r}{a} \cdot \frac{\sin v}{\cos\varphi}$$

то предыдущее можно представить въ видѣ

$$dr = \frac{r}{a} \cdot da + a . \operatorname{tang}\varphi . \sin v . dM + [a . \sin\varphi . \sin v . \sin E - a . \cos\varphi . \cos E]\, d\varphi$$

Но мы знаемъ, что

$$\sin E = \frac{\cos\varphi . \sin v}{1 + e . \cos v}; \qquad \cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e . \cos v}$$

а потому все выраженіе легко приводится къ виду

$$dr = \frac{r}{a} \cdot da + a . \operatorname{tang} \varphi . \sin v . dM - a . \cos \varphi . \cos v . d\varphi$$

Исключая отсюда da и dM посредствомъ выраженій (301), легко находимъ

$$\begin{aligned} dr &= a . \operatorname{tang} \varphi . \sin v . dM_0 \\ &+ \left[a (t - T) . \operatorname{tang} \varphi . \sin v - \frac{2r}{3 . \mu} \right] d\mu - a . \cos \varphi . \cos v . d\varphi \end{aligned} \tag{303}$$

Такъ какъ μ предполагается выраженнымъ въ секундахъ дуги, то для однородности въ послѣднемъ членѣ производной $\frac{dr}{d\mu}$ при μ слѣдуетъ ввести множителя $\sin 1''$.

Помня, что $du = dv + d\omega'$, внесемъ найденныя теперь выраженія dv и dr въ выраженія (299), положимъ при этомъ

$$\begin{aligned} f' . \sin F' &= \operatorname{tang} \varphi . \sin v \\ f' . \cos F' &= \cos \varphi \\ g' . \sin G' &= - \left[a (t - T) \operatorname{tang} \varphi . \sin v - \frac{2r}{3\mu . \sin 1''} \right] \\ g' . \cos G' &= \frac{a^2}{r} (t - T) . \cos \varphi \\ h' . \sin H' &= a . \cos \varphi . \cos v \\ h' . \cos H' &= \frac{\sin v}{\cos \varphi} [2 + \sin \varphi . \cos v] \end{aligned} \tag{304}$$

и тогда найдемъ

$$\begin{aligned} \cos \delta . d\alpha &= \frac{f'}{\Delta} \frac{a^2}{r} a' . \sin (A' + F' + u) dM_0 + \frac{g'}{\Delta} a' . \sin (A' + G' + u) . d\mu \\ &+ \frac{h'}{\Delta} a' . \sin (A' + H' + u) d\varphi + \frac{r}{\Delta} a' . \sin (A' + u) . d\omega' \\ &+ \frac{r}{\Delta} c' . \sin (C' + u) . d\theta' - \frac{r}{\Delta} \sin u . \sin i' . \cos (\alpha - \theta') . di' \\ d\delta &= \frac{f'}{\Delta} \frac{a^2}{r} b' . \sin (B' + F' + u) dM_0 + \frac{g'}{\Delta} b' . \sin (B' + G' + u) . d\mu \\ &+ \frac{h'}{\Delta} b' . \sin (B' + H' + u) d\varphi + \frac{r . b'}{\Delta} \sin (B' + u) . d\omega' \\ &- \frac{r}{\Delta} a' . \sin \delta . \cos (A' + u) d\theta' + \frac{r . k'}{\Delta} \sin u . \sin (K' + \delta) . di' \end{aligned} \tag{305}$$

Въ такомъ видѣ представляются измѣненія склоненія и прямаго восхожденія свѣтила въ зависимости отъ измѣненія элементовъ его орбиты.

43. Какъ скоро изъ совокупности подобныхъ уравненій соотвѣтствующихъ каждому отдѣльно рассматриваемому положенію свѣтила, будутъ найдены поправки $d\theta'$, $d\omega'$ и di, то по этимъ послѣднимъ не трудно опредѣлить исправленныя величины

элементовъ i, ω и θ, считаемыхъ относительно эклиптики. Въ самомъ дѣлѣ, изъ треугольника vab (фиг. 8) имѣемъ

(306)
$$\begin{aligned}
\sin\frac{\theta+\omega_0}{2}\cdot\sin\frac{i}{2} &= \sin\frac{i'+\varepsilon}{2}\cdot\sin\frac{\theta'}{2}\\
\cos\frac{\theta+\omega_0}{2}\cdot\sin\frac{i}{2} &= \sin\frac{i'-\varepsilon}{2}\cdot\cos\frac{\theta'}{2}\\
\sin\frac{\theta-\omega_0}{2}\cdot\cos\frac{i}{2} &= \cos\frac{i'+\varepsilon}{2}\cdot\sin\frac{\theta'}{2}\\
\cos\frac{\theta-\omega_0}{2}\cdot\cos\frac{i}{2} &= \cos\frac{i'-\varepsilon}{2}\cdot\cos\frac{\theta'}{2}
\end{aligned}$$

Если означимъ чрезъ i_0' и θ_0' наклоненіе орбиты къ экватору и прямое восхожденіе узла этой орбиты надъ экваторомъ вычисленныя по тремъ наблюденіямъ, то болѣе точныя значенія тѣхъ же элементовъ будутъ $\theta'=\theta_0'+\Delta\theta'$ и $i'=i_0'+\Delta i'$, гдѣ подъ $\Delta\theta'$ и $\Delta i'$ разумѣемъ тѣ поправки, которыя найдены при рѣшеніи условныхъ уравненій (305). При помощи этихъ точныхъ значеній i' и θ' изъ уравненій (306) найдутся точныя значенія элементовъ θ, i и ω_0. Какъ скоро эти послѣднія будутъ извѣстны, то точная долгота перигелія опредѣлится по выраженію

$$\pi=(\pi'-\omega_0)-(\theta'-\theta)$$

Такъ какъ элементы относительно эклиптики при рѣшеніи разсматриваемаго вопроса приближенно извѣстны, то вмѣсто опредѣленія самыхъ θ, i и π удобнѣе опредѣлить ихъ поправки въ зависимости отъ поправокъ $\Delta i'$ и $\Delta\theta'$.

Изъ треугольника vab (фиг. 8) имѣемъ

$$\cos i=\cos i'.\cos\varepsilon+\sin i'.\sin\varepsilon.\cos\theta'$$

откуда

$$\begin{aligned}-\sin i\,.\,di = &-[\sin i'.\cos\varepsilon-\cos i'.\sin\varepsilon.\cos\theta']\,di'\\ &-\sin i'.\sin\varepsilon.\sin\theta'.d\theta'\end{aligned}$$

Изъ того же треугольника имѣемъ

$$\sin i.\cos\omega_0=\cos\varepsilon.\sin i'-\sin\varepsilon.\cos i'.\cos\theta'$$
$$\sin\theta'.\sin\varepsilon=\sin i.\sin\omega_0$$

слѣдовательно

(307)
$$di=\cos\omega_0\,di'+\sin\omega_0\sin i'.d\theta'$$

Тотъ же треугольникъ vab даетъ

$$-\cos i'=-\cos i.\cos\varepsilon+\sin i.\sin\varepsilon.\cos\theta$$

откуда

$$\sin i'.di'=[\sin i.\cos\varepsilon+\cos i.\sin\varepsilon.\cos\theta]\,di-\sin i.\sin\varepsilon.\sin\theta.d\theta$$

но

$$\sin i'.\cos\omega_0=\sin i.\cos\varepsilon+\cos i.\sin\varepsilon.\cos\theta$$
$$\sin i'.\sin\omega_0=\sin\varepsilon.\sin\theta$$

поэтому

$$di' = \cos\omega_0 . di - \sin i . \sin\omega_0 . d\theta$$

исключая отсюда di посредствомъ уравненія (307), находимъ

$$di' \sin\omega_0 = \cos\omega_0 . \sin i' . d\theta' - \sin i . d\theta$$

но такъ какъ

$$\sin i' . \sin\theta' = \sin i . \sin\theta$$

то

$$d\theta = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} \cdot \cos\omega_0 . d\theta' - \frac{\sin\omega_0}{\sin i} \cdot di' \tag{308}$$

Изъ треугольника bav имѣемъ

$$\cos\omega_0 = \cos\theta . \cos\theta' + \sin\theta . \sin\theta' . \cos\varepsilon$$

откуда

$$\begin{aligned} -\sin\omega_0 . d\omega_0 = &[\cos\theta . \sin\theta' . \cos\varepsilon - \sin\theta . \cos\theta'] . d\theta \\ &+ [\cos\theta' . \sin\theta . \cos\varepsilon - \sin\theta' . \cos\theta] . d\theta' \end{aligned}$$

но

$$-\sin\omega_0 . \cos i' = \cos\theta . \sin\theta' - \sin\theta . \cos\theta' . \cos\varepsilon$$

$$\sin\omega_0 . \cos i = \cos\theta' . \sin\theta - \sin\theta' . \cos\theta . \cos\varepsilon$$

слѣдовательно

$$d\omega_0 = \cos i . d\theta - \cos i' . d\theta'$$

Исключая отсюда $d\theta'$ посредствомъ выраженія (308), находимъ

$$d\omega_0 = [\sin\theta . \cos\omega_0 . \cos i - \cos i' . \sin\theta'] \frac{d\theta'}{\sin\theta'} - \frac{\sin\omega_0}{\sin i} \cos i . di'$$

но

$$\sin\theta . \cos\omega_0 . \cos i - \sin\theta' . \cos i' = \cos\theta . \sin\omega_0$$

поэтому

$$d\omega_0 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta'} \sin\omega_0 . d\theta' - \frac{\sin\omega_0}{\sin i} \cos i . di'$$

Такимъ образомъ для вычисленія поправокъ $\Delta\omega_0$, $\Delta\theta$, Δi и $\Delta\omega$ по найденнымъ поправкамъ $\Delta i'$ и $\Delta\theta'$ имѣемъ выраженія

$$\begin{aligned} \Delta\omega_0 &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta'} \sin\omega_0 . \Delta\theta' - \frac{\sin\omega_0}{\sin i} \cos i . \Delta i' \\ \Delta\theta &= \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} \cos\omega_0 . \Delta\theta' - \frac{\sin\omega_0}{\sin i} \Delta i' \\ \Delta i &= \sin\omega_0 . \sin i' . \Delta\theta' + \cos\omega_0 . \Delta i' \\ \Delta\omega &= \Delta\omega' - \Delta\omega_0 \end{aligned} \tag{309}$$

Что касается до величинъ i, θ и ω_0 входящихъ во вторыя части этихъ уравненій, то для этого вычисленія должны быть употреблены тѣ ихъ значенія, которыя первоначально найдены по тремъ наблюденіямъ.

44. Мы нашли форму коеффиціентовъ въ уравненіяхъ представляющихъ зависимость между измѣненіями координатъ и измѣненіями элементовъ, но при этомъ имѣли въ виду исключительно эллиптическія орбиты съ небольшими эксцентриситетами. Слѣдовательно уравненія (305) примѣнимы только въ случаѣ изслѣдованія планетныхъ орбитъ. Кометы движутся въ большинствѣ случаевъ по параболамъ или же въ такихъ эллиптическихъ орбитахъ, эксцентриситеты которыхъ близки къ единицѣ. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ вычисленіе коеффиціентовъ при $d\varphi$, dM_0 и $d\mu$ по выраженіямъ (304) можетъ сдѣлаться весьма неточнымъ, ибо для эксцентриситета близкаго къ единицѣ φ не много отличается отъ 90°, а потому $\cos\varphi$ близокъ къ нулю, а $\tang\varphi$ есть большая величина, но какъ видно, $\cos\varphi$ входитъ дѣлителемъ въ выраженіе $h'.\cos H'$.

Имѣя это въ виду, найдемъ выраженія для вычисленія вѣроятнѣйшихъ орбитъ свѣтилъ движущихся по эллипсисамъ съ большимъ эксцентриситетомъ, а равно и для вычисленія вѣроятнѣйшихъ параболическихъ путей. Начнемъ съ рѣшенія этого послѣдняго вопроса.

Параболическая орбита опредѣляется пятью элементами: θ, i, ω, q и T, гдѣ подъ q разумѣемъ разстояніе перигелія отъ Солнца, подъ T время прохожденія черезъ перигелій. Если элементы θ, i и ω отнесенные къ эклиптикѣ замѣнимъ соотвѣтствующими элементами относящимися къ экватору, то въ выраженіяхъ (299) дифференціалы $d\theta'$, di' и $d\omega'$ сохранятъ тоже значеніе какъ прежде, сохранятъ свою форму и коеффиціенты находящіеся при нихъ, но дифференціалы du и dr будутъ имѣть теперь другой составъ. Такъ какъ $du = dv + d\omega'$, то измѣнится только та часть, которая относится къ dv.

Для опредѣленія dv обратимся къ выраженію (198), которое при дифференцированіи даетъ

$$-\frac{2K}{\sqrt{2}}.q^{-\frac{3}{2}}dT - \frac{3K}{\sqrt{2}}(t-T).q^{-\frac{5}{2}}dq = \frac{dv}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)} + \tang^2\left(\frac{v}{2}\right).\frac{dv}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)}$$

но для параболы

$$r = \frac{q}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)}$$

Слѣдовательно предыдущее можно представить въ видѣ

$$-\frac{2K}{\sqrt{2}}.q^{-\frac{3}{2}}dT - \frac{3K}{\sqrt{2}}(t-T).q^{-\frac{5}{2}}dq = \frac{r}{q}.dv + \frac{r}{q}\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)} - 1\right]dv$$

что легко приводится къ формѣ

$$-\frac{2K}{\sqrt{2}}\sqrt{q}.dT - \frac{3K}{\sqrt{2}}\frac{(t-T)}{\sqrt{q}}dq = r^2.dv$$

Слѣдовательно

$$dv = -\frac{K}{r^2}\cdot\sqrt{2q}\,.\,dT - \frac{3K(t-T)}{r^2.\sqrt{2q}}\cdot dq \tag{310}$$

Опредѣлимъ теперь для разсматриваемаго случая величину dr. Дифференцируя полярное уравненіе параболы, имѣемъ

$$dr = \frac{dq}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)} + q\,\frac{\sin v}{2\,.\cos^4\left(\frac{v}{2}\right)}\cdot dv$$

или внося сюда вмѣсто dv его предыдущую величину, получимъ

$$dr = \left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{q.\sin\frac{v}{2}\cdot\cos\frac{v}{2}}{\cos^4\left(\frac{v}{2}\right)}\cdot\frac{3K(t-T)}{r^2.\sqrt{2q}}\right]dq - \frac{q}{2}\,\frac{\sin v}{\cos^4\left(\frac{v}{2}\right)}\,\frac{K.\sqrt{2q}}{r^2}\,dT$$

но такъ какъ по уравненію (198)

$$\frac{K(t-T)}{\sqrt{2q}} = q\left[\operatorname{tang}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right)\right]$$

то коеффиціентъ при dq въ предыдущемъ выраженіи можетъ быть представленъ въ видѣ

$$1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{3q^2}{r^2}\cdot\operatorname{tang}\left(\frac{v}{2}\right)\left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]\left[\operatorname{tang}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{v}{2}\right)\right]$$

или

$$1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{v}{2}\right)\left[1 + 2\,.\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]\left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]$$

или

$$\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)\left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right] - 2.\sin^2\left(\frac{v}{2}\right)$$

Что накопецъ легко приводится къ $\cos v$. Слѣдовательно

$$dr = \cos v\,.\,dq - \frac{K.\sin v}{\sqrt{2q}}\cdot dT \tag{311}$$

Внося найденныя выраженія dv и dr въ уравненія (299) и полагая

$$\begin{aligned} \frac{K.\sin v}{\sqrt{2q}} &= l'.\cos L'; & \frac{3.K(t-T)}{r.\sqrt{2q}} &= n'.\sin N' \\ \frac{K.\sqrt{2q}}{r} &= l'.\sin L'; & -\frac{\cos v}{\sin 1''} &= n'.\cos N' \end{aligned} \tag{312}$$

легко получимъ

$$\cos\delta.d\alpha = \frac{r.c'}{\Delta}\sin(C'+u)\,d\theta' - \frac{r}{\Delta}\sin u.\sin i'.\cos(\alpha-\theta').di'$$

$$+\frac{r.a'}{\Delta}\sin(A'+u)\,d\omega' + \frac{a'.l'}{\Delta}\cos(A'+L'+u)\,dT + \frac{a'.n'}{\Delta}\cos(A'+N'+u).dq$$

(313)

$$d\delta = -\frac{r.a'}{\Delta}\sin\delta.\cos(A'+u)\,d\theta' + \frac{r.k'}{\Delta}\sin u.\sin(K'+u).di'$$

$$+\frac{r.b'}{\Delta}\sin(B'+u)d\omega' + \frac{b'.l'}{\Delta}\cos(B'+L'+u)dT + \frac{a'.n'}{\Delta}\cos(B'+N'+u).dq$$

Этими уравненіями и представляются измѣненія координатъ α и δ обусловливающіяся измѣненіями элементовъ параболической орбиты.

45. Найдемъ уравненія представляющія подобныя измѣненія для случая такой эллиптической орбиты, эксцентриситетъ которой близокъ къ единицѣ. При изслѣдованіи подобныхъ орбитъ удобнѣе всего по тремъ наблюденіямъ вычислить параболическую орбиту и затѣмъ на основаніи многихъ наблюденій искать поправки полученной системы элементовъ вмѣстѣ съ тою поправкою de, которую слѣдуетъ вычесть изъ единицы, для того чтобы отъ параболической орбиты, у которой эксцентриситетъ равенъ единицѣ, перейти къ эллиптической орбитѣ.

Для орбитъ съ эксцентриситетомъ близкимъ къ единицѣ мы удержимъ тѣ же элементы какъ и для параболическихъ орбитъ, прибавивъ только эксцентриситетъ. Такимъ образомъ за систему элементовъ эллиптической орбиты съ большимъ эксцентриситетомъ будемъ считать θ', ω', i', q, T и e; гдѣ элементы опредѣляющіе положеніе орбиты относятся къ экватору. Понятно, что при этомъ должно быть

(314)

$$dr = \frac{dr}{dq}\cdot dq + \frac{dr}{dT}\cdot dT + \frac{dr}{de}\cdot de$$

$$dv = \frac{dv}{dq}\cdot dq + \frac{dv}{dT}\cdot dT + \frac{dv}{de}\cdot de$$

Для эллипсиса

$$r = \frac{p}{1+e.\cos v}$$

но въ перигеліи $v=0$ и соотвѣтствующее значеніе радіуса вектора будетъ

$$q = \frac{p}{1+e}$$

Слѣдовательно полярное уравненіе эллипсиса въ зависимости отъ q имѣетъ видъ

$$r = \frac{q(1+e)}{1+e.\cos v}$$

Но такъ какъ

$$\cos v = \frac{1-\tan^2\left(\frac{v}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{v}{2}\right)}$$

то

$$r = \frac{q(1+e)\left[1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]}{1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)+e\left[1-\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]}$$

или

$$r = \frac{q}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)}\left[\frac{1}{1+\frac{(1-e)}{(1+e)}\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)}\right]$$

Мы знаемъ, что удвоенная площадь сектора описаннаго радіусомъ векторомъ отъ перигелія до какой либо точки орбиты, напр. точки занимаемой свѣтиломъ во время t, можетъ быть представлена въ видѣ

$$K(t-T)\sqrt{p}$$

съ другой стороны таже площадь по полярнымъ координатамъ представляется въ формѣ

$$\int r^2 . dv$$

Предполагается, что интегралъ берется по v отъ $v=0$ до того значенія v, которое соотвѣтствуетъ времени t. И такъ

$$\int r^2 . dv = K(t-T)\sqrt{p}$$

Вносся сюда приведенное выше выраженіе r, получимъ

$$\int \frac{q^2}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{dv}{\left[1+\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]^2} = K(t-T)\sqrt{p}$$

но такъ какъ

$$\frac{dv}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)} = 2d\left(\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)$$

то предыдущее можно представить въ видѣ

$$\int \frac{q^2\left[1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]}{\left[1+\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]^2} d\left(\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right) = K(t-T)\sqrt{p}$$

Положимъ здѣсь

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = z; \qquad \frac{1-e}{1+e} = \sigma$$

И такъ какъ

$$q = \frac{p}{1+e}$$

то предыдущее приведется къ виду

$$(315)\qquad \frac{2p^2}{(1+e)^2}\int \frac{1+z^2}{(1+\sigma . z^2)^2}\,dz = K(t-T).\sqrt{p}$$

При большомъ эксцентриситетѣ σ есть малая величина, а потому для выполненія интегрированія удобно подъинтегральную функцію разложить въ рядъ расположенный по степенямъ σ. Мы знаемъ, что

$$\frac{1}{(1+\sigma . z^2)^2} = 1 - 2\sigma . z^2 + 3\sigma^2 . z^4 - 4\sigma^3 . z^6 + 5\sigma^4 . z^8 - \cdots\cdots$$

поэтому

$$\frac{1+z^2}{(1+\sigma . z^2)^2} = 1 + z^2 - 2\sigma(z^2+z^4) + 3\sigma^2(z^4+z^6) - 4\sigma^3(z^6+z^8) + \cdots\cdots$$

Слѣдовательно

$$\int \frac{1+z^2}{(1+\sigma . z^2)^2}\,dz = z + \frac{z^3}{3} - 2\sigma\left(\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\right) + 3\sigma^2\left(\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}\right) - \cdots\cdots$$

Положимъ $1 - e = \beta$, гдѣ β есть для разсматриваемаго случая малая величина, тогда $1 + e = 2 - \beta$. И такъ

$$\sigma = \frac{\beta}{2-\beta} = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^3}{8} + \cdots\cdots$$

$$\sigma^2 = \frac{\beta^2}{4} + 2\,\frac{\beta^3}{8} + 3\,\frac{\beta^4}{16} + \cdots\cdots$$

$$\sigma^3 = \frac{\beta^3}{8} + 3\,\frac{\beta^4}{16} + \cdots\cdots$$

Внося это въ предыдущій рядъ и располагая его по степенямъ β, найдемъ

$$\int \frac{(1+z^2)\,dz}{(1+\sigma . z^2)^2} = z + \frac{z^3}{3} - \beta\left[\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\right] - \beta^2\left[\frac{z^3}{6}-\frac{z^5}{20}-\frac{3z^7}{28}\right] - \cdots\cdots$$

внося это въ выраженіе (315), получимъ

$$\frac{2p^2}{(1+e)^2}\left[z + \frac{z^3}{3} - \beta\left(\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\right) - \cdots\cdots\right] = K(t-T)\sqrt{p}$$

но $p = q(1+e) = q(2-\beta)$, слѣдовательно

$$2p^2 = 2q^2(2-\beta)^2$$

а потому предыдущее принимаетъ видъ

$$\frac{2q^2(2-\beta)^2}{(2-\beta)^2}\left[z+\frac{z^3}{3}-\beta\left(\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\right)-\cdots\cdots\right]=K(t-T)\sqrt{2-\beta}\,.\sqrt{q}$$

или

$$\frac{K(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\beta}{2}}}\left[z+\frac{z^3}{3}-\beta\left(\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\right)-\cdots\right]$$

Но такъ какъ

$$\left(1-\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{\beta}{4}+\frac{3}{32}\cdot\beta^2+\frac{5}{128}\cdot\beta^3+\cdots\cdots$$

то

$$\frac{K(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2}}=z+\frac{z^3}{3}+\beta\left(\frac{z}{4}-\frac{z^3}{4}-\frac{z^5}{5}\right)$$
$$+\beta^2\left(\frac{3}{32}\cdot z-\frac{7}{32}\cdot z^3+\frac{3}{28}\cdot z^7\right) \tag{316}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Мы приняли $\operatorname{tang}\frac{v}{2}=z$, гдѣ подъ v разумѣемъ истинную аномалію соотвѣтствующую эллипсису. Такъ какъ мы имѣемъ въ виду такія эллиптическія орбиты, которыя мало отличны отъ параболическихъ, то понятно, что v будетъ мало разниться отъ истинной аномаліи w соотвѣтствующей параболѣ. И такъ если положимъ $v=w+\lambda$, то λ будетъ малая величина. Опредѣлимъ эту разность λ подъ тѣмъ условіемъ, чтобы вычисляемая вѣроятнѣйшая эллиптическая орбита имѣла одинакія q и T съ вѣроятнѣйшей орбитой въ параболической гипотезѣ.

Мы приняли

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2}=\operatorname{tang}\frac{w+\lambda}{2}$$

Разлагая это въ рядъ по строкѣ Тейлора, имѣемъ

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2}=\operatorname{tang}\frac{w}{2}+\lambda\frac{d\left(\operatorname{tang}\frac{w}{2}\right)}{dw}+\frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2\left(\operatorname{tang}\frac{w}{2}\right)}{dw^2}+\cdots\cdots$$

но

$$\frac{d\left(\operatorname{tang}\frac{w}{2}\right)}{dw}=\frac{1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)}{2}$$

а потому, ограничиваясь первыми степенями λ, находимъ

$$z=\operatorname{tang}\frac{w}{2}+\frac{\lambda}{2}\left[1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)\right]$$
$$z^3=\operatorname{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right)+\frac{3}{2}\lambda.\operatorname{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)\left[1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)\right]$$

Внося это въ выраженіе (316), получимъ

$$\frac{K(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \operatorname{tang}\left(\frac{w}{2}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right) + \frac{\lambda}{2}\left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)\right]^2$$
$$+ \beta\left(\frac{z}{4} - \frac{z^3}{4} - \frac{z^5}{5}\right)$$

Но въ членѣ зависящемъ отъ β прямо можно принять $z = \operatorname{tang}\frac{w}{2}$, тогда

$$\frac{K(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \operatorname{tang}\left(\frac{w}{2}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right) + \frac{\lambda}{2}\left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)\right]^2$$
$$+ \beta\left[\frac{1}{4}\operatorname{tang}\left(\frac{w}{2}\right) - \frac{1}{4}\operatorname{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right) - \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5\left(\frac{w}{2}\right)\right]$$

Такъ какъ мы хотѣли опредѣлить λ подъ тѣмъ условіемъ, чтобы T и q въ эллипсисѣ и параболѣ были одинаковы, а для параболы, какъ мы знаемъ, существуетъ соотношеніе

$$\frac{K(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \operatorname{tang}\frac{w}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right) \tag{317}$$

то вычитая это изъ предыдущаго, получимъ для опредѣленія λ слѣдующее уравненіе

$$\frac{\lambda}{2}\left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)\right]^2 = -\beta\left[\frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{w}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right) - \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5\left(\frac{w}{2}\right)\right]$$

откуда

$$\lambda = \frac{-\beta\left[\operatorname{tang}\left(\frac{w}{2}\right) - \operatorname{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right) - \frac{4}{5}\operatorname{tang}^5\left(\frac{w}{2}\right)\right]}{2\left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)\right]^2}$$

Полагая

$$\operatorname{tang}\frac{w}{2} = \theta$$

имѣемъ

$$\lambda = \left[\frac{\frac{4}{5}\theta^5 + \theta^3 - \theta}{2\theta^4 + 4\theta^2 + 2}\right]$$

или выполнивъ дѣленіе, имѣемъ

$$\lambda = \frac{2}{5}\theta \cdot \beta - \frac{\left[\frac{3}{5}\theta^3 + \frac{9}{5}\theta\right]\beta}{2\theta^4 + 4\theta^2 + 2}$$

или

$$\lambda = \frac{2}{5}\beta.\operatorname{tang}\frac{w}{2} - \frac{9}{5}\beta\left[\frac{\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{w}{2}\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{w}{2}\right)}{2\left[1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{w}{2}\right)\right]^2}\right]$$

но посредствомъ уравненія (317) приводимъ это къ виду

$$\lambda = \frac{2}{5}\beta.\operatorname{tang}\frac{w}{2} - \frac{\frac{9}{5}\beta.K(t-T)}{2q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}\cos^4\left(\frac{w}{2}\right)$$

такъ какъ

$$r = \frac{q}{\cos^2\left(\frac{w}{2}\right)}$$

то

$$\lambda = \frac{2}{5}\beta.\operatorname{tang}\frac{w}{2} - \frac{9}{20}\frac{\beta.K(t-T)\sqrt{2q}}{r^2} \tag{318}$$

Мы приняли

$$v = w + \lambda; \qquad \beta = 1 - e$$

Слѣдовательно можемъ разсматривать λ какъ измѣненіе истинной аномаліи обусловливающееся измѣненіемъ эксцентриситета отъ единицы до e и такъ какъ имѣется въ виду переходъ отъ параболы къ эллипсису, то эксцентриситетъ дѣлается меньше единицы, измѣненіе его должно считаться отрицательнымъ. И такъ если $\lambda = dv$; то $\beta = -de$, а слѣдовательно

$$\frac{dv}{de} = -\frac{\lambda}{\beta}$$

что посредствомъ уравненія (318) приводится къ виду

$$\frac{dv}{de} = \frac{9}{20}\frac{K(t-T)}{r^2}\sqrt{2q} - \frac{2}{5}\operatorname{tang}\frac{w}{2} \tag{319}$$

остается опредѣлить производную $\frac{dr}{de}$. Мы знаемъ, что

$$r = \frac{p}{1+e.\cos v} = \frac{q(1+e)}{1+e.\cos v}$$

Но такъ какъ мы предполагаемъ, что для эллиптической и для параболической орбиты q одинаково, то при дифференцированіи предыдущаго выраженія мы должны разсматривать только тѣ измѣненія r, которыя обусловливаются измѣненіями e и v. И такъ

$$dr = \frac{q(1-\cos v).de}{(1+e.\cos v)^2} + \frac{eq(1+e).\sin v.dv}{(1+e.\cos v)^2}$$

умноживъ и раздѣливъ послѣдній членъ на $q(1+e)$ и обращая вниманіе на начальное уравненіе, легко приводимъ это къ виду

$$dr = \frac{q(1-\cos v)}{(1+e.\cos v)^2}\,de + \frac{r^2.e.\sin v.dv}{q(1+e)}$$

Такъ какъ имѣется въ виду переходъ отъ параболы къ эллипсису и поправку эксцентриситета придется придавать со знакомъ къ $e=1$, то въ коеффиціентѣ при de и dv слѣдуетъ считать $e=1$, $v=w$, тогда

$$dr = \frac{q.\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)}{2.\cos^4\left(\frac{w}{2}\right)}\,de + \frac{r^2}{2q}\sin w.dw$$

Но при $e=1$, $r=\dfrac{q}{\cos^2\left(\frac{w}{2}\right)}$, слѣдовательно

$$dr = \frac{r^2}{2q}\sin^2\left(\frac{w}{2}\right).de + \frac{r^2}{2q}\sin w.dw$$

Вставивъ сюда выше найденное значеніе производной $\frac{dv}{de}$ вмѣсто $\frac{dw}{de}$, получимъ

$$\frac{dr}{de} = \frac{9}{20}\,\frac{K(t-T)}{\sqrt{2q}}\sin w + \frac{1}{10}\,\frac{r^2}{q}\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)$$

или

$$\frac{dr}{de} = \frac{9}{20}\,\frac{K(t-T)}{\sqrt{2q}}\sin w + \frac{r}{10}\tang^2\left(\frac{w}{2}\right) \tag{320}$$

Такъ какъ мы имѣемъ въ виду опредѣлить поправку de подъ тѣмъ условіемъ, что элементы T и q сохраняютъ тоже значеніе какъ въ вѣроятнѣйшей параболической орбитѣ, то въ выраженіяхъ (314) для производныхъ $\frac{dv}{dq}$, $\frac{dv}{dT}$, $\frac{dr}{dq}$, $\frac{dr}{dT}$ должна быть удержана та же форма, какая можетъ быть выведена для нихъ изъ выраженій (310) и (311), найденныхъ въ томъ предположеніи, что орбита свѣтила имѣетъ параболическую форму.

Такимъ образомъ по выраженіямъ (314) составляемъ теперь:

$$\begin{aligned} dv &= -\frac{K.\sqrt{2q}}{r^2}\cdot dT - \frac{3K(t-T)}{r^2.\sqrt{2q}}\cdot dq + \left[\frac{9}{20}\,\frac{K(t-T)}{r^2}\sqrt{2q} - \frac{2}{5}\tang\frac{v}{2}\right]de \\ dr &= -\frac{K.\sin v}{\sqrt{2q}}\cdot dT + \cos v.dq + \left[\frac{9}{20}\,\frac{K(t-T)\sin v}{\sqrt{2q}} + \frac{r}{10}\tang^2\left(\frac{v}{2}\right)\right]de \end{aligned} \tag{321}$$

Внесемъ это въ выраженія (299), удержимъ положенія (312) и кромѣ того примемъ

$$r\left[\frac{9}{20}K(t-T)\sqrt{2q}-\frac{2}{5}\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right]=p'.\sin P'$$
$$\frac{9}{20}\frac{K(t-T)\sin v}{\sqrt{2q}}+\frac{r}{10}\operatorname{tang}^2\left(\frac{v}{2}\right)=p'.\cos P' \tag{322}$$

послѣ всего этого получимъ

$$\begin{aligned}\cos\delta.d\alpha = & \frac{r.c'}{\Delta}\sin(C'+u).d\theta'-\frac{r}{\Delta}\sin u.\sin i'.\cos(\alpha-\theta')\,di' \\ + & \frac{r.a'}{\Delta}\sin(A'+u).d\omega'+\frac{a'.l'}{\Delta}\cos(A'+L'+u).dT \\ + & \frac{a'.n'}{\Delta}\cos(A'+N'+u).dq-\frac{p'.a'}{\Delta}\cos(A'+P'+u).de \\ d\delta = & -\frac{r.a'}{\Delta}\sin\delta.\cos(A'+u).d\theta'+\frac{r.k'}{\Delta}\sin u.\sin(K'+u).di' \\ + & \frac{r.b'}{\Delta}\sin(B'+u).d\omega'+\frac{b'.l'}{\Delta}\cos(B'+L'+u).dT \\ + & \frac{a'.n'}{\Delta}\cos(B'+N'+u).dq-\frac{b'.p'}{\Delta}\cos(B'+P'+u).de\end{aligned} \tag{323}$$

Въ такомъ видѣ удобно представить измѣненія склоненія и прямаго восхожденія кометы, обусловливающіяся измѣненіемъ элементовъ ея орбиты, имѣющей большой эксцентриситетъ. Опредѣляя поправки элементовъ изъ совокупности подобныхъ уравненій, составленныхъ для каждаго наблюдаемаго или нормальнаго мѣста, мы имѣемъ въ виду придать эти поправки къ элементамъ параболической орбиты, найденной по тремъ наблюденіямъ, при этомъ поправка de придается съ полученнымъ знакомъ къ единицѣ, ибо эксцентриситетъ первоначальной орбиты какъ параболической равенъ единицѣ.

46. Найдемъ наконецъ форму измѣненій долготы и широты свѣтила обусловливающихся измѣненіемъ элементовъ орбиты. При этомъ положеніе плоскости орбиты мы будемъ относить къ эклиптикѣ.

Если примемъ эклиптику за плоскость xy, начало координатъ помѣстимъ въ центрѣ Солнца, ось x направимъ въ восходящій узелъ орбиты по линіи пересѣченія орбиты съ эклиптикой, то назвавъ, какъ прежде, чрезъ r, u и i радіусъ векторъ свѣтила, его аргументъ широты и наклоненіе орбиты къ эклиптикѣ, представимъ геліоцентрическія координаты x_1, y_1, z_1 свѣтила въ формахъ (134). Назовемъ чрезъ Δ, β, λ разстояніе свѣтила отъ земли и его геоцентрическія широту и долготу. Пусть R и L будутъ разстояніе земли отъ Солнца и геліоцентрическая долгота земли. Тогда располагая плоскость xy въ плоскости эклиптики и направляя ось x въ точку весенняго равноденствія, представимъ геліоцентрическія координаты x', y', z' свѣтила, отнесенныя къ такимъ осямъ, въ формѣ

$$x'=R.\cos L+\Delta.\cos\beta.\cos\lambda$$
$$y'=R.\sin L+\Delta.\cos\beta.\sin\lambda$$
$$z'=\Delta.\sin\beta$$

а слѣдовательно геліоцентрическія координаты, отнесенныя къ осямъ выше упомянутымъ, т. е. къ тѣмъ, у которыхъ ось x направлена по линіи узловъ орбиты, будутъ

$$x_1 = R \,.\, \cos(L - \theta) + \Delta \,.\, \cos\beta \,.\, \cos(\lambda - \theta)$$
$$y_1 = R \,.\, \sin(L - \theta) + \Delta \,.\, \cos\beta \,.\, \sin(\lambda - \theta)$$
$$z_1 = \Delta \,.\, \sin\beta$$

Сравнивая эти выраженія съ выраженіями (134), получимъ

$$\begin{aligned} r \,.\, \cos u &= R \,.\, \cos(L - \theta) + \Delta \,.\, \cos\beta \,.\, \cos(\lambda - \theta) \\ r \,.\, \sin u \,.\, \cos i &= R \,.\, \sin(L - \theta) + \Delta \,.\, \cos\beta \,.\, \sin(\lambda - \theta) \qquad (324) \\ r \,.\, \sin u \,.\, \sin i &= \Delta \,.\, \sin\beta \end{aligned}$$

гдѣ подъ θ разумѣемъ, какъ прежде, долготу восходящаго узла орбиты надъ эклиптикой.

Если положимъ $\Delta' = \Delta \,.\, \cos\beta$, $\lambda - \theta = \omega$ и означимъ чрезъ ξ, η, ζ геоцентрическія линейныя координаты свѣтила, отнесенныя къ такой системѣ осей, въ которой за плоскость xy принята плоскость эклиптики, а ось x проведена параллельно линіи узловъ орбиты на эклиптикѣ, то

$$(325) \qquad \xi = \Delta' \,.\, \cos\omega; \qquad \eta = \Delta' \,.\, \sin\omega; \qquad \zeta = \Delta' \,.\, \operatorname{tang}\beta$$

откуда

$$d\xi = \cos\omega \,.\, d\Delta' - \Delta' \,.\, \sin\omega \,.\, d\omega$$
$$d\eta = \sin\omega \,.\, d\Delta' + \Delta' \,.\, \cos\omega \,.\, d\omega$$
$$d\zeta = \operatorname{tang}\beta \,.\, d\Delta' + \frac{\Delta' \,.\, d\beta}{\cos^2\beta}$$

Исключая изъ первыхъ двухъ дифференціалъ $d\Delta'$, получимъ

$$(326) \qquad \cos\omega \,.\, d\eta - \sin\omega \,.\, d\xi = \Delta' \,.\, d\omega$$

Исключая тотъ же дифференціалъ изъ послѣднихъ двухъ уравненій, найдемъ

$$\sin\beta \,.\, d\eta - \sin\omega \,.\, \cos\beta \,.\, d\zeta = \Delta' \,.\, \cos\beta \,.\, \sin\beta \,.\, d\omega - \Delta' \,.\, \sin\omega \,.\, d\beta$$

Внося сюда вмѣсто $d\omega$ его величину изъ предыдущаго уравненія, легко получимъ

$$(327) \qquad d\beta = \frac{\cos\beta}{\Delta} \cdot d\zeta - \frac{\sin\beta \,.\, \cos\omega}{\Delta} \cdot d\xi - \frac{\sin\beta \,.\, \sin\omega}{\Delta} \cdot d\eta$$

уравненія (324) посредствомъ выраженій (325) приводятся къ виду

$$\xi = r \,.\, \cos u - R \,.\, \cos(L - \theta)$$
$$\eta = r \,.\, \sin u \,.\, \cos i - R \sin(L - \theta)$$
$$\zeta = r \,.\, \sin u \,.\, \sin i$$

Мы уже замѣтили, что R и L при рѣшеніи разсматриваемаго вопроса должны быть принимаемы за постоянныя величины, поэтому

$$d\xi = \cos u\,.\,dr - r\,.\,\sin u\,.\,du - R\,.\,\sin(L-\theta)\,.\,d\theta$$

$$d\eta = \sin u\,.\,\cos i\,.\,dr + r\,.\,\cos u\,.\,\cos i\,.\,du - r\,.\,\sin u\,.\,\sin i\,.\,di + R\,.\cos(L-\theta)\,.\,d\theta$$

$$d\zeta = \sin u\,.\,\sin i\,.\,dr + r\,.\,\cos u\,.\,\sin i\,.\,du + r\,.\,\sin u\,.\,\cos i\,.\,di$$

Внося эти величины диффоренціаловъ въ выраженія (326) и (327), легко приведемъ ихъ къ виду

$$\begin{aligned} d\omega &= A\,.\,di + B\,.\,d\theta + C\,.\,du + D\,.\,dr \\ d\beta &= A'\,.\,di + B'\,.\,d\theta + C'\,.\,du + D'\,.\,dr \end{aligned} \qquad (328)$$

гдѣ, какъ легко видѣть,

$$A = \frac{d\omega}{di} = -\frac{r}{\Delta'}\sin u\,.\,\sin i\,.\,\cos\omega = -\cos\omega\,.\,\operatorname{tang}\beta$$

$$B = \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{R}{\Delta'}\cos(L-\lambda)$$

$$C = \frac{d\omega}{du} = \frac{r}{\Delta'}[\sin\omega\,.\,\sin u + \cos\omega\,.\,\cos u\,.\,\cos i]$$

$$D = \frac{d\omega}{dr} = \frac{1}{\Delta'}[\cos\omega\,.\,\sin u\,.\,\cos i - \sin\omega\,.\,\cos u]$$

$$A' = \frac{d\beta}{di} = \frac{r}{\Delta}[\sin\beta\,.\,\sin\omega\,.\,\sin u\,.\,\sin i + \cos\beta\,.\,\sin u\,.\,\cos i]$$

$$B' = \frac{d\beta}{d\theta} = \frac{R}{\Delta}\sin\beta\,.\,\sin(L-\lambda)$$

$$C' = \frac{d\beta}{du} = \frac{r}{\Delta}[\sin\beta\,.\,\cos\omega\,.\,\sin u - \sin\beta\,.\,\sin\omega\,.\,\cos u\,.\,\cos i + \cos\beta\,.\,\cos u\,.\,\sin i]$$

$$D' = \frac{d\beta}{dr} = \frac{1}{\Delta}[\cos\beta\,.\,\sin u\,.\,\sin i - \sin\beta\,.\,\sin\omega\,.\,\sin u\,.\,\cos i - \sin\beta\,.\,\cos\omega\,.\,\cos u]$$

Чтобы упростить вычисленіе этихъ коеффиціентовъ, положимъ

$$\begin{aligned} m\,.\,\sin M &= \sin\omega & n\,.\,\sin N &= \sin\omega\,.\,\sin i \\ m\,.\,\cos M &= \cos\omega\,.\,\cos i & n\,.\,\cos N &= \cos i \end{aligned}$$

Сумма квадратовъ двухъ первыхъ уравненій даетъ

$$m^2 = \sin^2\omega + \cos^2\omega\,.\,\cos^2 i$$

Сумма квадратовъ двухъ вторыхъ приводится къ

$$n^2 = \sin^2\omega\,.\,\sin^2 i + \cos^2 i$$

откуда легко убѣдиться, что $m = n$. И такъ примемъ

$$\begin{aligned} m\,.\,\sin M &= \sin\omega & m\,.\,\sin N &= \sin\omega\,.\,\sin i \\ m\,.\,\cos M &= \cos\omega\,.\,\cos i & m\,.\,\cos N &= \cos i \end{aligned} \qquad (329)$$

Посредствомъ этого могутъ быть упрощены выраженія коэффиціентовъ C, A' и C'. Коэффиціентъ C чрезъ введеніе въ него этихъ вспомогательныхъ величинъ прямо принимаетъ форму

$$C = \frac{r \, . \, m}{\Delta'} \cos (M - u)$$

точно также коэффиціентъ A' преобразовывается въ

$$A' = \frac{r \, . \, m}{\Delta} \cos (N - \beta)$$

Чтобы упростить коэффиціентъ C', внесемъ въ его выраженіе вмѣсто u величину $M - (M - u)$, тогда, отдѣляя члены съ множителемъ $\sin (M - u)$ отъ членовъ съ множителемъ $\cos (M - u)$, найдемъ

$$\frac{\Delta C'}{r} = \cos (M - u) [\sin \beta . \cos \omega . \sin M - \sin \beta . \sin \omega . \cos i . \cos M + \cos \beta . \sin i . \cos M]$$
$$- \sin (M - u) [\sin \beta . \cos \omega . \cos M + \sin \beta . \sin \omega . \cos i . \sin M - \cos \beta . \sin i . \sin M]$$

Раздѣливъ первое изъ уравненій (329) на второе, имѣемъ

$$\sin M . \cos \omega . \cos i = \sin \omega . \cos M$$

Внесемъ это въ тождественное выраженіе

$$\cos \omega . \sin M = \cos^2 i . \cos \omega . \sin M + \sin^2 i . \cos \omega . \sin M$$

и получимъ

$$\cos \omega . \sin M = \sin \omega . \cos M . \cos i + \cos \omega . \sin M . \sin^2 i$$

Внося это въ первый членъ множителя при $\cos (M - u)$, приведемъ этотъ коэффиціентъ къ виду

$$\sin i [\sin \beta . \cos \omega . \sin i . \sin M + \cos \beta . \cos M]$$

Раздѣливъ первое изъ уравненій (329) на третье, а потомъ второе на четвертое, найдемъ

$$\sin i . \sin M = \sin N; \qquad \cos M = \cos N . \cos \omega$$

Если внесемъ это въ предыдущее выраженіе коэффиціента, то легко приведемъ его къ виду: $\sin i . \cos \omega . \cos (N - \beta)$, и такъ

$$\frac{\Delta C'}{r} = \cos (M - u) \sin i . \cos \omega . \cos (N - \beta)$$
$$- \sin (M - u) [\sin \beta . \cos \omega . \cos M + \sin \beta . \sin \omega . \cos i . \sin M - \cos \beta . \sin i . \sin M]$$

Преобразуемъ теперь коэффиціентъ при $\sin (M - u)$. Дѣленіе перваго изъ уравненій (329) на четвертое и втораго на четвертое даетъ

$$\sin \omega . \cos N = \cos i . \sin M; \qquad \cos \omega . \cos N = \cos M$$

Внося это въ тождество

$$\cos N = \sin^2 \omega . \cos N + \cos^2 \omega . \cos N$$

получимъ

$$\cos N = \sin \omega . \cos i . \sin M + \cos \omega . \cos M$$

Посредствомъ этого коеффиціентъ при $\sin (M - u)$ легко обращается въ

$$\sin \beta . \cos N - \cos \beta . \sin i . \sin M$$

Но мы уже видѣли, что

$$\sin i . \sin M = \sin N$$

поэтому предыдущій двучленъ приводится къ виду $- \sin (N - \beta)$. И такъ

$$\frac{\Delta C'}{r} = \sin i . \cos \omega . \cos (N - \beta) \cos (M - u) + \sin (N - \beta) \sin (M - u)$$

Положимъ здѣсь

$$\left.\begin{aligned} p . \cos P &= \sin i . \cos \omega . \cos (M - u) \\ p . \sin P &= \sin (M - u) \end{aligned}\right\} \quad (330)$$

тогда

$$C' = \frac{r . p}{\Delta} \cos (N - \beta - P) \quad (331)$$

Упростимъ теперь остальные коеффиціенты. При сдѣланныхъ означеніяхъ уравненіямъ (324) можно дать видъ

$$\left.\begin{aligned} \Delta' . \cos \omega &= r . \cos u - R . \cos (L - \theta) \\ \Delta' . \sin \omega &= r . \sin u . \cos i - R . \sin (L - \theta) \\ \Delta' . \operatorname{tang} \beta &= r . \sin u . \sin i \end{aligned}\right\} \quad (332)$$

Исключая изъ этихъ уравненій Δ', найдемъ

$$0 = r [\sin u . \cos i . \cos \omega - \cos u . \sin \omega] - R [\sin (L - \theta) \cos \omega - \cos (L - \theta) \sin \omega]$$

или

$$\sin u . \cos i . \cos \omega - \cos u . \sin \omega = \frac{R}{r} \sin (L - \lambda)$$

Слѣдовательно

$$D = \frac{R}{r . \Delta'} \sin (L - \lambda)$$

Умножимъ первое изъ уравненій (332) на $\cos \omega$, второе — на $\sin \omega$, сложимъ произведенія и тогда найдемъ

$$\cos u . \cos \omega + \sin u . \cos i . \sin \omega = \frac{\Delta'}{r} + \frac{R}{r} \cos (L - \lambda)$$

поэтому

$$D' = - \frac{\sin \beta}{\Delta . r} [\Delta' + R . \cos (L - \lambda)] + \frac{\cos \beta}{\Delta} \sin u . \sin i$$

но такъ какъ

$$\sin u \,.\, \sin i = \frac{\Delta'}{r} \operatorname{tang} \beta$$

то

$$D' = -\frac{\sin\beta}{\Delta}\frac{R}{r}\cdot\cos(L-\lambda)$$

И такъ мы привели разсматриваемые дифференціальные коеффиціенты къ формамъ

$$(333)\qquad \begin{aligned} A &= -\cos\omega\,.\operatorname{tang}\beta & A' &= \frac{r\,.\,m}{\Delta}\sin u\,.\cos(N-\beta) \\ B &= \frac{R}{\Delta'}\cos(L-\lambda) & B' &= \frac{R\,.\sin\beta}{\Delta}\sin(L-\lambda) \\ C &= \frac{r}{\Delta'}\,m\,.\cos(M-u) & C' &= \frac{r\,.\,p}{\Delta}\cos(N-\beta-P) \\ D &= \frac{R}{r\,.\Delta'}\sin(L-\lambda) & D' &= -\frac{\sin\beta}{\Delta}\frac{R}{r}\cdot\cos(L-\lambda) \end{aligned}$$

Мы приняли $\omega = \lambda - \theta$ и кромѣ того знаемъ, что $u = v + \pi$, если подъ v разумѣемъ истинную аномалію свѣтила и подъ π разстояніе перигелія отъ узла. Слѣдовательно $d\omega = d\lambda - d\theta$, $du = dv + d\pi$. Поэтому уравненіямъ (328) можно дать видъ

$$(334)\qquad \begin{aligned} d\lambda &= A\,.\,di + (B+1)\,d\theta + C\,(dv + d\pi) + D\,.\,dr \\ d\beta &= A'.\,di + B'.\,d\theta + C'\,(dv + d\pi) + D'.\,dr \end{aligned}$$

гдѣ dv и dr для планетной орбиты, или вообще для эллиптической орбиты съ небольшимъ эксцентриситетомъ имѣютъ форму (302) и (303). Для параболическихъ кометныхъ орбитъ эти дифференціалы представляются въ видѣ (310) и (311). Наконецъ для эллиптической кометной орбиты съ эксцентриситетомъ весьма близкимъ къ единицѣ за форму дифференціаловъ dr и dv слѣдуетъ принять выраженія (321).

Разовьемъ вполнѣ предыдущія уравненія для одного какаго нибудь случая, напр. для случая эллиптической орбиты съ сравнительно небольшимъ эксцентриситетомъ. Полагая для этого въ выраженіяхъ (302) и (303)

$$(335)\qquad \begin{aligned} E &= \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,; & F &= (t-T)\left(\frac{a}{r}\right)^2.\cos\varphi \\ G &= \left[\frac{2}{\cos\varphi} + \operatorname{tang}\varphi\,.\cos v\right]\sin v\,; & H &= a\,.\operatorname{tang}\varphi\,.\sin v \\ K &= (t-T)\,a.\operatorname{tang}\varphi.\sin v - \frac{2r}{3\mu\,.\sin 1''}\,; & U &= -a\,.\cos\varphi.\cos v \end{aligned}$$

примемъ

$$(336)\qquad \begin{aligned} E' &= C.E + D.H; & F' &= C.F + D.K; & G' &= C.G + D.U \\ E'' &= C'.E + D'.H; & F'' &= C'.F + D'.K; & G'' &= C'.G + D'.U \end{aligned}$$

при этихъ означеніяхъ условныя уравненія (334) представятся въ формѣ

$$
\begin{aligned}
d\lambda &= A\,.\,di + (B+1)\,d\theta + C\,.\,d\pi + E'\,.\,dM_0 + F'\,.\,d\mu + G'\,.\,d\varphi \\
d\beta &= A'\,.\,di + B'\,.\,d\theta + C'\,.\,d\pi + E''\,.\,dM_0 + F''\,.\,d\mu + G''\,.\,d\varphi
\end{aligned}
\qquad (337)
$$

47. По первоначальной системѣ элементовъ можетъ быть вычислено соотвѣтствующее времени каждаго отдѣльнаго наблюденія положеніе свѣтила. Сравнивая наблюдаемыя положенія съ соотвѣтствующими имъ вычисленными мѣстами свѣтила, мы составимъ столько паръ условныхъ уравненій, сколько имѣется наблюденій.

Если есть большой рядъ наблюденій свѣтила, то чтобы не вычислять для каждаго отдѣльнаго наблюденія коеффиціенты условныхъ уравненій, удобно поступить слѣдующимъ образомъ. По первоначальной системѣ элементовъ найдемъ для каждаго отдѣльнаго наблюденія разность наблюдаемаго и вычисленнаго положенія свѣтила. Такимъ образомъ для каждаго отдѣльнаго времени наблюденія мы опредѣлимъ $\cos\delta\,.\,d\alpha$ и $d\delta$ или $\cos\beta\,.\,d\lambda$ и $d\beta$. Раздѣлимъ всѣ эти разности на группы такимъ образомъ, чтобы въ каждой группѣ заключались разности соотвѣтствующія наблюденіямъ близкимъ между собою по времени. Послѣ этого въ каждой группѣ возьмемъ ариѳметическія средины изъ разностей. Эти среднія ариѳметическія величины примемъ за соотвѣтствующія среднему ариѳметическому изъ временъ наблюденій въ каждой отдѣльной группѣ и для момента представленнаго этимъ среднимъ ариѳметическимъ изъ временъ вычислимъ коеффиціенты условныхъ уравненій. Такимъ образомъ получимъ для рѣшенія вопроса столько условныхъ уравненій, на сколько группъ былъ раздѣленъ весь имѣющійся рядъ наблюденій.

Коеффиціенты условныхъ уравненій могутъ быть весьма различны между собою по величинѣ и ихъ слѣдуетъ по возможности уравнять. Предположимъ напр., что при $d\mu$ коеффиціентъ приблизительно въ k разъ болѣе другихъ коеффиціентовъ, которые между собою разнятся немного, въ такомъ случаѣ вмѣсто $d\mu$ вводимъ въ условныя уравненія $d\mu'$, находящійся съ $d\mu$ въ соотношеніи $d\mu = \frac{d\mu'}{k}$. Такая подстановка приводится къ тому, чтобы во всѣхъ условныхъ уравненіяхъ коеффиціентъ при $d\mu$ раздѣлить на k. Когда изъ совокупности окончательныхъ уравненій будетъ найдена величина $d\mu'$, то по ней легко опредѣлится искомая поправка $d\mu$.

И такъ предположимъ, что для опредѣленія вѣроятнѣйшихъ элементовъ составлены линейныя уравненія вида

$$
\begin{aligned}
a\,.\,x + b\,.\,y + c\,.\,z + f\,.\,u + g\,.\,w + h\,.\,t &= n \\
a'\,.\,x + b'\,.\,y + c'\,.\,z + f'\,.\,u + g'\,.\,w + h'\,.\,t &= n' \\
a''\,.\,x + b''\,.\,y + c''\,.\,z + f''\,.\,u + g''\,.\,w + h''\,.\,t &= n'' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Число этихъ уравненій будетъ равно удвоенному числу отдѣльныхъ наблюденій или удвоенному числу тѣхъ группъ, на которыя былъ раздѣленъ весь имѣющійся рядъ наблюденій. Въ этихъ уравненіяхъ подъ x, y, z, u, w, t мы разумѣемъ искомыя поправки шести первоначальныхъ элементовъ, подъ a, b, c, f и т. д. дифференціальные коеффиціенты, представляющіе вліяніе измѣненія элементовъ на измѣненія координатъ и

подъ n' n', n'' и т. д.— разности между наблюдаемыми и вычисленными координатами свѣтила, или же ариѳметическія средины изъ этихъ разностей раздѣленныхъ па группы.

Изъ этихъ условныхъ уравненій, помножая сначала каждое уравненіе на коэффиціентъ при x и взявъ сумму всѣхъ уравненій, потомъ на коэффиціентъ при y и взявъ сумму и т. д., получимъ окончательныя уравненія вида

$$
\begin{aligned}
&(a^2)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z + (af)\,u + (ag)\,w + (ah)\,t = (an)\\
&(ab)\,x + (b^2)\,y + (bc)\,z + (bf)\,u + (bg)\,w + (bh)\,t = (bn)\\
&(ac)\,x + (bc)\,y + (c^2)\,z + (cf)\,u + (cg)\,w + (ch)\,t = (cn)\\
&(af)\,x + (bf)\,y + (cf)\,z + (f^2)\,u + (fg)\,w + (fh)\,t = (fn)\\
&(ag)\,x + (bg)\,y + (cg)\,z + (fg)\,u + (g^2)\,w + (gh)\,t = (gn)\\
&(ah)\,x + (bh)\,y + (ch)\,z + (fh)\,u + (gh)\,w + (h^2)\,t = (hn)
\end{aligned}
\tag{338}
$$

гдѣ

$$
\begin{aligned}
(a^2) &= a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots\cdots\\
(ab) &= ab + a'b' + a''b'' + \cdots\cdots\\
(ac) &= ac + a'c' + a''c'' + \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

и т. д.

Такимъ образомъ мы имѣемъ шесть уравненій для опредѣленія шести неизвѣстныхъ величинъ. Рѣшая первое уравненіе относительно x, получимъ

$$x = -\frac{(ab)}{(a^2)}\,y - \frac{(ac)}{(a^2)}\cdot z - \frac{(af)}{(a^2)}\,u - \frac{(ag)}{(a^2)}\,w - \frac{(ah)}{(a^2)}\cdot t + \frac{(an)}{(a^2)} \tag{339}$$

Внося это во всѣ остальныя уравненія и полагая

$$
\begin{aligned}
&(b^2) - \frac{(ab)}{(a^2)}(ab) = (b_1^2); \qquad (bc) - \frac{(ab)}{(a^2)}(ac) = (bc_1)\\
&(bf) - \frac{(ab)}{(a^2)}(af) = (bf_1); \qquad (bg) - \frac{(ab)}{(a^2)}(ag) = (bg_1)\\
&(bh) - \frac{(ab)}{(a^2)}(ah) = (bh_1); \qquad (bn) - \frac{(ab)}{(a^2)}(an) = (bn_1)
\end{aligned}
$$

—

$$
\begin{aligned}
&(c^2) - \frac{(ac)}{(a^2)}(ac) = (c_1^2); \qquad (cf) - \frac{(ac)}{(a^2)}(af) = (cf_1)\\
&(cg) - \frac{(ac)}{(a^2)}(ag) = (cg_1); \qquad (ch) - \frac{(ac)}{(a^2)}(ah) = (ch_1)\\
&(cn) - \frac{(ac)}{(a^2)}(an) = (cn_1)
\end{aligned}
\tag{340}
$$

—

$$
\begin{aligned}
&(f^2) - \frac{(af)}{(a^2)}(af) = (f_1^2); \qquad (fg) - \frac{(af)}{(a^2)}(ag) = (fg_1)\\
&(fh) - \frac{(af)}{(a^2)}(ah) = (fh_1); \qquad (fn) - \frac{(af)}{(a^2)}(an) = (fn_1)
\end{aligned}
$$

—

$$(g^2) - \frac{(ag)}{(a^2)}(ag) = (g_1^2); \qquad (gh) - \frac{(ag)}{(a^2)}(ah) = (gh_1)$$

$$(gn) - \frac{(ag)}{(a^2)}(an) = (gn_1)$$

—

$$(h^2) - \frac{(ah)}{(a^2)}(ah) = (h_1^2); \qquad (hn) - \frac{(ah)}{(a^2)}(an) = (hn_1)$$

найдемъ

$$\begin{aligned}
(b_1^2)\,y + (bc_1)\,z + (bf_1)\,u + (bg_1)\,w + (bh_1)\,t &= (bn_1) \\
(bc_1)\,y + (c_1^2)\,z + (cf_1)\,u + (cg_1)\,w + (ch_1)\,t &= (cn_1) \\
(bf_1)\,y + (cf_1)\,z + (f_1^2)\,u + (fg_1)\,w + (fh_1)\,t &= (fn_1) \\
(bg_1)\,y + (cg_1)\,z + (fg_1)\,u + (g_1^2)\,w + (gh_1)\,t &= (gn_1) \\
(bh_1)\,y + (ch_1)\,z + (fh_1)\,u + (gh_1)\,w + (h_1^2)\,t &= (hn_1)
\end{aligned} \qquad (341)$$

уравненія такого же вида какъ первоначальныя, но число ихъ единицею меньше.

Рѣшимъ первое изъ уравненій (341) относительно y и, внося эту величину y во всѣ остальныя уравненія (341), положимъ

$$(c_1^2) - \frac{(bc_1)}{(b_1^2)}(bc_1) = (c_2^2); \qquad (cf_1) - \frac{(bc_1)}{(b_1^2)}(bf_1) = (cf_2)$$

$$(cg_1) - \frac{(bc_1)}{(b_1^2)}(bg_1) = (cg_2); \qquad (ch_1) - \frac{(bc_1)}{(b_1^2)}(bh_1) = (ch_2)$$

$$(cn_1) - \frac{(bc_1)}{(b_1^2)}(bn_1) = (cn_2)$$

—

$$(f_1^2) - \frac{(bf_1)}{(b_1^2)}(bf_1) = (f_2^2); \qquad (fg_1) - \frac{(bf_1)}{(b_1^2)}(bg_1) = (fg_2)$$

$$(fh_1) - \frac{(bf_1)}{(b_1^2)}(bh_1) = (fh_2); \qquad (fn_1) - \frac{(bf_1)}{(b_1^2)}(bn_1) = (fn_2) \qquad (342)$$

—

$$(g_1^2) - \frac{(bg_1)}{(b_1^2)}(bg_1) = (g_2^2); \qquad (gh_1) - \frac{(bg_1)}{(b_1^2)}(bh_1) = (gh_2)$$

$$(gn_1) - \frac{(bg_1)}{(b_1^2)}(bn_1) = (gn_2)$$

—

$$(h_1^2) - \frac{(bh_1)}{(b_1^2)}(bh_1) = (h_2^2); \qquad (hn_1) - \frac{(bh_1)}{(b_1^2)}(bn_1) = (hn_2)$$

и тогда получимъ

$$\begin{aligned}
(c_2^2)\,z + (cf_2)\,u + (cg_2)\,w + (ch_2)\,t &= (cn_2) \\
(cf_2)\,z + (f_2^2)\,u + (fg_2)\,w + (fh_2)\,t &= (fn_2) \\
(cg_2)\,z + (fg_2)\,u + (g_2^2)\,w + (gh_2)\,t &= (gn_2) \\
(ch_2)\,z + (fh_2)\,u + (gh_2)\,w + (h_2^2)\,t &= (hn_2)
\end{aligned} \qquad (343)$$

Четыре уравненія съ четырьмя неизвѣстными.

Рѣшимъ первое изъ предыдущихъ уравненій относительно z и найденное выраженіе для z внесемъ въ остальныя три изъ предыдущихъ уравненій. Тогда полагая

$$(f_2^2) - \frac{(cf_2)}{(c_2^2)}(cf_2) = (f_3^2); \qquad (fg_2) - \frac{(cf_2)}{(c_2^2)}(cg_2) = (fg_3)$$

$$(fh_2) - \frac{(cf_2)}{(c_2^2)}(ch_2) = (fh_3); \qquad (fn_2) - \frac{(cf_2)}{(c_2^2)}(cn_2) = (fn_3)$$

(344) $$(g_2^2) - \frac{(cg_2)}{(c_2^2)}(cg_2) = (g_3^2); \qquad (gh_2) - \frac{(cg_2)}{(c_2^2)}(ch_2) = (gh_3)$$

$$(gn_2) - \frac{(cg_2)}{(c_2^2)}(cn_2) = (gn_3)$$

$$(h_2^2) - \frac{(ch^2)}{(c_2^2)}(ch_3) = (h_3^2); \qquad (hn_2) - \frac{(ch_2)}{(c_2^2)}(cn_2) = (hn_3)$$

получимъ

(345) $$\begin{aligned}(f_3^2)\,u + (fg_3)\,w + (fh_3)\,t &= (fn_3)\\ (fg_3)\,u + (g_3^2)\,w + (gh_3)\,t &= (gn_3)\\ (fh_3)\,u + (gh_3)\,w + (h_3^2)\,t &= (hn_3)\end{aligned}$$

Рѣшая первое изъ этихъ уравненій относительно u, внесемъ полученную величину въ два остальныя уравненія и, полагая при этомъ

$$(g_3^2) - \frac{(fg_3)}{(f_3^2)}(fg_3) = (g_4^2); \qquad (gh_3) - \frac{(fg_3)}{(f_3^2)}(fh_3) = (gh_4)$$

(346) $$(gn_3) - \frac{(fg_3)}{(f_3^2)}(fn_3) = (gn_4)$$

$$(h_3^2) - \frac{(fh_3)}{(f_3^2)}(fh_3) = (h_4^2); \qquad (hn_3) - \frac{(fh_3)}{(f_3^2)}(fn_3) = (hn_4)$$

получимъ

(347) $$\begin{aligned}(g_4^2)\,w + (gh_4)\,t &= (gn_4)\\ (gh_4)\,w + (h_4^2)\,t &= (hn_4)\end{aligned}$$

Опредѣляя наконецъ по первому изъ этихъ уравненій w, внося найденную величину во второе уравненіе и полагая при этомъ

(348) $$(h_4^2) - \frac{(gh_4)}{(g_4^2)}(gh_4) = (h_5^2); \qquad (hn_4) - \frac{(gh_4)}{(g_4^2)}(gn_4) = (hn_5)$$

получимъ

$$(h_5^2)\,t = (hn_5)$$

откуда

(349) $$t = + \frac{(hn_5)}{(h_5^2)}$$

Какъ скоро величина t извѣстна, то по первому изъ уравненій (347) имѣемъ

$$w = -\frac{(gh_4)}{(g_4^2)}t + \frac{(gn_4)}{(g_4^2)} \tag{350}$$

Этимъ выраженіемъ будемъ пользоваться для вычисленія втораго неизвѣстнаго w. Если w вычислено, то по первому изъ уравненій (345) имѣемъ

$$u = -\frac{(fg_3)}{(f_3^2)}w - \frac{(fh_3)}{(f_3^2)}t + \frac{(fn_3)}{(f_3^2)} \tag{351}$$

Этимъ пользуемся для вычисленія u. Первое изъ уравненій (343) даетъ

$$z = -\frac{(cf_2)}{(c_2^2)}u - \frac{(cg_2)}{(c_2^2)}w - \frac{(ch_2)}{(c_2^2)}t + \frac{(cn_2)}{(c_2^2)} \tag{352}$$

По этому выраженіе опредѣлится z. Первое изъ уравненій (341) даетъ

$$y = -\frac{(bc_1)}{(b_1^2)}z - \frac{(bf_1)}{(b_1^2)}u - \frac{(bg_1)}{(b_1^2)}w - \frac{(bh_1)}{(b_1^2)}t + \frac{(bn_1)}{(b_1^2)} \tag{353}$$

Что служитъ для вычисленія y. Наконецъ x опредѣляется по выраженію (339). Такимъ образомъ будутъ найдены всѣ поправки элементовъ. Исправленными элементами всѣ разсматриваемыя положенія свѣтила должны представляться въ предѣлахъ погрѣшности наблюденій.

Довольно значительную часть работы опредѣленія поправокъ элементовъ изложеннымъ способомъ составляетъ вычисленіе коэффиціентовъ окончательныхъ уравненій по коэффиціентамъ условныхъ уравненій. Имѣя это въ виду, считаемъ не лишнимъ указать способъ повѣрки вычисленія коэффиціентовъ упомянутыхъ окончательныхъ уравненій. Сложимъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ въ каждомъ отдѣльномъ уравненіи и положимъ

$$\begin{aligned} a + b + c + f + g + h &= s \\ a' + b' + c' + f' + g' + h' &= s' \\ a'' + b'' + c'' + f'' + g'' + h'' &= s'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{354}$$

Если умножимъ первое изъ этихъ уравненій на n, второе на n', третье на n'' и т. д. и возмемъ сумму произведеній, то получимъ

$$(an) + (bn) + (cn) + (fn) + (gn) + (hn) = (sn)$$

Слѣдовательно если вычисленіе коэффиціентовъ, входящихъ въ первую часть этого послѣдняго уравненія вѣрно, то сумма ихъ должна равняться суммѣ (sn), составленной посредствомъ всѣхъ значеній s и всѣхъ значеній n.

Для повѣрки вычисленія другихъ коэффиціентовъ составимъ повѣрительныя уравненія слѣдующимъ образомъ. Умножимъ первое изъ уравненій (354) на a, второе на a', третье на a'' и т. д. и возмемъ сумму произведеній. Умножимъ первое изъ уравненій (345) на b, второе на b' третье на b'' и т. д. и опять возмемъ сумму произведеній и т. д., тогда будемъ имѣть

$$(a^2) + (ab) + (ac) + (af) + (ag) + (ah) = (as)$$
$$(ab) + (b^2) + (bc) + (bf) + (bg) + (bh) = (bs)$$
$$(ac) + (bc) + (c^2) + (cf) + (cg) + (ch) = (cs)$$

. . . .

Если вычислимъ по выраженіямъ (354) суммы s, s', s'' и т. д. и составимъ посредствомъ нихъ суммы (as), (bs), (cs) и т. д., то при вѣрности вычисленія эти послѣднія должны равняться первымъ частямъ предыдущихъ выраженій составленныхъ по вычисленнымъ уже коеффиціентамъ окончательныхъ уравненій.

Для поправки рѣшенія окончательныхъ уравненій удобно произвести вторичное исключеніе изъ нихъ неизвѣстныхъ въ обратномъ порядкѣ. При вѣрности рѣшенія величины неизвѣстныхъ найденныя тѣмъ и другимъ путемъ должны быть между собою согласны.

Что касается до вычисленія коеффиціентовъ условныхъ уравненій, то для повѣрки его можно предложить только одно, именно повтореніе вычисленія всего ряда коеффиціентовъ.

48. Вопросъ о вычисленіи орбиты по тремъ наблюденіямъ рѣшается послѣдовательными приближеніями. Удовлетворительно быстрая сходимость приближеній имѣетъ мѣсто только тогда, когда промежутки времени, отдѣляющіе наблюденія, не велики и приблизительно равны, но и при этихъ условіяхъ не всегда получается удовлетворительный результатъ. Въ n° 36 мы видѣли между прочимъ, что система элементовъ орбиты кометы Энке найденная по тремъ близкимъ между собою наблюденіямъ совсѣмъ не представляетъ движенія свѣтила. Не смотря на то, что упомянутая система элементовъ вычислена по точному способу предложенному Гауссомъ,—она такъ далека отъ истины, что вовсе не можетъ быть употреблена для вычисленія по способу наименьшихъ квадратовъ поправокъ элементовъ изъ сочетанія многихъ наблюденій. Эта первоначальная система элементовъ, какъ увидимъ сейчасъ, можетъ принести только нѣкоторую малую пользу при вычисленіи новой системы по наблюденіямъ болѣе отдаленнымъ одно отъ другаго.

Вторую, болѣе точную систему элементовъ мы вычислимъ по тремъ наблюденіямъ, изъ которыхъ первое произведено 2-го Марта 1875 г. въ Лейпцигѣ, второе 4-го Апрѣля въ Кремсмюнстерѣ и третье 7-го Мая въ Виндзорѣ. Изъ этихъ наблюденій найдены слѣдующія видимыя прямыя восхожденія и склоненія кометы *)

		AR ☄	Decl. ☄
1875 г. 2 Марта,	$7^h\ 25^m\ 57^s$. ср. Лип. вр.	$0^h\ 29^m\ 56^s.68$	$+10°\ 47'\ 33''.0$
4 Апр.,	8 13 14.8 ср. Кремс. вр.	2 12 5.71	+17 16 42.5
7 Мая,	17 17 50. ср. Виндз. вр.	1 1 14.30	−10 53 45.0

Приведемъ времена наблюденій къ Гринвичскому меридіану, обратимъ склоненія и прямыя восхожденія въ широты и долготы, освободимъ эти координаты отъ вліянія аберраціи и приведемъ ихъ къ среднему равноденствію начала 1875 года; наконецъ

*) См. Astr. Nachr. №№ 2051, 2040, 2054.

для временъ наблюденій вычислимъ координаты фиктивныхъ мѣстъ наблюденій. Выполнивъ все это, составимъ слѣдующія данныя для вычисленія орбиты:

1875 года.	α ♁	β ♁	l	$\log R$
Марта 2.265350	11° 9′ 11″.25	+ 6° 56′ 22″.76	161° 48′ 10″.22	9.9964398
„ 35.297029	36 38 59 .29	+ 3 44 40 .54	194 36 32 .10	0.0005133
„ 68.298611	9 44 34 .71	— 16 3 32 .68	226 47 6 .85	0.0042070

Мы удержимъ здѣсь всѣ тѣ означенія, которыя сдѣлали при изложеніи Гауссовой методы вычисленія орбиты по тремъ наблюденіямъ. Замѣтимъ еще, что во времена наблюденій уже включены поправки зависящія отъ аберраціи свѣтилъ имѣющихъ собственное движеніе. Для вычисленія этихъ поправокъ разстоянія кометы отъ земли опредѣлены по приближеннымъ элементамъ.

По этимъ даннымъ изъ уравненій (57), (58) и имъ подобныхъ находимъ,

$$\gamma = 166^\circ\ 3'\ 14''.93; \qquad \delta = 149^\circ\ 54'\ 42''.10$$
$$\gamma' = 170\ \ 6\ \ 24\ .57; \qquad \delta' = 157\ \ 30\ \ 32\ .12$$
$$\gamma'' = 334\ \ 27\ \ 32\ .30; \qquad \delta'' = 140\ \ 5\ \ 20\ .92$$
$$A'D = 311\ \ 41\ \ 20\ .18; \qquad \varepsilon = 162\ \ 5\ \ 37\ .06$$
$$A''D = 17\ \ 18\ \ 44\ .04; \qquad \varepsilon' = 156\ \ 52\ \ 16\ .64$$
$$AD' = 264\ \ 4\ \ 58\ .80; \qquad \varepsilon'' = 7\ \ 44\ \ 14\ .86$$
$$A''D' = 33\ \ 46\ \ 45\ .14;$$
$$AD'' = 43\ \ 44\ \ 30\ .15;$$
$$A'D'' = 75\ \ 53\ \ 46\ .97;$$

Послѣ этого изъ уравненій (61) и (62) выводимъ для разсматриваемаго случая:

$$S = +0.02767682 \qquad t = 266^\circ\ 33'\ 12''.47$$
$$\log T = 9.6121006_n \qquad \omega = -\ 26\ \ 18\ \ 57\ .03$$

Замѣтимъ, что ω представляетъ отступленіе средняго геоцентрическаго положенія свѣтила отъ большаго круга проведеннаго черезъ два крайнія геоцентрическія мѣста; по большей части это отступленіе есть малая величина, не превышающая нѣсколькихъ минутъ, теперь же мы видимъ, что она достигаетъ десятковъ градусовъ.

Имѣя все это, по выраженіямъ (41), (63), (45) и (49) находимъ

$$\log a = 9.9071105_n \qquad \varkappa = +0.5450262$$
$$\log b = 9.7954341_n \qquad \varkappa'' = -0.6750048$$
$$\log c = 1.3109587_n$$
$$\log d = 8.8153446_n$$
$$\log e = 9.4646664$$

Теперь слѣдуетъ перейти къ вычисленію послѣдовательными приближеніями радіусовъ векторовъ свѣтила, но чтобы сократить при этомъ работу вычисленія, мы воспользуемся элементами орбиты найденными въ n° 9. По этимъ элементамъ мы вычислимъ радіусы векторы и истинныя аномаліи кометы для временъ трехъ наблюде-

ній. Спачала по уравненію $M = M_0 + (t - T)\mu$ опредѣлимъ среднюю аномалію для каждаго изъ трехъ моментовъ наблюденія. Въ найденной системѣ элементовъ за эпоху принято 1 Марта 0^h ср. Моск. вр., такъ какъ теперь счетъ времени относимъ къ Гринвичскому меридіану, то въ этомъ случаѣ слѣдуетъ принимать $T = 0.895639$, а потому среднія аномаліи соотвѣтствующія моментамъ трехъ разсматриваемыхъ наблюденій будутъ

$$M = 346^\circ\ 44'\ 4''; \qquad M' = 357^\circ\ 7'\ 59''; \qquad M'' = 7^\circ\ 31'\ 20''$$

за тѣмъ изъ уравненія $M = E - e.\sin E$ находимъ для разсматриваемыхъ временъ трехъ наблюденій

$$E = 309^\circ\ 17'\ 55''; \qquad E' = 342^\circ\ 56'\ 37''; \qquad E'' = 35^\circ\ 52'\ 5''$$

при помощи ихъ изъ уравненія $\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$ имѣемъ

$$v = 243^\circ\ 1'\ 16''; \qquad v' = 305^\circ\ 23'\ 50''; \qquad v'' = 96^\circ\ 10'\ 28''$$

затѣмъ уравненіе

$$r = \frac{p}{1 + e.\cos v}$$

для нашего случая даетъ

$$\log r = 9.9982145; \qquad \log r' = 9.6155532; \qquad \log r'' = 9.8298164$$

имѣя все это, для вычисленія функцій P и Q обратимся къ выраженіямъ (116). Такъ какъ въ нашемъ случаѣ

$$2f = v'' - v' = 150^\circ\ 46'\ 38''; \qquad 2f' = v'' - v = 213^\circ\ 9'\ 12'';$$
$$2f'' = v' - v = 62^\circ\ 22'\ 34''; \qquad \log p = 9.7884695$$

то упомянутыя сейчасъ выраженія даютъ

$$\log P = 0.4272331; \qquad \log Q = 9.5204296_n$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что въ настоящемъ случаѣ функція Q есть отрицательная величина, а потому заключаемъ, что при этомъ вычисленіи совсѣмъ нельзя принять въ первомъ приближеніи $P = \frac{\theta''}{\theta}$; $Q = \theta\theta''$, ибо дѣлая такое допущеніе, мы имѣли бы для функціи Q значеніе не только не вѣрное по величинѣ, но даже и по знаку.

Принимая за основаніе первой гипотезы найденныя теперь значенія функцій P и Q, сдѣлаемъ три послѣдовательныя приближенія и въ томъ порядкѣ, который подробно объясненъ въ n° 9, находимъ

	въ 1-мъ приближ.	во 2-мъ приближ.	въ 3-мъ приближ.
$\log P$	0.4272331	0.4331485	0.4383750
$\log Q$	9.5204296_n	9.5242637_n	9.5270337_n
$\log M$	0.1414578	0.1475785	0.1523304
z	66° 48′ 11″.00	66° 17′ 6″.18	65° 53′ 21″.12
ξ	144 8 4 .11	143 58 45 .66	143 49 17 .20
$\log r$	9.9980809	0.0001270	0.0022229
ξ''	3° 8′ 44″.77	3° 16′ 2″.30	3° 21′ 40″.17
$\log r''$	9.8370027	9.8373292	9.8375875
$2f'$	212° 59′ 33″.56	213° 2′ 15″.10	213° 6′ 32″.10
$2f$	151 35 46 .48	151 59 54 .00	152 18 10″.97
$2f''$	61 23 47 .30	61 2 21 .04	60 48 21 .70
$\log \eta$	0.5193375	0 5234288	0.5265464
$\log \eta''$	0.0865849	0.0854497	0.0844871

Если бы мы вычислили по выраженіямъ (69) и (72) значенія функцій P и Q при помощи величинъ найденныхъ въ третьемъ приближеніи, то получили бы

$$\log P = 0.4424552; \qquad \log Q = 9.5284024$$

Мы видимъ, что сдѣланныя три приближенія почти не представляютъ сходимости; хотя мы и нашли четыре системы значеній P и Q, но вычисленіе по нимъ болѣе точныхъ значеній этихъ функцій посредствомъ того интерполяціоннаго пріема, который рекомендуетъ Гауссъ и который изложенъ нами въ концѣ nº 13, въ расматриваемомъ случаѣ также мало примѣнимо, ибо измѣненія числовыхъ значеній функцій P и Q отъ одного приближенія до другаго еще весьма значительны. Во всякомъ случаѣ примѣняя упоминаемый теперь интерполяціонный пріемъ, мы увидимъ, что истинныя значенія функцій P и Q менѣе тѣхъ, которыя приняты въ основаніе первой гипотезы. Такимъ образомъ мы должны заключить, что примѣненіе способа Гаусса къ вычисленію орбиты по избраннымъ тремъ наблюденіямъ если не прямо невозможно, то представляетъ большія трудности. Замѣтимъ наконецъ что при вычисленіи величины η въ разсматриваемомъ случаѣ мы не можемъ пользоваться ни таблицами Гаусса, ни непрерывной дробью Ганзена, а потому остается для опредѣленія η рѣшать пробами извѣстное кубичное уравненіе $\eta^2(\eta - 1) = \left(\eta + \frac{1}{9}\right) h$.

И такъ мы видимъ, что для вычисленія разстояній кометы отъ Солнца въ разсматриваемомъ случаѣ нельзя идти тѣмъ путемъ, который указываетъ Гауссъ, а необходимо употребить какой либо искуственный пріемъ. Примѣненіе Гауссова интерполяціоннаго пріема убѣждаетъ, что $\log P$ и $\log Q$ менѣе тѣхъ, которыя приняты нами въ началѣ первой гипотезы; имѣя это въ виду, вычислимъ четыре гипотезы; за основаніе одной примемъ $\log P = 0.40$, $\log Q = 9.50_n$, въ основаніи другой гипотезы $\log P$ примемъ нѣсколько отличнымъ отъ предыдущаго, а $\log Q$ оставимъ тотъ же; третья гипотеза пусть основывается на такихъ величинахъ $\log P$ и $\log Q$, изъ которыхъ только послѣдняя разнится отъ величины $\log Q$ принятаго въ основаніе первой произвольной гипотезы. Наконецъ основаніемъ четвертой произвольной гипотезы

пусть служатъ величины $\log P$ и $\log Q$ отличные отъ соотвѣтствующихъ величинъ принятыхъ въ началѣ первой произвольной гипотезы. И такъ примемъ

I	II	III	IV
$\log P = 0.400000$	$\log P' = 0.400000$	$\log P' = 0.410000$	$\log P''' = 0.410000$
$\log Q = 9.500000_n$	$\log Q' = 9.490000_n$	$\log Q'' = 9.500000_n$	$\log Q''' = 0.490000_n$

Выходя изъ такихъ положеній, по извѣстному способу Гаусса находимъ

	I	II	III	IV
$\log M$	0.109876	0.099876	0.114104	0.104104
z	69° 39′ 22″.4	70° 37′ 42″.9	69° 14′ 56″.8	70° 12′ 17″.3
ξ	144 43 44 .9	144 22 18 .9	144 15 31 .6	143 54 22 .7
$\log r$	9.990356	9 994973	9,996450	0.001094
ξ''	2° 30′ 12″.3	2° 18′ 43″.0	2° 36′ 38″.5	2° 25′ 15″.6
$\log r''$	9.835314	9.834823	9.835592	9.835102
$2f'$	212° 58′ 53″,6	213° 30′ 45″.6	213° 21′ 14″.3	213° 52′ 44″.0
$2f$	149 21 25 .7	148 34 9 .4	149 39 45 .0	148 53 21 .4
$2f''$	63 37 30 .7	64 56 38 .0	63 41 30 .5	64 59 24 .5
$\log \eta$	0.497482	0.490063	0.500309	0.492961
$\log \eta''$	0.092224	0.092766	0.090464	0.090976
$\log P$	0.405654	0.397693	0.410241	0.402381
$\log Q$	9.505659_n	9.488731_n	9.500195_n	9.483369

Если возмемъ разности между этими величинами $\log P$, $\log Q$ и соотвѣтствующими имъ начальными, то получимъ, вычитая вторыя изъ первыхъ

$$X_1 = \log P - \log P_0 = -0.005654; \quad Y_1 = \log Q - \log Q_0 = -0.005659$$

$$X_2 = \log P' - \log P_1 = +0.002307; \quad Y_2 = \log Q' - \log Q_1 = +0.001269$$

$$X_3 = \log P' - \log P_2 = -0.000241; \quad Y_3 = \log Q'' - \log Q_2 = -0.000195$$

$$X_4 = \log P''' - \log P_3 = +0.007619; \quad Y_4 = \log Q''' - \log Q_3 = +0.006631$$

отсюда заключаемъ, что $\log P''$ и $\log Q''$ наиболѣе близки къ истинѣ, ибо разности между ними и соотвѣтствующими величинами функцій P и Q вычисленными по нимъ суть наименьшія, другими словами, разности X_3 и Y_3 суть наименьшія изъ всѣхъ найденныхъ значеній X и Y. Кромѣ того видимъ, что $\log P'$ и $\log Q'$ наиболѣе далеки отъ истины, ибо въ первой изъ четырехъ произвольныхъ гипотезъ $\log Q$ тождественно съ $\log Q''$ отличаются же между собою только $\log P$ и $\log P''$; въ четвертой изъ произвольныхъ гипотезъ $\log P'''$ тождественно съ $\log P''$ и только $\log Q'''$ отличается отъ $\log Q''$; во второй же произвольной гипотезѣ какъ $\log P'$, такъ и $\log Q'$ отличны отъ соотвѣтствующихъ имъ величинъ третей гипотезы. Принимая это во вниманіе, въ дальнѣйшемъ вычисленіи мы совсѣмъ не будемъ пользоваться величинами второй гипотезы.

Опредѣлимъ теперь коэффиціенты представляющіе собою вліяніе измѣненія величинъ $\log P$ и $\log Q$ на измѣненія разностей X и Y.

Переходя отъ первой гипотезы къ третьей мы измѣняемъ только $\log P$ на 10000 единицъ шестаго десятичнаго знака, и какъ видимъ при этомъ функція X измѣ-

нятся на 5413 единицъ шестаго знака, ибо $X_3 - X_1 = 0.005413$. Слѣдовательно при измѣненіи $\log P$ на одну единицу шестаго знака X измѣнится на 0.5413, кромѣ того видимъ, что при возрастаніи P возрастаетъ X, а слѣдовательно производная $\frac{dX}{d \log P}$ должна быть положительна, и такъ

$$\frac{dX}{d(\log P)} = +0.5413$$

При переходѣ отъ третей гипотезы къ четвертой $\log P$ остался безъ перемѣны, а $\log Q$ уменьшился на 10000 единицъ шестаго десятичнаго знака, при этомъ переходѣ X измѣнилась на 7860 единицъ шестаго знака, ибо $X_4 - X_3 = 0.007860$, и такъ какъ уменьшенію $\log Q$ соотвѣтствуетъ возрастаніо X, то производная $\frac{dX}{d(\log Q)}$ должна быть отрицательна, слѣдовательно

$$\frac{dX}{d(\log Q)} = -0.7860$$

при переходѣ отъ первой гипотезы къ третьей $\log P$ измѣненъ на 10000 единицъ шестаго знака, при этомъ разность Y измѣнилась на 5464 единицы и положительному приращенію P соотвѣтствуетъ такое же приращеніе Y, ибо $Y_1 < Y_3$, слѣдовательно

$$\frac{dY}{d(\log P)} = +0.5464$$

При переходѣ отъ третей гипотезы къ четвертой $\log P$ остался безъ перемѣны, но измѣнился $\log Q$ на 10000 единицъ шестого знака, при этомъ разность Y измѣнилось на 6826 единицъ того же знака и съ уменьшеніемъ перемѣннаго $\log Q$ функція Y возрасла, ибо $Y_3 < Y_4$, слѣдовательно

$$\frac{dY}{d(\log Q)} = -0.6826$$

Посмотримъ какимъ образомъ при помощи найденныхъ числовыхъ значеній производныхъ можно опредѣлить поправки $\Delta \log P$ и $\Delta \log Q$, которыя должно придать къ $\log P''$ и $\log Q''$ для того, чтобы получить значенія функцій P и Q возможно близкія къ истинѣ.

Предположимъ, что мы имѣемъ нѣкоторыя величины функцій $\log P$ и $\log Q$; пусть эти приближенно извѣстныя значенія будутъ x_0 и y_0. Въ нашемъ случаѣ $x_0 = \log P''$ и $y_0 = \log Q''$. Пусть искомыя точныя значенія функцій P и Q будутъ x и y. Такъ что

$$x = x_0 + \Delta x; \qquad y = y_0 + \Delta y$$

Если. разсмотримъ два послѣдовательно найденныя значенія x_0 и x_1 функціи $\log P$ (гдѣ подъ x_0 разумѣемъ величину $\log P$ принятую въ началѣ гипотезы, а подъ x_1 величину по ней вычисленную, т. е. полученную въ концѣ гипотезы), то разность $x_1 - x_0$ будетъ тѣмъ менѣе, чѣмъ ближе къ истиннымъ принятыя въ началѣ гипотезы величины x_0 и y_0. Такъ что вообще

$$x_1 - x_0 = f(x_0, y_0); \qquad y_1 - y_0 = F(x_0, y_0)$$

или

$$x_1 - x_0 = f(x - \Delta x, y - \Delta y); \qquad y_1 - y_0 = F(x - \Delta x, y - \Delta y)$$

откуда

$$x_0 - x_1 = f(x, y) - \frac{df(x, y)}{dx} \cdot \Delta x - \frac{df(x, y)}{dy} \cdot \Delta y$$

$$y_0 - y_1 = F(x, y) - \frac{dF(x, y)}{dx} \cdot \Delta x - \frac{dF(x, y)}{dy} \cdot \Delta y$$

Или по сдѣланнымъ выше означеніямъ

$$X = f(x, y) - \frac{dX}{d \log P} \cdot \Delta \log P - \frac{dX}{d \log Q} \cdot \Delta \log Q$$

$$Y = F(x, y) - \frac{dY}{d \log P} \cdot \Delta \log P - \frac{dY}{d \log Q} \cdot \Delta \log Q$$

Но если подъ x и y разумѣемъ точныя значенія функцій $\log P$ и $\log Q$, то необходимо $f(x, y) = 0$ и $F(x, y) = 0$; слѣдовательно

$$(B) \qquad \begin{aligned} -X &= \frac{dX}{d(\log P)} \cdot \Delta(\log P) + \frac{dX}{d(\log Q)} \cdot \Delta(\log Q) \\ -Y &= \frac{dY}{d(\log P)} \cdot \Delta(\log P) + \frac{dY}{d(\log Q)} \cdot \Delta(\log Q) \end{aligned}$$

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ $\log P''$ и $\log Q''$ наиболѣе близки къ истинѣ и числовыя величины производныхъ опредѣлены относительно ихъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ за X и Y примемъ разности X_3 и Y_3. И такъ для опредѣленія поправокъ $\Delta(\log P)$ и $\Delta(\log Q)$ имѣемъ два уравненія

$$+0.000241 = +0.5431 \,.\, \Delta(\log P) - 0.7860 \,.\, \Delta(\log Q)$$
$$+0.000195 = +0.5464 \,.\, \Delta(\log P) - 0.6826 \,.\, \Delta(\log Q)$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ

$$\Delta \log P = -0{,}000204; \qquad \Delta \log Q = -0{,}000447$$

придавая со знакомъ эти поправки къ величинамъ $\log P''$ и $\log Q''$, имѣемъ

$$\log P^{(IV)} = 0.409796; \qquad \log Q^{(IV)} = 9.499553_n$$

Принимая эти величины за основаніе новой гипотезы, по способу Гаусса находимъ

$$\log M = 0{,}1135640; \qquad z = 69^\circ\ 17'\ 59''.50$$
$$\xi = 144^\circ\ 15'\ 9''.08; \qquad \xi'' = 2\ \ 36\ \ 0.34$$
$$\log r = 9.9965326; \qquad \log r = 9{,}8355636$$
$$2f' = 213^\circ\ 22'\ 12''.06; \qquad 2f = 149^\circ\ 37'\ 18''.58; \qquad 2f'' = 63^\circ\ 44'\ 53''.85$$
$$\log \eta = 0.4999211; \qquad \log \eta'' = 0.0905228$$
$$\log P_4 = 0.4097942; \qquad \log Q_4 = 9.4995466_n$$

Хотя $\log P$ и $\log Q$ полученныя въ концѣ этой гипотезы мало разнятся отъ начальныхъ, но для вычисленія болѣе точныхъ значеній функцій P и Q еще разъ примѣнимъ изложенный интерполяціонный пріемъ. Удерживая тѣже числовыя значенія производныхъ какъ прежде, будемъ считать за X и Y разности $\log P^{(IV)} - \log P_4$ и $\log Q^{(IV)} - \log Q_4$; такимъ образомъ уравненія (B) примутъ теперь видъ

$$-0.0000018 = +0.5413 \,.\, \Delta \log P - 0.7860 \,.\, \Delta \log Q$$
$$-0.0000064 = +0.5464 \,.\, \Delta \log P - 0.6826 \,.\, \Delta \log Q$$

откуда

$$\Delta \log P = -0.0000649 \,; \qquad \Delta \log Q = -0.0000424$$

Придавая со знакомъ эти величины къ $\log P^{(IV)}$ и $\log Q^{(IV)}$, получимъ

$$\log P^{(IV)} = 0.4097311 \,; \qquad \log Q^{(IV)} = 9.4995100_n$$

Примемъ эти величины за основаніе новой гипотезы и съ ними находимъ

$$\log M = 0.1134947 \,; \qquad z = 69^\circ \; 18' \; 23''.00$$
$$\xi = 144^\circ \; 15' \; 14''.76 \,; \qquad \xi'' = 2 \;\; 35 \;\; 55 \,.06$$
$$\log r = 9.9965119 \,; \qquad \log r = 9.8355598$$
$$2f' = 213^\circ \; 22' \; 11''.11 \,; \qquad 2f = 149^\circ \; 37' \; 0''.14 \,; \qquad 2f'' = 63^\circ \; 45' \; 11''.85$$
$$\log \eta = 0.4998724 \,; \qquad \log \eta'' = 0.0905378$$
$$\log P_5 = 0.4097305 \,; \qquad \log Q_5 = 9.4995106_n$$

Эти величины такъ мало разнятся отъ принятыхъ за основаніе этой послѣдней гипотезы, что можемъ считать опредѣленіе радіусовъ векторовъ оконченнымъ и перейти къ вычисленію элементовъ орбиты *).

Хотя три наблюденія выбранныя для вычисленія орбиты отдѣлены такими промежутками времени, которые вовсѣ не могутъ считаться большими, но тѣмъ не менѣе значительный эксцентриситетъ орбиты является причиною такихъ значительныхъ трудностей при вычисленіи радіусовъ векторовъ, которыя никогда не могутъ встрѣтиться при вычисленіи орбитъ малыхъ планетъ, а потому тѣ примѣры, которые выбираются обыкновенно въ трактатахъ теоретической Астрономіи для поясненія методы Гаусса или ея видоизмѣненныхъ формъ, совсѣмъ нельзя считать достаточными для опредѣленія достоинствъ того или другого преобразованія основной теоріи Гаусса. Въ этихъ примѣрахъ совсѣмъ не проявляются тѣ трудности, которыя могутъ встрѣтиться при вычисленіи орбитъ съ значительными эксцентриситетами.

Окончивъ вычисленіе радіусовъ векторовъ соотвѣтствующихъ временамъ трехъ наблюденій, приступимъ къ вычисленію системы элементовъ орбиты. Если для этой цѣли хотимъ пользоваться двумя крайними наблюденіями, то въ настоящемъ случаѣ не можемъ употребить пріемъ вычисленія элементовъ указанный въ n° 8. Затрудненіе

---

*) Вычисленіемъ точныхъ значеній функцій P и Q по указанному здѣсь интерполяціонному пріему я обязанъ доктору В. И. Фабриціусу.

въ этомъ случаѣ представляется въ опредѣленіи отношенія площади сектора, заключающагося между радіусами векторами двухъ крайнихъ положеній, къ площади соотвѣтствующаго треугольника. Чтобы обойти эту трудность, начнемъ съ вычисленія параметра p и для этого будемъ пользоваться вторымъ изъ выраженій (116); за исключеніемъ p въ него входятъ теперь всѣ извѣстныя величины.

Пользуясь величинами r', f, f' и f'' найденными въ послѣднемъ приближеніи *), и принимая $\log Q = 9.4995106_n$, по второму изъ выраженій (116), находимъ

$$\log p = 9.7893543$$

Послѣ этого перейдемъ къ вычисленію геліоцентрическихъ координатъ кометы. По выраженіямъ (56), въ которыхъ слѣдуетъ принять теперь $\xi = 144^\circ\ 15'\ 14''.76$ и $\xi' = 2^\circ\ 35'\ 55''.06$, находимъ

$$\log \Delta = 0.2340614; \qquad \log \Delta'' = 9.7424080$$

$$\log \rho = 0.2314080; \qquad \log \rho'' = 9.7251210$$

Имѣя ρ и ρ'', изъ выраженій (128) и имъ подобныхъ находимъ

$$l = 41^\circ\ 13'\ 43''.35; \qquad l'' = 255^\circ\ 25'\ 14''.37$$

$$b = 12\ \ 4\ \ 5\ .38; \qquad b'' = -\ 12\ \ 53\ \ 54\ .89$$

$$\log r = 9.9965118; \qquad \log r'' = 9.8355599$$

Посредствомъ найденныхъ геліоцентрическихъ координатъ изъ уравненій (130) и (131) выводимъ

$$\theta = 334^\circ\ 41'\ 41''.43; \qquad i = 13^\circ\ 7'\ 12''.28$$

Далѣе изъ уравненій (132) и (132_*) получаемъ

$$u = 67^\circ\ 4'\ 56''.62; \qquad u'' = 280^\circ\ 27'\ 7''.51$$

съ помощію этихъ величинъ аргументовъ широты и найденнаго выше значенія p изъ уравненій (133) выводимъ

$$\omega = 183^\circ\ 37'\ 27''.95; \qquad \log e = 9.9288833$$

слѣдовательно уголъ эксцентриситета въ разсматриваемомъ случаѣ есть

$$\varphi = 58^\circ\ 5'\ 52''.44$$

но мы знаемъ, что $p = a \,.\cos^2\varphi$, слѣдовательно

$$\log a = 0.3433145; \qquad \mu = 1084''.014;$$

Такъ какъ $v = u - \omega$; $v'' = u'' - \omega$, то истинныя аномаліи кометы соотвѣтствующія временамъ двухъ крайнихъ наблюденій суть

$$v = 243^\circ\ 27'\ 28''.67; \qquad v'' = 96^\circ\ 49'\ 39''.56$$

---

*) Извѣстно, что r' легко вычисляется по z.

послѣ этого изъ уравненій

$$\tang\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tang\frac{v}{2};\qquad \tang\frac{E''}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tang\frac{v''}{2}$$

выводимъ

$$E=310^\circ\ 22'\ 53''.44;\qquad E''=35^\circ\ 42'\ 21''.16$$

Имѣя это, обратимся къ уравненіямъ

$$M=E-e.\sin E;\qquad M''=E''-e.\sin E''$$
$$M_0=M-(t-T)=M''-(t''-T)$$

и принявъ за эпоху 1-ое марта 0^h ср. Гринв. вр., получаемъ

$$M=347^\circ\ 26'\ 2''.21;\qquad M''=\ 7^\circ\ 19'\ 3''.28$$
$$M_0=347\ \ 3\ \ 10.56;\qquad M_0=347\ \ 3\ \ 10.65$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ теперь слѣдующую систему элементовъ орбиты кометы Энке:

1875 года, марта 1.0 ср. гринв. вр.

$$\begin{aligned} M_0 &= 347^\circ\ \ 3'\ \ 10''.61 \\ \theta &= 334\ \ 41\ \ 41.43 \\ i &= 13\ \ 7\ \ 12.28 \\ \omega &= 183\ \ 37\ \ 27.95 \\ \varphi &= 58\ \ 5\ \ 52.44 \\ \log\mu &= 3.0350349 \end{aligned}$$

(θ, i, ω — срд. равнд. 1875.0)

Для поясненія выше изложенной теоріи опредѣленія вѣроятнѣйшихъ орбитъ вычислимъ поправки этихъ элементовъ по наблюденіямъ обнимающимъ собою весь періодъ времени, въ который комета могла быть видима при послѣднемъ ея появленіи въ 1875 году. Для исправленія найденной теперь системы элементовъ мы возьмемъ наблюденія 28 Февраля, 9, 16, и 23 Марта, 4 и 9 Апрѣля и 9 Мая. Первое изъ этихъ наблюденій произведено въ Пулковѣ, три слѣдующія—въ Москвѣ (ими мы уже пользовались для вычисленія первоначальной системы элементовъ), два апрѣльскія въ Кремсмюнстерѣ и одно майское въ Виндзорѣ въ Австраліи. Замѣтимъ, что наблюденіемъ 4 Апрѣля мы уже пользовались для вычисленія послѣдней системы элементовъ. Изъ упомянутыхъ наблюденій для 28 Февраля, 9 Апрѣля и 9 Мая найдены слѣдующія прямыя восхожденія и склоненія кометы *)

1875 года		AR ☄	Decl ☄
28 Февраля,	$7^h\ 25^m\ 15^s$ ср. Пулк. вр.	$0^h\ 25^m\ 13^s.24$	$+10^\circ\ 20'\ 43''.2$
9 Апрѣля,	7 59 59 ср. Кремс. вр	2 26 48.68	+16 25 56.0
9 Мая	17 13 58 ср. Виндз. вр	0 54 3.50	−12 18 44.0

Редуцируя всѣ упомянутыя наблюденія къ среднему равноденствію начала 1875 года и вычисляя координаты фиктивныхъ мѣстъ наблюденій, составимъ слѣдующія данныя для вычисленія вѣроятнѣйшей орбиты:

---

*) Astr. Nachr. №№ 2038, 2040, 2054.

1875 г. сред. грн. вр.		α ☄	β ☄	L	log R
Февраля,	28.214923	9° 54′ 3″.24	+ 6° 59′ 29″.99	339° 44′ 51″.23	9.9962246
Марта,	9.206872	15 41 3 .28	+ 6 43 51 .62	348 45 40 .20	9.9972488
„	16.207957	20 45 17 .87	+ 6 24 12 .27	355 44 18 .97	9.9980712
„	23.239760	26 23 24 .13	+ 5 52 16 .93	2 43 0 .61	9.9989442
Апрѣля,	4.297029	36 38 59 .29	+ 3 44 40 .54	14 36 32 .10	0.0005133
„	9.288756	39 42 19 .26	+ 1 47 37 .37	19 13 35 .52	0.0012769
Мая,	9.295906	7 28 17 .54	— 16 38 59 .21	48 42 59 .27	0.0044005

Замѣтимъ, что во времена наблюденій здѣсь включены поправки зависящія отъ аберраціи свѣтилъ имѣющихъ собственное движеніе. Подъ L разумѣемъ долготы Солнца видимыя изъ фиктивныхъ мѣстъ наблюденія.

Вычислимъ теперь по найденной второй системѣ элементовъ положенія кометы соотвѣтствующія временамъ этихъ наблюденій. Примѣняя для этого изложенный въ n° 33 способъ Гаусса и, поступая такъ, какъ это было объяснено въ n° 36, находимъ по элементамъ:

	v	log r	α ☄	β ☄	log Δ
22 Февр.	241° 53′ 59″.88	0.0111069	9° 54′ 2″.97	+ 6° 59′ 22″.76	0.24097
9 Марта.	249 38 45 .56	9.9413411	15 41 25 .83	+ 6 43 35 .40	0.20990
16 „	257 54 49 .08	9.8743550	20 45 40 .81	+ 6 24 12 .03	0.17828
23 „	269 38 16 .82	9.7916899	26 23 48 .52	+ 5 52 17 .71	0.13713
4 Апрѣля	307 12 38 .50	9.6094000	36 38 59 .69	+ 3 44 40 .64	0.02980
9 „	334 53 46 .88	0.5416850	39 42 32 .56	+ 1 48 25 .14	9.96261
9 Мая.	99 57 12 .18	9.8582722	7 28 1 .64	— 16 39 19 .36	9.74467

Сравнивая эти вычисленныя координаты съ выше приведенными полученными изъ непосредственныхъ наблюденій, находимъ слѣдующія разности

	Δα	Δβ
23 Февраля	+ 0″.27	+ 7″.23
9 Марта	— 22 .55	+ 16 .22
16 „	— 22 .94	+ 0 .24
23 „	— 24 .39	— 0 .78
4 Апрѣля	— 0 .40	— 0 .10
9 „	— 13 .30	— 47 .77
9 Мая	+ 15 .90	— 20 .15

Эти разности и суть первыя части условныхъ уравненій составляемыхъ по формѣ (337).

Для вычисленія коэффиціентовъ условныхъ уравненій слѣдуетъ пользоваться выраженіями (333), (335) и (336). Выполняя это вычисленіе для избранныхъ временъ наблюденій, составляемъ по формамъ (337) слѣдующія условныя уравненія:

Уравненія въ долготѣ:

$$9.4314 = 9.0009_n \cdot \Delta i + 9.7026 \cdot \Delta\theta + 9.7050 \cdot \Delta\pi + 9.5559 \cdot \Delta M_0 + 9.5663_n \cdot \Delta\mu' + 0.0792_n \cdot \Delta\varphi$$

$$1.3532_n = 8.9498_n \cdot \Delta i + 9.6580 \cdot \Delta\theta + 9.6586 \cdot \Delta\pi + 9.6732 \cdot \Delta M_0 + 9.4994_n \cdot \Delta\mu' + 0.0962_n \cdot \Delta\varphi$$

$$1.3606_n = 8.8914_n \cdot \Delta i + 9.5996 \cdot \Delta\theta + 9.6082 \cdot \Delta\pi + 9.7472 \cdot \Delta M_0 + 9.4389_n \cdot \Delta\mu' + 0.1062_n \cdot \Delta\varphi$$

$$1.3872_n = 8.8043_n \cdot \Delta i + 9.5189 \cdot \Delta\theta + 9.5314 \cdot \Delta\pi + 9.7771 \cdot \Delta M_0 + 9.3791_n \cdot \Delta\mu' + 0.1092_n \cdot \Delta\varphi$$

$$9.6021_n = 8.4882_n \cdot \Delta i + 9.1166 \cdot \Delta\theta + 9.1475 \cdot \Delta\pi + 9.4155_n \cdot \Delta M_0 + 9.7314_n \cdot \Delta\mu' + 0.0573_n \cdot \Delta\varphi$$

$$1.1239_n = 8.1215_n \cdot \Delta i + 8.4236_n \cdot \Delta\theta + 8.2865_n \cdot \Delta\pi + 0.3094_n \cdot \Delta M_0 + 0.1072_n \cdot \Delta\mu' + 0.0479_n \cdot \Delta\varphi$$

$$1.2014 = 9.4004 \cdot \Delta i + 9.6306_n \cdot \Delta\theta + 9.6560_n \cdot \Delta\pi + 0.9182_n \cdot \Delta M_0 + 0.6183_n \cdot \Delta\mu' + 0.2813_n \cdot \Delta\varphi$$

Уравненія въ широтѣ:

$0.8591 = 9.7216\,.\Delta i + 8.5418\,.\Delta\theta + 8.9620\,.\Delta\pi + 8.6145\,.\Delta M_0 + 8.8826_n\,.\Delta\mu' \pm 9.3276_n\,.\Delta\varphi$

$1.2100 = 9.7059\,.\Delta i + 8.5122\,.\Delta\theta + 8.8389\,.\Delta\pi + 8.0496_n\,.\Delta M_0 + 8.9147_n\,.\Delta\mu' + 9.2528_n\,.\Delta\varphi$

$9.3802 = 9.6853\,.\Delta i + 8.4935\,.\Delta\theta + 8.6884\,.\Delta\pi + 8.9303_n\,.\Delta M_0 + 8.9897_n\,.\Delta\mu' + 9.1547_n\,.\Delta\varphi$

$9.8921_n = 9.6481\,.\Delta i + 8.4753\,.\Delta\theta + 8.3940\,.\Delta\pi + 9.3499_n\,.\Delta M_0 + 9.1342_n\,.\Delta\mu' + 8.9671_n\,.\Delta\varphi$

$9.0000_n = 9.4524\,.\Delta i + 8.3605\,.\Delta\theta + 8.5252_n\,.\Delta\pi + 9.9603_n\,.\Delta M_0 + 9.5853_n\,.\Delta\mu' + 8.4601\,.\Delta\varphi$

$1.6792_n = 9.1389\,.\Delta i + 8.0720\,.\Delta\theta + 8.8357_n\,.\Delta\pi + 0.2017_n\,.\Delta M_0 + 9.8244_n\,.\Delta\mu' + 8.7370\,.\Delta\varphi$

$1.3043_n = 0.0545_n\,.\Delta i + 9.5359\,.\Delta\theta + 9.6196\,.\Delta\pi + 9.2063\,.\Delta M_0 + 9.7842\,.\Delta\mu' + 0.1238\,.\Delta\varphi$

Въ этихъ уравненіяхъ на мѣсто коэффиціентовъ поставлены ихъ логариѳмы, а первыя части суть ничто иное какъ логариѳмы вычисленныхъ выше разностей $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$. Замѣтимъ еще, что коэффиціентъ при $\Delta\mu$, т. е. величины F' и F'' въ нашемъ случаѣ значительно болѣе всѣхъ другихъ коэффиціентовъ, а потому вмѣсто неизвѣстнаго $\Delta\mu$ мы ввели $\Delta\mu'$ подъ условіемъ $\Delta\mu' = 100\,.\Delta\mu$, и такимъ образомъ въ условныя уравненія вмѣсто коэффиціентовъ F' и F'' входятъ $0{,}01\,.F'$ и $0{,}01\,.F''$. Въ той и другой группѣ первое уравненіе соотвѣтствуетъ наблюденію 28 Февраля, второе—наблюденію 9 Марта и т. д.

Изъ этихъ условныхъ уравненій составимъ теперь окончательныя. Если назовемъ извѣстныя величины или первыя части условныхъ уравненій чрезъ n, коэффиціенты при Δi чрезъ a, при $\Delta\theta$—чрезъ b, при $\Delta\pi$—чрезъ c и т. д., т. е. если удержимъ означенія сдѣланныя въ n° 47, то для разсматриваемаго случая коэффиціенты уравненій (338) будутъ

$$(an) = +\,37.645\,; \quad (a^2) = +\ 2.445$$
$$(bn) = -\,40.403\,; \quad (b^2) = +\ 1.047$$
$$(cn) = -\,38.084\,; \quad (c^2) = +\ 1.165$$
$$(fn) = -\,69.290\,; \quad (f^2) = +\,77.307$$
$$(gn) = -\,11.815\,; \quad (g^2) = +\,20.539$$
$$(hn) = +\,39.600\,; \quad (h^2) = +\,14.361$$

$(ab) = -\ 0.572$; $(bc) = +\ 1.095$; $(cf) = +\ 4.782$; $(fg) = +38.122$; $(gh) = +12.287$

$(ac) = -\ 0.636$; $(bf) = +\ 4.379$; $(cg) = +\ 1.599$; $(fh) = +16.028$;

$(af) = -\ 2.990$; $(bg) = +\ 1.402$; $(ch) = -\ 0.901$;

$(ag) = -\ 1.988$; $(bh) = -\ 0.965$;

$(ah) = -\ 1.823$;

а потому полагая для краткости

$$\Delta i = x\,; \quad \Delta\theta = y\,; \quad \Delta\pi = z\,; \quad \Delta M_0 = u\,; \quad \Delta\mu' = w\,; \quad \Delta\varphi = t$$

составимъ для опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ, слѣдующія окончательныя уравненія:

$$+\,2.445.x - 0.572.y - 0.636.z - 2.990.u - 1.988.w + 1.823.t - 37.645 = 0$$
$$-\,0.572.x + 1.047.y + 1.095.z + 4.379.u + 1.402.w - 0.965.t + 40.403 = 0$$
$$-\,0.636.x + 1.095.y + 1.165.z + 4.782.u + 1.599.w - 0.901.t + 38.084 = 0$$
$$-\,2.990.x + 4.379.y + 4.782.z + 77.307.u + 38.122.w + 16.028.t + 69.290 = 0$$
$$-\,1.988.x + 1.402.y + 1.599.z + 38.122.u + 20.539.w + 12.287.t + 11.815 = 0$$
$$+\,1.823.x - 0.965.y - 0.901.z + 16.028.u + 12.287.w + 14.361.t - 39.600 = 0$$

Исключая изъ этихъ уравненій x находимъ по выраженіямъ (340) слѣдующіе коэффиціенты уравненій (341).

$$(b_1^2) = +\ 0.913183 \quad (bn_1) = -31.5961$$
$$(c_1^2) = +\ 0.999562 \quad (cn_1) = -28.2917$$
$$(f_1^2) = +73.6505 \quad (fn_1) = -23.2539$$
$$(g_1^2) = +18.9226 \quad (gn_1) = +18.7937$$
$$(h_1^2) = +13.0018 \quad (hn_1) = +11.5318$$

$$(bc_1) = +\ 0.946210 \quad (cf_1) = +4.00423 \quad (fg_1) = +35.6909; \quad (gh_1) = +13.7693$$
$$(bf_1) = +\ 3.67950 \quad (cg_1) = +1.08188 \quad (fh_1) = +18.2574$$
$$(bg_1) = +\ 0.936914 \quad (ch_1) = -0.426796$$
$$(bh_1) = -\ 0.538515$$

послѣ этого формы (342) даютъ для нашего случая

$$(c_2^2) = +\ 0.019130; \quad (cn_2) = +\ 4.44713$$
$$(f_2^2) = +58.8247; \quad (fn_2) = +104.057$$
$$(g_2^2) = +17.9613; \quad (gn_2) = +\ 51.2109$$
$$(h_2^2) = +12.6842; \quad (hn_2) = -\ 7.10083$$
$$(cf_2) = +0.191656; \quad (fg_2) = +31.9157; \quad (gh_2) = +14.3218$$
$$(cg_2) = +0.111077; \quad (fh_2) = +20.4272;$$
$$(ch_2) = +0.131195;$$

Имѣя это, по формамъ (344) находимъ

$$(f_3^2) = +56.9046 \quad (fn_3) = +59.5039$$
$$(g_3^2) = +17.3164 \quad (gn_2) = +25.3897$$
$$(h_3^2) = +11.7845 \quad (hn_3) = -37.5988$$
$$(fg_3) = +30.8029 \quad (gh_3) = +13.5600$$
$$(fh_3) = +19.1128$$

формы (346) даютъ

$$(g_4^2) = +0.642482; \quad (gn_4) = -\ 6.82012; \quad (gh_4) = +3.21408$$
$$(h_4^2) = +5.36404; \quad (hn_4) = -57.5849$$

Наконецъ по формамъ (348) составляемъ

$$(h_5^2) = -10.7137; \quad (hn_5) = -23.4666$$

Имѣя это, можетъ вычислить всѣ неизвѣстныя величины. Обратимся для этого къ уравненіямъ (349), (350), (351), (352), (353) и (339) и изъ нихъ въ этомъ порядкѣ, получаемъ

$$x = +0.911; \qquad u = +11.98$$
$$y = -290.14; \qquad w = -21.57$$
$$z = +222.61; \qquad t = +2.19$$

поэтому искомыя поправки элементовъ суть

$$\Delta i = +0''.91$$
$$\Delta\theta = -4'\ 50.14$$
$$\Delta\pi = +3\ 42.61$$
$$\Delta M_0 = +11.98$$
$$\Delta\mu = -0.2157$$
$$\Delta\varphi = +2.19$$

а слѣдовательно элементы вѣроятнѣйшей орбиты будутъ

1875 года, марта 1.0 ср. гр. вр.

$$M_0 = 347^\circ\ 3'\ 22''.59$$
$$\left.\begin{aligned}\theta &= 334\ 36\ 51.29\\ i &= 13\ \ 7\ 13.19\\ \omega &= 183\ 41\ 10.56\end{aligned}\right\}\ \text{ср. равнд. } 1875.0$$
$$\varphi = 58\ \ 5\ 54.63$$
$$\mu = 1083.798$$

Этой исправленной системой элементовъ избранныя наблюденія представляются лучше нежели первоначальной системой, но остающіяся, все таки еще значительныя разности между наблюдаемыми и вычисленными координатами могутъ быть уменьшены только посредствомъ гораздо болѣе длиннаго ряда наблюденій принятаго въ основаніе вычисленія, ибо только тогда составленіемъ нормальныхъ мѣстъ будетъ возможно уменьшить вліяніе случайныхъ погрѣшностей отдѣльныхъ опредѣленій на окончательный результатъ.

Имѣя однако въ виду не столько самое вычисленіе орбиты кометы Энке, сколько поясненіе изложенной теоріи на частномъ примѣрѣ, мы ограничились обработкой этихъ немногихъ наблюденій.

VIII.

Опредѣленіе орбитъ метеорныхъ токовъ по данному положенію точки радіаціи.

49. Мы прослѣдили рѣшеніе всѣхъ главныхъ задачъ теоретической астрономіи, понимаемой въ тѣсномъ смыслѣ этого слова. Остается указать на существующее рѣшеніе одного не вполнѣ еще разработаннаго вопроса, находящагося въ нѣкоторой внутренней связи съ одной изъ упомянутыхъ выше общихъ задачъ.

Изслѣдованія итальянскаго астронома Скіапарелли, произведенныя въ недавнее время, приводятъ къ заключенію, что въ нѣкоторой связи съ кометами находятся тѣ небольшія тѣла, которыя въ разное время въ видѣ болѣе или менѣе блестящихъ падающихъ звѣздъ появляются на сводѣ небесномъ и носятъ общее названіе метеоровъ.

Скіапарелли на основаніи своихъ изслѣдованій заключаетъ, что метеоры обязаны своимъ происхожденіемъ отдѣленію частей отъ обширной массы космической матеріи, проникнувшей въ нашу Солнечную систему подъ вліяніемъ тѣхъ же условій какъ и многія кометы,—матеріи, распавшейся потомъ на части отъ дѣйствія возмущающей силы Солнца и какой либо большой планеты. Понятно, что такое допущеніе можетъ быть разсматриваемо не болѣе какъ гипотеза нуждающаяся въ сильныхъ подтвержденіяхъ.

Въ извѣстныя времена года падающія звѣзды бываютъ видимы въ весьма большомъ количествѣ. Въ этомъ отношеніи особенно замѣчательны дни 10 Августа и 13 Ноября. Впрочемъ во второй изъ этихъ дней явленіе метеоровъ не каждый годъ имѣетъ одинаковую интенсивность и представляется явленіемъ періодическимъ съ періодомъ приблизительно въ 33 года.

Кромѣ этихъ главныхъ потоковъ падающихъ звѣздъ наблюдаются еще многіе другіе, появляющіеся также въ опредѣленные дни года. При этомъ явленіе для иныхъ потоковъ повторяется не каждый годъ, но чрезъ опредѣленное число лѣтъ, подобно тому какъ это имѣетъ мѣсто для главнаго Ноябрьскаго потока.

Изъ періодичности явленія нѣкоторыхъ потоковъ слѣдуетъ заключить, что земля, двигаясь около Солнца, встрѣчаетъ въ разныхъ точкахъ своей орбиты различные рои метеоровъ, которые подобно планетамъ и кометамъ движутся около Солнца. Допустимъ, что метеоры наблюдаемые нами 10 Августа движутся въ эллиптической

орбитѣ наклоненной подъ нѣкоторымъ угломъ къ эклиптикѣ. Такъ какъ явленіе метеоровъ Лаврентьевскаго потока (10 Августа) наблюдается ежегодно, то мы должны заключить, что отдѣльные метеоры этой группы распредѣлены приблизительно равномѣрно по всей орбитѣ. Предположимъ, что орбита разсматриваемыхъ метеоровъ пересѣкается въ какой либо точкѣ съ земной орбитой. Понятно, что въ то время какъ земля будетъ находиться на своемъ пути вблизи этой точки пересѣченія, она своимъ притяженіемъ будетъ увлекать изъ группы отдѣльные метеоры и эти послѣдніе, проносясь чрезъ земную атмосферу, представятся намъ болѣе или менѣе блестящими падающими звѣздами.

Если группа метеоровъ не распредѣлена по всей орбитѣ, а занимаетъ только извѣстную дугу, то понятно, что не всякій годъ эта группа будетъ встрѣчаться съ землей въ точкѣ пересѣченія орбиты метеорнаго тока съ эклиптикой. Эта встрѣча будетъ возможна только тогда, когда вся группа, двигаясь по своей орбитѣ около Солнца, будетъ пересѣкать эклиптику. Слѣдовательно явленіе падающихъ звѣздъ этой группы будетъ возможно только при каждомъ возвращеніи группы къ эклиптикѣ. Мы предполагаемъ, что метеоры группы занимаютъ уже значительную по длинѣ дугу своей орбиты и что для прохожденія черезъ эклиптику вся группа употребляетъ значительное время, не менѣе года.

Наблюдая явленіе падающихъ звѣздъ принадлежащихъ различнымъ метеорнымъ токамъ, мы прежде всего замѣчаемъ, что звѣзды принадлежащія къ каждой группѣ при появленіи своемъ выходятъ какъ бы изъ одной точки неба. Такъ метеоры Лаврентьевскаго потока появляются въ точкѣ неба близкой къ звѣздѣ β Persei; метеоры Ноябрьской группы выходятъ изъ точки расположенной въ созвѣздіи Льва. Такую точку исхода мы будемъ называть точкой *радіаціи* и покажемъ пріемъ, посредствомъ котораго по координатамъ этой точки могутъ быть найдены элементы орбиты метеорнаго тока. Назовемъ долготу и широту точки радіаціи чрезъ l и b.

Разсмотримъ одинъ какой либо метеоръ группы; назовемъ чрезъ x, y, z его координаты относительно прямоугольныхъ осей произвольно проведенныхъ чрезъ центръ Солнца. Пусть координаты центра земли для того же момента и считаемыя относительно тѣхъ же осей будутъ X, Y, Z. Пусть наконецъ ξ, η, ζ будутъ координаты разсматриваемаго метеора относительно осей проведенныхъ параллельно предыдущимъ чрезъ центръ земли; тогда

$$x = \xi + X; \qquad y = \eta + Y; \qquad z = \zeta + Z$$

откуда

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt}; \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dY}{dt}; \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dZ}{dt} \qquad (355)$$

гдѣ слѣдовательно $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ суть проложенія на оси координатъ той скорости, которую имѣетъ метеоръ относительно земли. Назовемъ чрезъ g эту скорость метеора относительно земли, расположивъ плоскость xy въ плоскости эклиптики и направивъ ось x въ точку весенняго равноденствія, получимъ очевидно

$$\frac{d\xi}{dt} = -g\cos l \,.\cos b; \qquad \frac{d\eta}{dt} = -g\cos b \,.\sin l; \qquad \frac{d\zeta}{dt} = -g \,.\sin b \qquad (356)$$

ибо направленіе движенія относительно земли опредѣляется положеніемъ точки радіаціи на сферѣ небесной; что же касается знака минусъ, то онъ зависитъ отъ того, что при встрѣчѣ съ землей метеоръ движется къ этой послѣдней. Если бы величина g была извѣстна, то задачу можно было бы считать рѣшенною, ибо $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ строго извѣстны, а потому въ упомянутомъ случаѣ были бы извѣстны также и величины производныхъ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; связь же этихъ послѣднихъ съ элементами орбиты легко можетъ быть найдена чрезъ дифференцированіе выраженій (135) относительно времени.

Имѣя въ виду такой путь рѣшенія вопроса, опредѣлимъ форму производныхъ $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$. Такъ какъ мы принимаемъ плоскость эклиптики за плоскость xy, то $Z = 0$, выраженія же двухъ другихъ координатъ именно X и Y получимъ изъ выраженій (370), Т. I., принимая въ нихъ $\omega = 0$. И такъ

$$X = -R.\cos L; \qquad Y = -R.\sin L$$

гдѣ R и L суть разстояніе земли отъ Солнца и долгота Солнца. Изъ этихъ выраженій имѣемъ

$$\frac{dX}{dt} = -\cos L\frac{dR}{dt} + R.\sin L\frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dY}{dt} = -\sin L\frac{dR}{dt} - R.\cos L\frac{dL}{dt}$$

но такъ какъ $L = \Pi + v$, гдѣ подъ Π разумѣемъ долготу перигелія земной орбиты, то

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

Кромѣ того при обыкновенныхъ означеніяхъ для земной орбиты по уравненіе (244) имѣемъ

(357) $$d\zeta = \frac{R^2}{a^2.\cos\varphi}\cdot dv$$

Такъ какъ

$$R = a(1 - e.\cos E)$$

то

$$dR = ae.\sin E.dE$$

Кромѣ того

$$R.\sin v = a\sqrt{1-e^2}.\sin E$$

слѣдовательно

$$dR = R.\sin v.\tang\varphi.dE$$

изъ выраженія же

$$\zeta = E - e.\sin E$$

имѣемъ

$$d\zeta = \frac{R}{a} \cdot dE$$

такимъ образомъ

$$\frac{dR}{dt} = a \operatorname{tang} \varphi \,.\, \sin v \frac{d\zeta}{dt}$$

Внесемъ это въ предыдущія выраженія $\frac{dX}{dt}$ и $\frac{dY}{dt}$ и обращая при этомъ вниманіе на уравненіе (357), легко получимъ

$$\frac{dX}{dt} = \quad \frac{a}{\cos \varphi} [\sin L + \sin \varphi \,.\, \sin \Pi] \frac{d\zeta}{dt}$$

$$\frac{dY}{dt} = - \frac{a}{\cos \varphi} [\cos L + \sin \varphi \,.\, \cos \Pi] \frac{d\zeta}{dt}$$

но такъ какъ

$$\zeta = \mu \,.\, t + M_0 ; \qquad \mu = \frac{K}{a^{\frac{3}{2}}}$$

то

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{K}{a^{\frac{3}{2}}}$$

Принимая же за единицу среднее разстояніе земли отъ Солнца, найдемъ

$$\frac{d\zeta}{dt} = K$$

Кромѣ того по малости эксцентриситета земной орбиты будемъ считать $\cos \varphi = 1$, тогда

$$\frac{dX}{dt} = \quad K [\sin L + \sin \varphi \,.\, \sin \Pi]$$

$$\frac{dY}{dt} = - K [\cos L + \sin \varphi \,.\, \cos \Pi]$$

гдѣ K есть Гауссова постоянная величина. Примемъ за единицу, въ которой будемъ выражать скорости, величину K, тогда

$$\frac{dX}{dt} = \sin L + \sin \varphi \,.\, \sin \Pi$$

$$- \frac{dY}{dt} = \cos L + \sin \varphi \,.\, \cos \Pi$$

Если назовемъ чрезъ s скорость земли на орбитѣ и чрезъ L' тотъ уголъ, который направленіе движенія составляетъ съ осью y, то будемъ имѣть

$$\frac{dX}{dt} = s \,.\, \sin L' ; \qquad \frac{dY}{dt} = s \,.\, \cos L'$$

Слѣдовательно

$$(358)\qquad \begin{aligned} \sin L + \sin\varphi\,.\,\sin\Pi &= \quad s\,.\,\sin L' \\ \cos L + \sin\varphi\,.\,\cos\Pi &= -\,s\,.\,\cos L' \end{aligned}$$

возвышая эти уравненія въ квадратъ и складывая, получимъ

$$s^2 = 1 + 2\,.\,\sin\varphi\,.\,\cos(L - \Pi) + \sin^2\varphi$$

или ограничиваясь первыми степенями эксцентриситета, примемъ

$$s = 1 + \sin\varphi\,.\,\cos(L - \Pi)$$

но такъ какъ при $a = 1$

$$R = \frac{\cos^2\varphi}{1 + \sin\varphi\,.\,\cos(L - \Pi)}$$

то

$$s = \frac{1}{R}$$

Чтобы опредѣлить теперь величину L помножимъ первое изъ уравненій (358) на $\cos L$, а второе на $\sin L$ и вычтемъ второе произведеніе изъ перваго, тогда получимъ

$$s\,.\,\sin(L' + L) = \sin\varphi\,.\,\sin(\Pi - L)$$

или внося сюда вмѣсто s его предыдущую величину, найдемъ

$$\sin(L' + L) = R\,.\,\sin\varphi\,.\,\sin(\Pi - L)$$

отсюда видимъ, что $L' + L$ есть величина порядка эксцентриситета земной орбиты, а потому можемъ принять

$$L' = -\,L + \frac{R}{\sin 1'}\,.\,\sin\varphi\,.\,\sin(\Pi - L)$$

Предполагается, что второй членъ этого выраженія представленъ въ минутахъ дуги. Замѣтимъ, что для земной орбиты

$$\Pi = 280^0\ 21'.3 + 1'.03\,(t - 1850)$$

$$\log\sin\varphi = 8.2246$$

Внесемъ въ уравненія (354) вмѣсто $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}$ ихъ найденныя выше величины и тогда получимъ

$$(359)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\,g\,.\,\cos l\,.\,\cos b + s\,.\,\sin L' \\ \frac{dy}{dt} &= -\,g\,.\,\sin l\,.\,\cos b + s\,.\,\cos L' \\ \frac{dz}{dt} &= -\,g\,.\,\sin b \end{aligned}$$

Возвысимъ эти уравненія въ квадратъ и сложимъ и если означимъ при этомъ чрезъ v скорость метеора въ орбитѣ, то получимъ

$$v^2 = g^2 + s^2 - 2gs \,.\, \cos b \,.\, \sin(L' + l)$$

или

$$v^2 = g^2 - \frac{2g}{R} \cos b \,.\, \sin(L' + l) + \frac{1}{R^2}$$

Скіапарелли изъ весьма подробнаго изслѣдованія измѣненія часоваго числа падающихъ звѣздъ первый основательно заключилъ, что абсолютная скорость этихъ тѣлъ есть скорость параболическая *) и что слѣдовательно орбиты метеоровъ имѣютъ или параболическую форму, или форму весьма удлиненыхъ эллипсисовъ. Мы видѣли, что скорость параболическаго движенія въ зависимости отъ радіуса вектора представляется формой

$$v = K\sqrt{\frac{2(1+m)}{r}}$$

Но такъ какъ масса отдѣльнаго метеора всегда можетъ считаться за величину исчезающую въ сравненіи съ массой Солнца, то примемъ $m = 0$, кромѣ того мы положили $K = 1$. И такъ

$$v = \sqrt{\frac{2}{r}}$$

Пользуясь координатами точки радіаціи, мы разсматриваемъ то положеніе метеора на его орбитѣ, при которомъ онъ становится видимымъ для наблюдателя на поверхности земли, т. е. то положеніе, при которомъ метеоръ пересѣкаетъ земную атмосферу, слѣдовательно для этого момента должно принять $r = R$ и тогда

$$v = \sqrt{\frac{2}{R}}$$

Такимъ образомъ для опредѣленія искомаго g мы имѣемъ уравненіе

$$\frac{2}{R} = g^2 - \frac{2g}{R} \sin(L' + l) \cos b + \frac{1}{R^2}$$

что легко представляется въ видѣ

$$\frac{g^2 \,.\, R^2}{2R - 1} - \frac{2g \,.\, R}{2R - 1} \sin(L' + l) \cos b - 1 = 0$$

полагая здѣсь

$$\frac{g \,.\, R}{\sqrt{2R - 1}} = h; \qquad \sin(L' + l) \cos b = \cot z \qquad (360)$$

*) См. Bulletino meteorologico dell'Osservatorio del Collegio Romano. Vol V, pg. 88.

имѣемъ

$$h^2 - 2h . \operatorname{cotg} z - 1 = 0$$

откуда

$$h = \operatorname{cotg} z \pm \frac{1}{\sin z}$$

Такъ какъ y есть величина существенно положительная, то знакъ въ этомъ выраженіи долженъ быть выбранъ при томъ условіи, чтобы h было положительно. Мы опредѣляемъ z по тангенсу и слѣдовательно для каждаго опредѣленнаго значенія $\operatorname{tang} z$ получаемъ двѣ величины z, изъ которыхъ одна имѣетъ положительный, а другая отрицательный синусъ; поэтому чтобы имѣть всегда положительную величину для h, мы возмемъ верхній знакъ для того значенія z, которое имѣетъ положительный синусъ. И такъ для верхняго знака имѣемъ

$$h = \operatorname{cotg} \frac{z}{2}$$

Какъ скоро извѣстно h, то извѣстно и g, посредствомъ котораго легко уже вычислить элементы орбиты метеора. Обращая вниманіе на выраженія (17), приводимъ уравненія (14) къ виду

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \quad C . \cos i$$

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = - C . \sin i . \sin \theta$$

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = \quad C . \sin i . \cos \theta$$

Мы знаемъ, что $C = K \sqrt{a(1 - e^2)} = K \sqrt{2q}$, поэтому

$$K . \sqrt{2q} . \cos i = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$$

$$- K . \sqrt{2q} . \sin i . \sin \theta = z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}$$

$$K . \sqrt{2q} . \sin i . \cos \theta = y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}$$

Замѣтимъ, что въ тотъ моментъ, когда мы видимъ метеоръ, этотъ послѣдній уже находится въ земной атмосферѣ, а слѣдовательно можемъ принять, что въ это время онъ пересѣкаетъ эклиптику и слѣдовательно тогда $z = 0$; если только плоскость эклиптики считаемъ за плоскость xy. Кромѣ того

$$x = X = - R . \cos L$$

$$y = Y = - R . \sin L$$

Внося эти величины вмѣстѣ съ выраженіями производныхъ представленныхъ формами (359) въ предыдущія уравненія, найдемъ

$$K.\sqrt{2q}.\cos i = R.g.\cos b.\cos(l - L) - \cos(L + L')$$

$$K.\sqrt{2q}.\sin i.\sin \theta = R.g.\sin b.\cos L \qquad (361)$$

$$K.\sqrt{2q}.\sin i.\cos \theta = R.g.\sin b.\sin L$$

Такъ какъ вторыя части этихъ уравненій извѣстны, то уравненія могутъ служить для опредѣленія трехъ элементовъ i, θ и q. Остается опредѣлить долготу перигелія и время прохожденія черезъ перигелій.

Для параболы

$$r = \frac{q}{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)}$$

отсюда

$$\frac{dr}{dt} = \frac{q.\sin\left(\frac{v}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{v}{2}\right)}\frac{dv}{dt}$$

или

$$\frac{dr}{dt} = r.\operatorname{tang}\frac{v}{2}\cdot\frac{dv}{dt}$$

слѣдовательно

$$\operatorname{tang}\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{\frac{dr}{dt}}{r\cdot\frac{dv}{dt}}$$

по уравненію (22)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

и такъ какъ вообще $C = K.\sqrt{2q}$, то

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K.\sqrt{2q}}{r^2}$$

а потому

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \frac{r\frac{dr}{dt}}{K.\sqrt{2q}}$$

но

$$r\frac{dr}{dt} = x\cdot\frac{dx}{dt} + y\cdot\frac{dy}{dt}$$

слѣдовательно

$$\operatorname{tang}\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{x\cdot\frac{dx}{dt} + y\cdot\frac{dy}{dt}}{K.\sqrt{2q}}$$

Внося сюда вмѣсто x и y величины

$$x = -R \,.\, \cos L\,; \qquad y = -R \,.\, \sin L$$

и вмѣсто $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ ихъ значенія взятыя изъ выраженій (359), получимъ

$$\text{(362)} \qquad \operatorname{tang} \frac{v}{2} = \frac{R \,.\, g \,.\, \cos b \,.\, \cos (L - l) - \sin (L' + L)}{K \,.\, \sqrt{2q}}$$

Для опредѣленія долготы перигелія замѣтимъ, что θ, т. е. долгота восходящаго или нисходящаго узла орбиты метеора можетъ быть найдена независимо отъ уравненій (361). Въ самомъ дѣлѣ, въ тотъ моментъ когда метеоръ становится видимымъ, онъ пересѣкаетъ земную атмосферу, слѣдовательно можно допустить, что въ это время онъ находится въ томъ или другомъ узлѣ своей орбиты, а слѣдовательно долгота узла орбиты равняется долготѣ земли соотвѣтствующей моменту явленія метеора. По выраженію (362) истинная аномалія вычисляется также для момента явленія метеора, но въ то время какъ свѣтило находится въ узлѣ своей орбиты, его истинная аномалія равняется разности $\theta - \pi$, гдѣ подъ π разумѣемъ долготу перигелія. Такимъ образомъ $v = \theta - \pi$, откуда искомая $\pi = \theta - v$. Что касается до вычисленія времени прохожденія черезъ перигелій, то для метеорныхъ группъ распредѣленныхъ по значительной дугѣ орбиты, а тѣмъ болѣе для группъ составляющихъ уже непрерывное кольцо, это вычисленіе не можетъ имѣть опредѣленнаго значенія.

Такимъ образомъ мы видимъ возможность вычисленія всѣхъ параболическихъ элементовъ орбиты метеора, а слѣдовательно и цѣлаго метеорнаго тока, по даннымъ координатамъ точки радіаціи.

Мы разсматривали до сихъ поръ орбиты метеоровъ какъ параболическія кривыя, но изъ періодичности явленія метеоровъ нѣкоторыхъ группъ слѣдуетъ заключить, что эти группы движутся по сомкнутымъ кривымъ,—по эллипсисамъ съ весьма большимъ эксцентриситетомъ. Послѣднее заключеніе естественно основывается на томъ, что группа, приходящая къ Солнцу изъ далекихъ пространствъ и имѣющая значительную скорость въ тотъ моментъ, какъ достигаетъ наименьшаго разстоянія отъ центральнаго тѣла, слабымъ дѣйствіемъ, такъ называемыхъ, нижнихъ планетъ не можетъ быть удержана въ орбитѣ съ короткимъ временемъ обращенія, напр. одного или двухъ лѣтъ. Въ самомъ дѣлѣ H. A. Newton, разсматривая наблюденія ноябрьскаго потока, производившіяся съ 902 года до нашего времени, именно до 1866 года, заключаетъ, что время обращенія ноябрьской группы должно равняться 33.25 года. Принимая эту величину за періодъ обращенія разсматриваемой теперь группы, не трудно вычислить для нея нѣкоторые элементы эллиптической орбиты. Въ самомъ дѣлѣ назвавъ чрезъ T время обращенія метеора около Солнца, чрезъ a большую полуось орбиты, имѣемъ $a = T^{\frac{2}{3}}$, а потому для нашего случая большая полуось орбиты выраженная въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ Солнца будетъ 10, 34. Изъ совокупности многихъ наблюденій выходитъ, что долгота точки радіаціи разсматриваемой группы есть 143° 22′, а широта равна 8° 51′. На основаніи этихъ данныхъ по изложенному выше способу находимъ слѣдующіе элементы орбиты ноябрьской группы:

долгота восх. узла	231° 28′
наклоненіе орбиты	17 44
долгота перигелія	56 26
разстояніе перигелія	0.987
эксцентриситетъ.	0 905
большая полуось	10.34
время обращенія	33.25

Движеніе обратное.

Между характеромъ явленія ноябрьскихъ метеоровъ и метеоровъ Лаврентьевскаго потока существуетъ большое различіе, которое должно отразиться и на самомъ методѣ изслѣдованія орбитъ той и другой группы. Это различіе заключается въ томъ, что кольцо метеоровъ Лаврентьевскаго потока уже сомкнулось, явленіе почти одинаково интенсивно повторяется каждый годъ и такая его непрерывность не позволяетъ намъ съ достаточною точностію опредѣлить время обращенія разсматриваемой группы. Величина періода, которая, какъ мы видѣли при изслѣдованіи орбиты ноябрьскихъ метеоровъ, можетъ служить исходной точкой вычисленія размѣровъ пути, въ случаѣ группы Лаврентьевскаго потока сама должна быть опредѣлена по размѣрамъ орбиты. Имѣя это въ виду, Скіапарелли предлагаетъ опредѣлить размѣры орбиты метеоровъ 10 Августа на основаніи другихъ соображеній. Разсматривая измѣненіе часоваго числа падающихъ звѣздъ, онъ находитъ возможнымъ опредѣлить числовую величину скорости v и считаетъ ее равною 1,447. Затѣмъ онъ допускаетъ, что эта скорость соотвѣтствуетъ извѣстному положенію метеора, именно положенію при встрѣчѣ его съ землею во время движенія по нѣкоторому эллипсису. Мы знаемъ, что скорость въ эллиптическомъ движеніи въ зависимости отъ радіуса вектора представляется въ видѣ

$$v = K\sqrt{\frac{1+m}{ar}(2a-r)}$$

Что въ примѣненіи къ нашему случаю обращается въ

$$1{,}447 = \sqrt{\frac{2a-R}{aR}}$$

отсюда легко опредѣляется полуось орбиты, а по ней изъ выраженія $T = a^{\frac{3}{2}}$ найдется и время обращенія. Принимая наконецъ прямое восхожденіе точки радіаціи для группы 10 Августа равнымъ 44°, а склоненіе $+$ 56°, находимъ слѣдующую систему элементовъ орбиты этой группы

долгота перигелія	343° 38′
долгота восх. узла.	138 16
наклоненіе	63 3
разстояніе периг.	9.964
время прохожденія чрезъ перигелій Іюля.	23.6
время обращенія.	105 лѣтъ.

Движеніе обратное.

Что касается до приведеннаго здѣсь времени прохожденія чрезъ перигелій, то понятно, что оно относится къ той части группы, которая прошла чрезъ восходящій узелъ 10, 8 Августа.

Мы уже сказали, что Скіапарелли предлагаетъ гипотезу для объясненія происхожденія метеоровъ. Независимо отъ этого опредѣленіе орбитъ нѣкоторыхъ метеорныхъ токовъ и особенно ноябрьскаго приводитъ насъ еще къ одному заключенію, которое едвали можно назвать гипотезой. Трудно не придти къ этому заключенію *послѣ поразительнаго открытія* сдѣланнаго Скіапарелли; это открытіе указываетъ если не прямо на тождество то на удивительное согласіе между элементами орбитъ нѣкоторыхъ кометъ и элементами орбитъ метеорныхъ токовъ. Элементы орбиты кометы I, 1866 года по вычисленію Оппольцера суть:

долгота перигелія	60° 28′
долгота восх. узла.	231 26
наклоненіе	17 18
разстояніе периг.	0.976
эксцентриситетъ.	0.905
большая полуось	10.32
время обращенія	33.17

Движеніе обратное.

Очевидно, что существуетъ большое сходство, почти тождество между орбитой этой кометы и орбитой метеоровъ ноябрьскаго потока. Не менѣе значительное сходство существуетъ между орбитами кометы III, 1862 года и метеоровъ Лаврентьевскаго потока. Въ самомъ дѣлѣ, если сравнимъ слѣдующіе элементы упомянутой сейчасъ кометы

время прох. чрезъ периг.	1862, Авг. 22.9
долгота перигелія	344° 41′
долгота восх. узла.	137 27
наклоненіе	66 25
разстояніе перигелія	0.9626
время обращенія	123.4 года

Движеніе обратное.

съ приведенными выше элементами орбиты метеоровъ Лаврентьевскаго потока, то должны будемъ признать большое сходство двухъ этихъ орбитъ, тѣмъ болѣе что малое различіе той и другой системы элементовъ вполнѣ объясняется неточностію, которая неизбѣжна въ опредѣленіи положенія точки радіаціи, т. е. главнаго даннаго для вычисленія орбиты метеорнаго тока.

На основаніи этого близкаго сходства орбитъ кометъ 1862 и 1861 года съ орбитами метеорныхъ токовъ 10 Авг. и 13 Ноября Скіапарелли заключаетъ, что упомянутыя кометы суть остатки тѣхъ кометъ, изъ которыхъ въ теченіи долгаго времени выдѣлялись метеоры Лаврентьевскаго потока и метеоры являющіеся 13 Ноября. *Такимъ образомъ рои метеоровъ по* существу тождественны съ кометами, и одно и тоже небесное тѣло является намъ, смотря по времени и пространству, то какъ комета, то какъ скопленіе метеоровъ.

Если допустимъ, что кометы не представляютъ собою одного непрерывнаго тѣла, а состоятъ изъ совокупности отдѣльныхъ малыхъ твердыхъ тѣлъ, то понятно, что въ

то время какъ ядро кометы вблизи перигелія своей орбиты имѣетъ большую скорость, части хвоста мало по малу отстають и остаются въ движеніи позади ядра и сама комета постепенно разрѣшается въ рой метеоровъ, имѣющій туже форму и положеніе какъ и орбита кометы. Если путь кометы замкнутъ, то вмѣсто нея со временемъ начинаетъ обращаться огромное кольцо темныхъ мелкихъ тѣлъ, которыя, попадая въ земную атмосферу, раскаляются и становятся для насъ видимыми какъ отдѣльные метеоры.

Различіе между головой или ядромъ кометы и обратившимся въ кольцо метеоровъ ея хвостомъ представляется для насъ тѣмъ, что ядро, состоящее изъ болѣе еще плотной массы, одинъ разъ въ теченіи каждаго полнаго обращенія около Солнца приходитъ на болѣе близкое разстояніе къ этому послѣднему и землѣ и начинаетъ свѣтить отраженнымъ солнечнымъ свѣтомъ, между тѣмъ какъ кольцо состоящее изъ разбросанныхъ уже метеоровъ невидимо даже и тогда, когда земля проходитъ чрезъ него.

Послѣ оказавшагося сходства двухъ кометныхъ орбитъ съ орбитами двухъ группъ астероидовъ естественно спросить не производитъ ли каждая періодическая комета извѣстное кольцо астероидовъ, не всякое ли періодическое паденіе метеоровъ происходитъ отъ встрѣчи земли съ кометой вблизи точки взаимнаго пересѣченія ихъ путей? Есть много кометъ не движущихся около Солнца по сомкнутымъ кривымъ, но и для нихъ есть вѣроятность допустить существованіе извѣстной дуги метеоровъ, которая можетъ при извѣстныхъ условіяхъ представить намъ хотя одинъ разъ явленіе падающихъ звѣздъ, именно въ то время когда земля при своемъ движеніи около Солнца пересѣчетъ эту дугу. Понятно однако, что отъ такихъ кометъ нельзя ожидать происхожденія періодически возвращающагося потока метеоровъ.

Замѣтимъ наконецъ, что земля, проходя черезъ метеорныя токи какъ существующіе уже въ формѣ колецъ около Солнца, такъ и проносящіеся черезъ солнечную систему по параболическимъ путямъ въ видѣ мимолетныхъ роевъ, каждый разъ своимъ притяженіемъ увлекаетъ изъ роя болѣе или менѣе значительное число отдѣльныхъ метеоровъ; она выводитъ ихъ изъ общей орбиты всего скопленія и заставляетъ двигаться по другимъ одиночнымъ орбитамъ. Эти то однажды разсѣянныя въ пространствѣ метеоры при послѣдующихъ встрѣчахъ съ землею являются въ видѣ спорадическихъ падающихъ звѣздъ, которыя почти каждую ночь мелькаютъ по небу.

КОНЕЦЪ ЧЕТВЕРТОЙ ЧАСТИ.

ЧАСТЬ ПЯТАЯ.

Интегрированіе уравненій возмущеннаго движенія. Возмущенія вращательнаго движенія земли около оси.

I.

Интегрированіе уравненій возмущеннаго движенія по способу измѣненія произвольныхъ постоянныхъ.

1. Одно изъ сильныхъ подтвержденій закона всемірнаго тяготѣнія, равно какъ и рѣшеніе одного изъ болѣе возвышенныхъ вопросовъ астрономіи, вопроса о прочности устройства солнечной системы, находится въ непосредственной связи съ интегрированіемъ уравненій возмущеннаго движенія. Поэтому не удивительно, что выполненіе этого интегрированія постоянно было предметомъ ученыхъ заботъ почти всѣхъ великихъ геометровъ жившихъ послѣ Ньютона. Хотя трудамъ этихъ великихъ дѣятелей науки до сихъ поръ не суждено было увѣнчаться полнымъ успѣхомъ, но тѣмъ не менѣе многія ихъ работы привели къ весьма важнымъ результатамъ. Многія теоремы относящіеся къ теоріи прочности равновѣсія солнечной системы доказаны съ удовлетворительной точностію. Таблицы многихъ небесныхъ движеній соглашаются теперь съ наблюденіями въ предѣлахъ погрѣшностей этихъ послѣднихъ.

Теоретическія соображенія, которыми достигаются эти результаты, проще всего могутъ быть развиты на основаніи способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, предложеннаго Лагранжемъ для интегрированія уравненій возмущеннаго движенія.

Рѣшеніе вопроса о возмущеніяхъ зависитъ отъ интегрированія уравненій (9) ч. 4 невыполнимаго въ конечномъ видѣ при настоящихъ средствахъ анализа. Это положеніе дѣла заставляетъ искать рѣшенія задачи способомъ послѣдовательныхъ приближеній. Дѣйствіе одного свѣтила на другое, напр., планеты на планету или планеты на комету незначительно въ сравненіи съ притяженіемъ Солнца и можетъ быть разсматриваемо какъ малая сила способная въ каждый моментъ мало измѣнить элементы орбиты. Такимъ образомъ орбита планеты или кометы въ возмущенномъ движеніи можетъ быть разсматриваема какъ коническое сѣченіе съ непрерывно измѣняющимися элементами, другими словами, возмущенная орбита свѣтила или дѣйствительно описываемая кривая можетъ быть разсматриваема какъ соприкасающаяся въ

каждый моментъ съ той орбитой, которую описало бы свѣтило, если бы въ этотъ моментъ возмущающія силы перестали дѣйствовать. Принимая во вниманіе малость возмущающихъ силъ, пропорціональныхъ возмущающимъ массамъ, Лагранжъ предлагаетъ слѣдующій способъ интегрированія уравненій (9) ч. 4.

Принимая возмущающую массу равною нулю, мы найдемъ интегралы уравненій движенія свѣтила, зависящіе отъ шести произвольныхъ постоянныхъ, а за тѣмъ опредѣлимъ тѣ измѣненія, которыя слѣдуетъ придать къ этимъ постояннымъ для того, чтобы найденные интегралы удовлетворяли уравненіямъ возмущеннаго движенія, въ которыхъ возмущающая масса считается отличною отъ нуля. Слѣдуя этому плану, мы должны принять шесть постоянныхъ, входящихъ въ интегралы уравненій эллиптическаго движенія, за функціи времени. Чтобы найти упомянутыя измѣненія постоянныхъ, мы очевидно должны два раза дифференцировать полученные интегралы, принимая за функціи времени входящія въ нихъ постоянныя, и эти дифференціалы должны внести въ уравненія (9) ч. 4, но тогда получимъ только три уравненія, изъ которыхъ придется опредѣлить шесть неизвѣстныхъ, т. е. шесть измѣненій постоянныхъ. Такимъ образомъ вопросъ становится неопредѣленнымъ, а потому приходится поставить еще новое условіе, изъ котораго возникли бы три новыя уравненія, совмѣстныя съ предыдущими и съ ними достаточныя для рѣшенія вопроса объ опредѣленіи шести измѣненій произвольныхъ постоянныхъ.

Рѣшеніе будетъ имѣть простѣйшую форму, если за новое условіе примемъ требованіе, чтобы опредѣляемая возмущенная орбита соприкасалась въ каждый моментъ съ извѣстнымъ перемѣннымъ коническимъ сѣченіемъ. По такому условію не только три координаты x, y, z, но также и ихъ первыя производныя взятыя относительно времени должны имѣть одну и ту же форму какъ въ возмущенномъ такъ и въ эллиптическомъ движеніи. Слѣдовательно это новое условіе требуетъ, чтобы какъ всякое конечное соотношеніе между координатами, такъ и всякое дифференціальное уравненіе перваго порядка относительно этихъ координатъ имѣло мѣсто какъ для возмущеннаго такъ и для эллиптическаго движенія и только выраженія зависящія отъ вторыхъ производныхъ будутъ различны для этихъ двухъ родовъ движенія.

Примѣнимъ эти общія соображенія къ интегрированію уравненій (9) ч. 4. Вторыя части этихъ уравненій содержатъ множителя m_1, который весьма малъ въ сравненіи съ единицей. Имѣя это въ виду, примемъ сначала $m_1 = 0$ и тогда дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія обращаются въ уравненія движенія по коническимъ сѣченіямъ; три окончательные интеграла этихъ уравненій найдены и содержатъ шесть произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Интегралы въ той же формѣ могутъ удовлетворять и уравненіямъ (9), но тогда постоянныя, введенныя интегрированіемъ уравненій (13), должны быть разсматриваемы какъ функціи времени. Принимая это, необходимо опредѣлить тѣ измѣненія постоянныхъ, при которыхъ интегралы уравненій (13), содержащіе эти измѣненныя постоянныя, удовлетворяли бы уравненіямъ возмущеннаго движенія.

За интегралы уравненій (13) ч. 4, какъ мы уже видѣли, можно считать выраженія (135), которыя имѣютъ слѣдующую общую форму

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= f\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, t) \\ y &= f_1\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, t) \\ z &= f_2\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, t) \end{aligned}$$

если подъ α, β, γ...... ζ разумѣемъ шесть элементовъ орбитъ, представленной коническимъ сѣченіемъ. Эти интегралы въ той же формѣ (135) могутъ удовлетворять и уравненіямъ возмущеннаго движенія, но тогда постоянныя α, β, γ...... ζ должны считаться функціями времени t. Такимъ образомъ если возьмемъ отъ предыдущихъ выраженій, или, что все равно, отъ выраженій (135) вторыя производныя относительно времени, считая при этомъ α, β, γ и т. д. за функціи времени и внесемъ полученныя выраженія этихъ производныхъ въ уравненія (9), то эти послѣднія должны удовлетвориться.

Дифференцируя предыдущія выраженія координатъ относительно времени, получимъ

$$\frac{dx}{dt}=u+\frac{dx}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{dx}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dt}+\cdots\cdots+\frac{dx}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt}=v+\frac{dy}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{dy}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dt}+\cdots\cdots+\frac{dy}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt} \qquad (2)$$
$$\frac{dz}{dt}=w+\frac{dz}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{dz}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dt}+\cdots\cdots+\frac{dz}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt}$$

гдѣ подъ u, v и w разумѣемъ производныя координатъ взятыя относительно времени входящаго явно, независимо отъ элементовъ, такъ что

$$u=\left(\frac{dx}{dt}\right);\qquad v=\left(\frac{dy}{dt}\right);\qquad w=\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

Въ движеніи по коническому сѣченію

$$\frac{dx}{dt}=u;\qquad \frac{dy}{dt}=v;\qquad \frac{dz}{dt}=w \qquad (3)$$

а потому чтобы производныя координатъ относительно времени сохраняли свою форму въ обоихъ родахъ движенія необходимо, чтобы въ выраженіяхъ (2) суммы членовъ, происходящія отъ измѣненія элементовъ, отдѣльно равнялись нулю. Такимъ образомъ дополнительное условіе необходимое для опредѣленія измѣненія элементовъ представится въ видѣ уравненій

$$\frac{dx}{d\alpha}d\alpha+\frac{dx}{d\beta}d\beta+\frac{dx}{d\gamma}d\gamma+\cdots\cdots+\frac{dx}{d\zeta}d\zeta=0$$
$$\frac{dy}{d\alpha}d\alpha+\frac{dy}{d\beta}d\beta+\frac{dy}{d\gamma}d\gamma+\cdots\cdots+\frac{dy}{d\zeta}d\zeta=0 \qquad (4)$$
$$\frac{dz}{d\alpha}d\alpha+\frac{dz}{d\beta}d\beta+\frac{dz}{d\gamma}d\gamma+\cdots\cdots+\frac{dz}{d\zeta}d\zeta=0$$

Чтобы имѣть вмѣстѣ съ этимъ три другія уравненія необходимыя для опредѣленія шести измѣненій постоянныхъ, будемъ дифференцировать относительно времени производныя (3) и полученныя выраженія внесемъ въ уравненія (9) ч. 4. Выполняя эти дифференцированія, получимъ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{du}{dt}\right)+\frac{du}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{du}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dt}+\cdots\cdots+\frac{du}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{dv}{dt}\right)+\frac{dv}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{dv}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dt}+\cdots\cdots+\frac{dv}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\left(\frac{dw}{dt}\right)+\frac{dw}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{dw}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dt}+\cdots\cdots+\frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt}$$

а слѣдовательно уравненія (9) ч. 4 примутъ видъ

(5)
$$\begin{gathered}\left(\frac{du}{dt}\right)+\frac{du}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\cdots\cdots+\frac{du}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+k^2.\mu_0\frac{x}{r^3}=k^2.\mu_0\frac{dR}{dx}\\ \left(\frac{dv}{dt}\right)+\frac{dv}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\cdots\cdots+\frac{dv}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+k^2.\mu_0\frac{y}{r^3}=k^2.\mu_0\frac{dR}{dy}\\ \left(\frac{dw}{dt}\right)+\frac{dw}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\cdots\cdots+\frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+k^2.\mu_0\frac{r}{r^3}=k^2.\mu_0\frac{dR}{dz}\end{gathered}$$

гдѣ для краткости мы принимаемъ $1+m_0=\mu_0$. Такъ какъ для движенія по коническому сѣченію

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{du}{dt}\right);\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{dv}{dt}\right);\qquad \frac{d^2z}{dt^2}=\left(\frac{dw}{dt}\right)$$

то уравненія (13) ч. 4 могутъ быть представлены въ видѣ

(6)
$$\begin{gathered}\left(\frac{du}{dt}\right)+\frac{k^2.\mu_0\,x}{r^3}=0\\ \left(\frac{dv}{dt}\right)+\frac{k^2.\mu_0\,y}{r^3}=0\\ \left(\frac{dw}{dt}\right)+\frac{k^2.\mu_0\,z}{r^3}=0\end{gathered}$$

Интегралы уравненій (5) и (6) по принятому условіе имѣютъ одинакую форму и самыя уравненія могутъ быть разсматриваемы какъ совмѣстныя, поэтому вычитая уравненія (6) изъ уравненій (5), получимъ

(7)
$$\begin{gathered}\frac{du}{d\alpha}\cdot d\alpha+\frac{du}{d\beta}\cdot d\beta+\cdots\cdots+\frac{du}{d\zeta}\cdot d\zeta=k^2.\mu_0\frac{dR}{dx}\cdot dt\\ \frac{dv}{d\alpha}\cdot d\alpha+\frac{dv}{d\beta}\cdot d\beta+\cdots\cdots+\frac{dv}{d\zeta}\cdot d\zeta=k^2.\mu_0\frac{dR}{dy}\cdot dt\\ \frac{dw}{d\alpha}\cdot d\alpha+\frac{dw}{d\beta}\cdot d\beta+\cdots\cdots+\frac{dw}{d\zeta}\cdot d\zeta=k^2.\mu_0\frac{dR}{dz}\cdot dt\end{gathered}$$

Этими уравненіями совмѣстно съ уравненіями (4) мы и будемъ пользоваться для опредѣленія измѣненій шести произвольныхъ постоянныхъ, введенныхъ интегрированіемъ уравненій (13), ч. 4.

Опредѣленіе искомыхъ измѣненій $d\alpha$, $d\beta$,..., $d\zeta$ будетъ имѣть наиболѣе простую форму, если производныя пертурбаціонной функціи по координатамъ замѣнимъ произ-

водными ся же по элементамъ. Такъ какъ пертурбаціонная функція не содержитъ производныхъ u, v, w, то

$$\frac{dR}{d\alpha}=\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{d\alpha}+\frac{dR}{dy}\cdot\frac{dy}{d\alpha}+\frac{dR}{dz}\cdot\frac{dz}{d\alpha}$$

$$\frac{dR}{d\beta}=\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{d\beta}+\frac{dR}{dy}\cdot\frac{dy}{d\beta}+\frac{dR}{dz}\cdot\frac{dz}{d\beta}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dR}{d\zeta}=\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{d\zeta}+\frac{dR}{dy}\cdot\frac{dy}{d\zeta}+\frac{dR}{dz}\cdot\frac{dz}{d\zeta}$$

Если умножимъ уравненія (7) соотвѣтственно на $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{dy}{d\alpha}$, $\frac{dz}{d\alpha}$ и сложимъ ихъ, то обращая вниманіе на предыдущія равенства, получаемъ

$$k^2.\mu_0\frac{dR}{d\alpha}\cdot dt=\left[\frac{du}{d\alpha}\cdot\frac{dx}{d\alpha}+\frac{dv}{d\alpha}\cdot\frac{dy}{d\alpha}+\frac{dw}{d\alpha}\cdot\frac{dz}{d\alpha}\right]d\alpha$$

$$+\left[\frac{du}{d\beta}\cdot\frac{dx}{d\beta}+\frac{dv}{d\beta}\cdot\frac{dy}{d\beta}+\frac{dw}{d\beta}\cdot\frac{dz}{d\beta}\right]d\beta$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left[\frac{du}{d\zeta}\cdot\frac{dx}{d\zeta}+\frac{dv}{d\zeta}\cdot\frac{dy}{d\zeta}+\frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{dz}{d\zeta}\right]d\zeta$$

Умножая уравненія (4) соотвѣтственно на $\frac{du}{d\alpha}$, $\frac{dv}{d\alpha}$, $\frac{dw}{d\alpha}$ и складывая произведенія, получимъ

$$0=\left[\frac{dx}{d\alpha}\cdot\frac{du}{d\alpha}+\frac{dy}{d\alpha}\cdot\frac{dv}{d\alpha}+\frac{dz}{d\alpha}\cdot\frac{dw}{d\alpha}\right]d\alpha$$

$$+\left[\frac{dx}{d\beta}\cdot\frac{du}{d\alpha}+\frac{dy}{d\beta}\cdot\frac{dv}{d\alpha}+\frac{dz}{d\beta}\cdot\frac{dw}{d\alpha}\right]d\beta$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left[\frac{dx}{d\zeta}\cdot\frac{du}{d\alpha}+\frac{dy}{d\zeta}\cdot\frac{dv}{d\alpha}+\frac{dz}{d\zeta}\cdot\frac{dw}{d\alpha}\right]d\zeta$$

Вычитая это уравненіе изъ предыдущаго, мы увидимъ, что первые члены того и другаго взаимно уничтожатся, а остальное даетъ

$$k\mu_0{}^2\frac{dR}{d\alpha}\cdot dt=(\alpha,\beta).d\beta+(\alpha,\gamma).d\gamma+(\alpha,\delta)\,d\delta+(\alpha,\varepsilon).d\varepsilon+(\alpha,\zeta).d\zeta \qquad (8)$$

гдѣ .

$$(\alpha, \beta) = \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{du}{d\beta} + \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{dv}{d\beta} + \frac{dz}{d\alpha} \cdot \frac{dw}{d\beta}$$

$$- \frac{du}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{d\beta} - \frac{dv}{d\alpha} \cdot \frac{dy}{d\beta} - \frac{dw}{d\alpha} \cdot \frac{dz}{d\beta}$$

(9)

$$(\alpha, \gamma) = \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{du}{d\gamma} + \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{dv}{d\gamma} + \frac{dz}{d\alpha} \cdot \frac{dw}{d\gamma}$$

$$- \frac{du}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{d\gamma} - \frac{dv}{d\alpha} \cdot \frac{dy}{d\gamma} - \frac{dw}{d\alpha} \cdot \frac{dz}{d\gamma}$$

и т. д.

Точно такимъ же образомъ умножимъ уравненія (7) соотвѣтственно на $\frac{dx}{d\beta}$, $\frac{dy}{d\beta}$, $\frac{dz}{d\beta}$, сложимъ произведенія и изъ суммы вычтемъ сумму уравненій (4) умноженныхъ соотвѣтственно на $\frac{du}{d\beta}$, $\frac{dv}{d\beta}$, $\frac{dw}{d\beta}$. Послѣ всего этого получимъ

(10) $$k^2 . \mu_0 \frac{dR}{d\beta} . dt = (\beta, \alpha) . d\alpha + (\beta, \gamma) . d\gamma + (\beta, \delta) . d\delta + (\beta, \varepsilon) . d\varepsilon + (\beta, \zeta) . d\zeta$$

гдѣ

$$(\beta, \alpha) = -(\alpha, \beta)$$

$$(\beta, \gamma) = \frac{dx}{d\beta} \cdot \frac{du}{d\gamma} + \frac{dy}{d\beta} \cdot \frac{dv}{d\gamma} + \frac{dz}{d\beta} \cdot \frac{dw}{d\gamma}$$

$$- \frac{du}{d\beta} \cdot \frac{dx}{d\gamma} - \frac{dv}{d\beta} \cdot \frac{dy}{d\gamma} - \frac{dw}{d\beta} \cdot \frac{dz}{d\gamma}$$

и т. д.

Поступая далѣе такимъ же образомъ, составимъ всѣхъ шесть уравненій вида (8) и (10) и будемъ тогда имѣть шесть линейныхъ уравненій для опредѣленія шести неизвѣстныхъ измѣненій $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$.... $d\zeta$. Коэффиціенты при этихъ неизвѣстныхъ имѣютъ то примѣчательное свойство, что не содержатъ явно времени t. Показать это легко.

Производныя $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{dv}{d\alpha}$, $\frac{dx}{d\beta}$, $\frac{dv}{d\beta}$ и т. д., изъ которыхъ состоятъ выраженія (α, β), (α, γ) и т. д., должно разсматривать какъ функціи элементовъ и времени. Что будемъ говорить объ одномъ изъ символовъ (α, β), (α, γ) и т. д., то будетъ примѣнимо и къ другимъ. Поэтому остановимся напр. на символѣ (α, β). Дифференцируя его выраженіе относительно времени, получимъ

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = \frac{d^2x}{d\alpha . dt} \cdot \frac{du}{d\beta} + \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d^2u}{d\beta . dt} + \frac{d^2y}{d\alpha . dt} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{d^2v}{d\beta . dt} + \dots\dots$$

$$- \frac{d^2u}{d\alpha . dt} \cdot \frac{dx}{d\beta} - \frac{du}{d\alpha} \cdot \frac{d^2x}{d\beta . dt} - \frac{d^2v}{d\alpha . dt} \cdot \frac{dy}{d\beta} - \frac{dv}{d\alpha} \cdot \frac{d^2y}{d\beta . dt} - \dots\dots$$

но

$$\frac{du}{d\beta} = \frac{d^2x}{d\beta . dt}; \quad \frac{du}{d\alpha} = \frac{d^2x}{d\alpha . dt}; \quad \frac{dv}{d\beta} = \frac{d^2y}{d\beta . dt} \text{ и т. д.}$$

вноси это въ предыдущее выраженіе, по сокращеніи получимъ

$$\frac{d(\alpha,\beta)}{dt}=\frac{dx}{d\alpha}\cdot\frac{d^2u}{d\beta.dt}+\frac{dy}{d\alpha}\cdot\frac{d^2v}{d\beta.dt}+\frac{dz}{d\alpha}\cdot\frac{d^2w}{d\beta.dt}$$
$$-\frac{d^2u}{d\alpha.dt}\cdot\frac{dx}{d\beta}-\frac{d^2v}{d\alpha.dt}\cdot\frac{dy}{d\beta}-\frac{d^2w}{d\alpha.dt}\cdot\frac{dz}{d\beta} \qquad (11)$$

Такъ какъ $r^2=x^2+y^2+z^2$, то $\frac{dr}{dx}=\frac{x}{r}$, а слѣдовательно

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}=-\frac{\left(\frac{dr}{dx}\right)}{r^2}=-\frac{x}{r^3}$$

Посредствомъ этого дифференціальныя уравненія (9), ч. 4 могутъ быть представлены въ видѣ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=k^2.\mu_0\left[\frac{dR}{dx}+\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=k^2.\mu_0\left[\frac{dR}{dy}+\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy}\right]$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=k^2.\mu_0\left[\frac{dR}{dz}+\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz}\right]$$

пусть

$$W=k^2.\mu_0\left[R+\frac{1}{r}\right]$$

тогда дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія представятся въ видѣ

$$\frac{du}{dt}=\frac{dW}{dx};\qquad \frac{dv}{dt}=\frac{dW}{dy};\qquad \frac{dw}{dt}=\frac{dW}{dz}$$

Понятно, что функція W не содержитъ перемѣнныхъ u, v, w, а потому дифференцируя предыдущія уравненія относительно α и β, находимъ

$$\frac{d^2u}{d\alpha.dt}=\frac{d^2W}{dx^2}\cdot\frac{dx}{d\alpha}+\frac{d^2W}{dx.dy}\cdot\frac{dy}{d\alpha}+\frac{d^2W}{dx.dz}\cdot\frac{dz}{d\alpha}$$
$$\frac{d^2v}{d\alpha.dt}=\frac{d^2W}{dx.dy}\cdot\frac{dx}{d\alpha}+\frac{d^2W}{dy^2}\cdot\frac{dy}{d\alpha}+\frac{d^2W}{dy.dz}\cdot\frac{dz}{d\alpha}$$
$$\frac{d^2w}{d\alpha.dt}=\frac{d^2W}{dx.dz}\cdot\frac{dx}{d\alpha}+\frac{d^2W}{dz.dy}\cdot\frac{dy}{d\alpha}+\frac{d^2W}{dz^2}\cdot\frac{dz}{d\alpha}$$

и т. д.

Если вставимъ эти величины въ выраженіе (11), то легко увидимъ, что оно обратится въ нуль. И такъ

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = 0$$

а слѣдовательно символъ (α, β) не содержитъ явно времени t; подобнымъ же образомъ легко доказывается, что и другіе символы (α, γ), (β, γ) и т. д. не суть функціи времени.

2. Примѣнимъ эти общія соображенія къ опредѣленію измѣненій постоянныхъ въ интегралахъ (135), ч. 4. Прежде всего отдѣлимъ въ этихъ выраженіяхъ (135) величины содержащія время явно отъ функцій элементовъ, которыя должны быть считаемы функціями времени только въ возмущенномъ движеніи. Въ этихъ выраженіяхъ за функціи времени слѣдуетъ считать радіусъ векторъ r и истинную аномалію f. Такъ какъ аргументъ широты $u = \omega + f$, гдѣ подъ ω разумѣемъ разстояніе перигелія отъ узла, то полагая

$$\xi = r . \cos f; \qquad \eta = r . \sin f$$

представимъ выраженія (135), ч. 4 въ видѣ

$$(12) \qquad \begin{aligned} x &= A . \xi + A' . \eta \\ y &= B . \xi + B' . \eta \\ z &= C . \xi + C' . \eta \end{aligned}$$

гдѣ

$$(13) \qquad \begin{aligned} A &= \cos\omega . \cos\theta - \sin\omega . \sin\theta . \cos i \\ A' &= -\sin\omega . \cos\theta - \cos\omega . \sin\theta . \cos i \\ B &= \cos\omega . \sin\theta + \sin\omega . \cos\theta . \cos i \\ B' &= -\sin\omega . \sin\theta + \cos\omega . \cos\theta . \cos i \\ C &= \sin\omega . \sin i \\ C' &= \cos\omega . \sin i \end{aligned}$$

Такъ какъ u, v, w представляютъ собою производныя координатъ взятыя относительно времени входящаго явно, а въ выраженіяхъ (12) только ξ и η содержатъ явно эту перемѣнную величину, то въ нашемъ случаѣ

$$\begin{aligned} u &= A . \xi_1 + A' . \eta_1 \\ v &= B . \xi_1 + B' . \eta_1 \\ w &= C . \xi_1 + C' . \eta_1 \end{aligned}$$

гдѣ для краткости положено

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi_1; \qquad \frac{d\eta}{dt} = \eta_1$$

Коэффиціенты A, B, C, A', B', C' зависятъ только отъ трехъ элементовъ ω, θ и i; производныя же ξ_1 и η_1 содержатъ въ себѣ три остальные элемента, т. е. a, e и l, кромѣ того въ нихъ входитъ время t. Подъ l мы разумѣемъ здѣсь среднюю аномалію эпохи.

Мы видѣли, что коэффиціенты линейнаго уравненія (8) и ему подобныхъ, служащихъ для опредѣленія измѣненій элементовъ, вообще имѣютъ видъ

$$(h,k)=\frac{dx}{dh}\cdot\frac{du}{dk}-\frac{dx}{dk}\cdot\frac{du}{dh}+\frac{dy}{dh}\cdot\frac{dv}{dk}-\frac{dy}{dk}\cdot\frac{dv}{dh}+\frac{dz}{dh}\cdot\frac{dw}{dk}-\frac{dz}{dk}\cdot\frac{dw}{dh}$$

гдѣ подъ h и k разумѣемъ два какіе угодно изъ элементовъ θ, ω, i, a, e, l. Всѣ коэффиціенты сейчасъ упомянутыхъ уравненій могутъ быть раздѣлены на три группы: къ одной будутъ относиться символы составленные изъ элементовъ θ, ω, i; къ другой— составленные изъ элементовъ a, e, l и наконецъ къ третей—такіе символы, въ которыхъ одинъ изъ элементовъ θ, ω, i комбинируется съ однимъ изъ элементовъ a, e, l. Такъ какъ элементы θ, i, ω входятъ только въ функціи A, A', B, B', C, C', то понятно что по предыдущему общему выраженію коэффиціентовъ

$$\begin{aligned}(\theta,\omega)=&\left[\frac{dA}{d\theta}\cdot\xi+\frac{dA'}{d\theta}\cdot\eta\right]\left[\frac{dA}{d\omega}\cdot\xi_1+\frac{dA'}{d\omega}\cdot\eta_1\right]-\left[\frac{dA}{d\omega}\cdot\xi+\frac{dA'}{d\omega}\cdot\eta\right]\left[\frac{dA}{d\theta}\cdot\xi_1+\frac{dA'}{d\theta}\cdot\eta_1\right]\\&+\left[\frac{dB}{d\theta}\cdot\xi+\frac{dB'}{d\theta}\cdot\eta\right]\left[\frac{dB}{d\omega}\cdot\xi_1+\frac{dB'}{d\omega}\cdot\eta_1\right]-\left[\frac{dB}{d\omega}\cdot\xi+\frac{dB'}{d\omega}\cdot\eta\right]\left[\frac{dB}{d\theta}\cdot\xi_1+\frac{dB'}{d\theta}\cdot\eta_1\right]\\&+\left[\frac{dC}{d\theta}\cdot\xi+\frac{dC'}{d\theta}\cdot\eta\right]\left[\frac{dC}{d\omega}\cdot\xi_1+\frac{dC'}{d\omega}\cdot\eta_1\right]-\left[\frac{dC}{d\omega}\cdot\xi+\frac{dC'}{d\omega}\cdot\eta\right]\left[\frac{dC}{d\theta}\cdot\xi_1+\frac{dC'}{d\theta}\cdot\eta_1\right]\end{aligned}$$

легко понять что это приводится къ виду

$$(\theta,\omega)=\left[\frac{dA}{d\theta}\cdot\frac{dA'}{d\omega}+\frac{dB}{d\theta}\cdot\frac{dB'}{d\omega}+\frac{dC}{d\theta}\cdot\frac{dC'}{d\omega}-\frac{dA}{d\omega}\cdot\frac{dA'}{d\theta}-\frac{dB}{d\omega}\cdot\frac{dB'}{d\theta}-\frac{dC}{d\omega}\cdot\frac{dC'}{d\theta}\right](\eta_1\xi-\xi_1\eta)$$

Подобнымъ же образомъ составляемъ два другіе коэффиціента этой группы и находимъ

$$(\theta,i)=\left[\frac{dA}{d\theta}\cdot\frac{dA'}{di}+\frac{dB}{d\theta}\cdot\frac{dB'}{di}+\frac{dC}{d\theta}\cdot\frac{dC'}{di}-\frac{dA}{di}\cdot\frac{dA'}{d\theta}-\frac{dB}{di}\cdot\frac{dB'}{d\theta}-\frac{dC}{di}\cdot\frac{dC'}{d\theta}\right](\eta_1\xi-\xi_1\eta)$$

$$(\omega,i)=\left[\frac{dA}{d\omega}\cdot\frac{dA'}{di}+\frac{dB}{d\omega}\cdot\frac{dB'}{di}+\frac{dC}{d\omega}\cdot\frac{dC'}{di}-\frac{dA}{di}\cdot\frac{dA'}{d\omega}-\frac{dB}{di}\cdot\frac{dB'}{d\omega}-\frac{dC}{di}\cdot\frac{dC'}{d\omega}\right](\eta_1\xi-\xi_1\eta)$$

По выраженіямъ (13) легко находимъ

$$\begin{aligned}&\frac{dA}{d\theta}=-B; &&\frac{dB}{d\theta}=A; &&\frac{dC}{d\theta}=0\\&\frac{dA'}{d\theta}=-B'; &&\frac{dB'}{d\theta}=A'; &&\frac{dC'}{d\theta}=0\\&\frac{dA}{d\omega}=A'; &&\frac{dB}{d\omega}=B'; &&\frac{dC}{d\omega}=C'\\&\frac{dA'}{d\omega}=-A; &&\frac{dB'}{d\omega}=-B; &&\frac{dC'}{d\omega}=-C\\&\frac{dA}{di}=C.\sin\theta; &&\frac{dB}{di}=-C.\cos\theta; &&\frac{dC}{di}=\sin\omega.\cos i\\&\frac{dA'}{di}=C'.\sin\theta; &&\frac{dB'}{di}=-C'.\cos\theta; &&\frac{dC'}{di}=\cos\omega.\cos i\end{aligned}\tag{14}$$

Легко видѣть, что посредствомъ этихъ выраженій предыдущіе символы приводятся къ виду

$(\theta, \omega) = 0$

$(\theta, i) = [(B'C - BC')\sin\theta + (A'C - C'A)\cos\theta](\eta_1\xi - \xi_1\eta)$

$(\omega, i) = [C'(A'.\sin\theta - B'.\cos\theta + \cos i.\cos\omega) + C(A.\sin\theta - B.\cos\theta + \cos i \sin\omega)](\eta_1\xi - \xi_1\eta)$

Кромѣ того по выраженіямъ (13) легко составляемъ

$$B'C - BC' = -\sin i . \sin\theta$$

$$A'C - AC' = -\sin i . \cos\theta$$

$$A'. \sin\theta - B'. \cos\theta = -\cos i . \cos\omega$$

$$A . \sin\theta - B . \cos\theta = -\cos i . \sin\omega$$

Слѣдовательно

$$(\theta, \omega) = 0; \qquad (\theta, i) = -[\eta_1\xi - \xi_1\eta]\sin i; \qquad (\omega, i) = 0$$

Остается опредѣлить разность $\eta_1\xi - \xi_1\eta$. Мы приняли $\xi = r . \cos f$; $\eta = r . \sin f$, слѣдовательно по выраженіямъ (30), ч. 4

$$\xi = a . \cos u - ae; \qquad \eta = a\sqrt{1 - e^2} . \sin u$$

гдѣ

$$u - e . \sin u = nt + l$$

Такимъ образомъ въ выраженіяхъ ξ и η время входитъ въ зависимости отъ эксцентрической аномаліи u. Мы знаемъ, что символы не суть функціи времени, а такъ какъ мы опредѣляемъ разность $\eta_1\xi - \xi_1\eta$ для того чтобы внести ее потомъ въ выраженіе символа, то мы можемъ опредѣлить величину этой разности для какаго угодно частнаго значенія u. Опредѣлимъ ее для такаго значенія времени t, которому соотвѣтствуетъ $u = 0$. Изъ предыдущаго имѣемъ

$$\xi_1 = -a . \sin u \frac{du}{dt}; \qquad \eta_1 = a\sqrt{1 - e^2} . \cos u \frac{du}{dt}$$

но

$$\frac{du}{dt} = \frac{n}{1 - e . \cos u}$$

слѣдовательно

$$\xi_1 = -\frac{an . \sin u}{1 - e . \cos u}; \qquad \eta_1 = \frac{an . \sqrt{1 - e^2} . \cos u}{1 - e . \cos u}$$

поэтому для $u = 0$

$$\xi = a(1 - e); \qquad \eta = 0; \qquad \xi_1 = 0; \qquad \eta_1 = \frac{an . \sqrt{1 - e^2}}{1 - e}$$

а слѣдовательно для того же частнаго значенія u имѣемъ

$$\eta_1\xi - \xi_1\eta = a^2 n . \sqrt{1 - e^2}$$

Такимъ образомъ символы первой группы суть:

$$(\theta, \omega) = 0\,; \qquad (\theta, i) = -a^2 n \,.\, \sqrt{1 - e^2}\,.\sin i\,; \qquad (\omega, i) = 0$$

Если подъ h будемъ разумѣть какой либо изъ элементовъ группы θ, i, ω, а подъ k одинъ изъ элементовъ a, e, l, то понятно, что

$$\frac{dx}{dh} = \frac{dA}{dh}\cdot\xi + \frac{dA'}{dh}\cdot\eta\,; \qquad \frac{dx}{dk} = A\,\frac{d\xi}{dk} + A'\,\frac{d\eta}{dk}$$

$$\frac{dy}{dh} = \frac{dB}{dh}\cdot\xi + \frac{dB'}{dh}\cdot\eta\,; \qquad \frac{dy}{dk} = B\,\frac{d\xi}{dk} + B'\,\frac{d\eta}{dk}$$

$$\frac{dz}{dh} = \frac{dC}{dh}\cdot\xi + \frac{dC'}{dh}\cdot\eta\,; \qquad \frac{dz}{dk} = C\,\frac{d\xi}{dk} + C'\,\frac{d\eta}{dk}$$

$$\frac{du}{dh} = \frac{dA}{dh}\cdot\xi_1 + \frac{dA'}{dh}\cdot\eta_1\,; \qquad \frac{du}{dk} = A\,\frac{d\xi_1}{dk} + A'\,\frac{d\eta_1}{dk}$$

и т. д.

Такимъ образомъ, давая величинамъ h и k такое значеніе какъ сейчасъ сказали, составляемъ символы третей группы по формѣ

$$\begin{aligned}(h, k) = &\left[\frac{dA}{dh}\,\xi + \frac{dA'}{dh}\cdot\eta\right]\left[A\,\frac{d\xi_1}{dk} + A'\,\frac{d\eta_1}{dk}\right] - \left[A\,\frac{d\xi}{dk} + A'\,\frac{d\eta}{dk}\right]\left[\frac{dA}{dh}\,\xi_1 + \frac{dA'}{dh}\cdot\eta_1\right]\\ &+\left[\frac{dB}{dh}\,\xi + \frac{dB'}{dh}\cdot\eta\right]\left[B\,\frac{d\xi_1}{dk} + B'\,\frac{d\eta_1}{dk}\right] - \left[B\,\frac{d\xi}{dk} + B'\,\frac{d\eta}{dk}\right]\left[\frac{dB}{dh}\,\xi_1 + \frac{dB'}{dh}\cdot\eta_1\right]\\ &+\left[\frac{dC}{dh}\,\xi + \frac{dC'}{dh}\cdot\eta\right]\left[C\,\frac{d\xi_1}{dk} + C'\,\frac{d\eta_1}{dk}\right] - \left[C\,\frac{d\xi}{dk} + C'\,\frac{d\eta}{dk}\right]\left[\frac{dC}{dh}\,\xi_1 + \frac{dC'}{dh}\cdot\eta_1\right]\end{aligned}$$

но такъ какъ изъ выраженій (12) видно, что

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1\,; \qquad A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1 \qquad (15)$$
$$AA' + BB' + CC' = 0$$

то

$$A\cdot\frac{dA'}{dh} + B\cdot\frac{dB'}{dh} + C\cdot\frac{dC'}{dh} = -\left[A'\cdot\frac{dA}{dh} + B'\cdot\frac{dB}{dh} + C'\cdot\frac{dC}{dh}\right]$$

$$A\cdot\frac{dA}{dh} + B\cdot\frac{dB}{dh} + C\cdot\frac{dC}{dh} = 0\,; \qquad A'\cdot\frac{dA'}{dh} + B'\cdot\frac{dB'}{dh} + C'\cdot\frac{dC'}{dh} = 0$$

При помощи этихъ выраженій общая форма символовъ третей группы легко приводится къ виду

$$(h, k) = \left[A'\cdot\frac{dA}{dh} + B'\cdot\frac{dB}{dh} + C'\cdot\frac{dC}{dh}\right]\left[\xi\,\frac{d\eta_1}{dk} - \eta\cdot\frac{d\xi_1}{dk} + \eta_1\cdot\frac{d\xi}{dk} - \xi_1\cdot\frac{d\eta}{dk}\right]$$

или къ виду

$$(h, k) = \left[A'\cdot\frac{dA}{dh} + B'\,\frac{dB}{dh} + C'\cdot\frac{dC}{dh}\right]\frac{d(\xi.\eta_1 - \eta.\xi_1)}{dk}$$

Такъ какъ для $u = 0$ имѣемъ $\eta = 0$ и $\xi_1 = 0$, то

$$(h, k) = \left[A' \cdot \frac{dA}{dh} + B' \cdot \frac{dB}{dh} + C' \cdot \frac{dC}{dh}\right] \frac{d(\xi.\eta_1)}{dk}$$

Подъ h мы разумѣемъ здѣсь каждый изъ элементовъ θ, ω и i, но по выраженіямъ (13) и (14) легко составляемъ

$$A' \cdot \frac{dA}{d\theta} + B' \cdot \frac{dB}{d\theta} + C' \cdot \frac{dC}{d\theta} = -A'B + B'A = \cos i$$

$$A' \cdot \frac{dA}{d\omega} + B' \cdot \frac{dB}{d\omega} + C' \cdot \frac{dC}{d\omega} = \quad A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1$$

$$A' \cdot \frac{dA}{di} + B' \cdot \frac{dB}{di} + C' \cdot \frac{dC}{di} = \quad C\left[A'.\sin\theta - B'.\cos\theta\right] + C'.\sin\omega.\cos i = 0$$

Слѣдовательно символы третой группы приводятся къ

$$(\theta, k) = \frac{d(\xi.\eta_1)}{dk} \cdot \cos i\,; \qquad (\omega, k) = \frac{d(\xi.\eta_1)}{dk}\,; \qquad (i, k) = 0$$

гдѣ подъ k разумѣемъ каждый изъ элементовъ a, e, l. Такъ какъ

$$\xi = a(\cos u - e)\,; \qquad \eta_1 = \frac{an\sqrt{1-e^2}.\cos u}{1 - e.\cos u}$$

то

$$\xi.\eta_1 = \frac{a^2 n\sqrt{1-e^2}.\cos u\,(\cos u - e)}{1 - e.\cos u}$$

Для составленія разсматриваемыхъ символовъ намъ предстоитъ взять отъ этой функціи производныя по e, a и l. Такъ какъ мы условились при составленіи символовъ принимать $u = 0$, то слѣдовало бы сначала брать отъ предыдущаго выраженія производныя по e, a и l, а потомъ положить $u = 0$, но мы можемъ поступить и обратно, т. е. можемъ сначала въ предыдущемъ выраженіи $\xi\eta_1$ принять $u = 0$, а потомъ дифференцировать полученное относительно e, a и l. Въ самомъ дѣлѣ дифференціалъ выраженія $\xi.\eta_1$ относительно u какъ функція отъ e имѣетъ множителемъ $\sin u$, что при $u = 0$ обращается въ нуль. Слѣдовательно всѣ члены вида $\frac{d(\xi.\eta_1)}{du} \cdot \frac{du}{de}$ исчезнутъ и останутся только тѣ, которые происходятъ отъ измѣненія e входящаго явно, и въ нихъ потомъ надо принять $u = 0$. И такъ принимая $u = 0$ приводимъ разсматриваемую функцію къ виду $\xi.\eta_1 = na^2\sqrt{1-e^2}$, откуда

$$\frac{d(\xi.\eta_1)}{de} = -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}\,; \qquad \frac{d(\xi.\eta_1)}{da} = \sqrt{1-e^2}\,\frac{d\,(na^2)}{da}$$

но

$$n = \sqrt{\frac{k^2.\mu_0}{a^3}}$$

поэтому

$$\frac{d\,(na^2)}{da}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2.\mu_0}{a}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{k^2.\mu_0}{a^3}}=\frac{na}{2}$$

$$\frac{d\,(\xi.\eta_1)}{da}=\frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}$$

Наконецъ

$$\frac{d\,(\xi.\eta_1)}{dl}=\frac{d\,(\xi.\eta_1)}{du}\cdot\frac{du}{dl}$$

Но мы уже замѣтили, что $\frac{d\,(\xi.\eta_1)}{du}$ при $u=0$ обращается въ нуль, поэтому

$$\frac{d\,(\xi.\eta_1)}{dl}=0$$

И такъ

$$(\theta,e)=-\frac{na^2.c.\cos i}{\sqrt{1-e^2}};\qquad(\theta,a)=\frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}.\cos i;\qquad(\theta,l)=0$$

$$(\omega,e)=-\frac{na^2.e}{\sqrt{1-e^2}};\qquad(\omega,a)=\frac{na}{2}\sqrt{1-e^2};\qquad(\omega,l)=0$$

$$(i,e)=0;\qquad(i,a)=0;\qquad(i,l)=0$$

Остается составить символы, зависящіе только отъ элементовъ a, e и l. Понятно, что если подъ h и k будемъ разумѣть два какіе либо изъ этихъ элементовъ, то составимъ

$$\begin{aligned}(h,k)=&\left[A\frac{d\xi}{dh}+A'\frac{d\eta}{dh}\right]\left[A\frac{d\xi_1}{dk}+A'\frac{d\eta_1}{dk}\right]-\left[A\frac{d\xi}{dk}+A'\frac{d\eta}{dk}\right]\left[A\frac{d\xi_1}{dh}+A'\frac{d\eta_1}{dh}\right]\\&+\left[B\frac{d\xi}{dh}+B'\frac{d\eta}{dh}\right]\left[B\frac{d\xi_1}{dk}+B'\frac{d\eta_1}{dk}\right]-\left[B\frac{d\xi}{dk}+B'\frac{d\eta}{dk}\right]\left[B\frac{d\xi_1}{dh}+B'\frac{d\eta_1}{dh}\right]\\&+\left[C\frac{d\xi}{dh}+C'\frac{d\eta}{dh}\right]\left[C\frac{d\xi_1}{dk}+C'\frac{d\eta_1}{dk}\right]-\left[C\frac{d\xi}{dk}+C'\frac{d\eta}{dk}\right]\left[C\frac{d\xi_1}{dh}+C'\frac{d\eta_1}{dh}\right]\end{aligned}$$

что по уравненіямъ (15) приводится къ виду

$$(h,k)=\frac{d\xi}{dh}\cdot\frac{d\xi_1}{dk}+\frac{d\eta}{dh}\cdot\frac{d\eta_1}{dk}-\frac{d\xi}{dk}\cdot\frac{d\xi_1}{dh}-\frac{d\eta}{dk}\cdot\frac{d\eta_1}{dh}\qquad(16)$$

входящія сюда производныя должны быть взяты по e, a и l. Для составленія производныхъ по e можно на основаніи сдѣланнаго выше замѣчанія въ выраженіяхъ ξ, η, ξ_1, η_1 положить $u=0$ и потомъ выполнить дифференцированія. Такъ какъ при $u=0$ имѣемъ

$$\xi=a\,(1-e);\qquad\eta=0;\qquad\xi_1=0;\qquad\eta_1=na\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

то

$$\frac{d\xi}{de} = -a; \qquad \frac{d\eta}{de} = 0; \qquad \frac{d\xi_1}{de} = 0; \qquad \frac{d\tau_1}{de} = \frac{na}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}$$

Слѣдовательно

$$(17) \qquad (e, k) = -a\frac{d\xi_1}{dk} - \frac{na}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}\frac{d\tau}{dk}$$

Для составленія по этому выраженію символовъ (e, a) и (e, l) надо послѣдовательно принять въ немъ $k=a$ и $k=l$. Такимъ образомъ предстоитъ опредѣлить производныя

$$\frac{d\xi_1}{da}; \qquad \frac{d\tau}{da}; \qquad \frac{d\xi_1}{dl}; \qquad \frac{d\eta}{dl}$$

Полныя выраженія ξ_1 и η суть

$$\xi_1 = -\frac{an.\sin u}{1-e.\cos u}; \qquad \eta = a\sqrt{1-e^2}.\sin u$$

откуда

$$\frac{d\xi_1}{da} = -\frac{an.\cos u\dfrac{du}{da} + n.\sin u}{1-e.\cos u} + \frac{ane.\sin^2 u}{(1-e.\cos u)^2}\frac{du}{da}$$

$$\frac{d\eta}{da} = \sqrt{1-e^2}\left[\sin u + a.\cos u\frac{du}{da}\right]$$

$$\frac{d\xi_1}{dl} = -\left[\frac{an.\cos u}{1-e.\cos u} - \frac{ane.\sin^2 u}{(1-e.\cos u)^2}\right]\frac{du}{dl}$$

$$\frac{d\eta'}{dl} = a\sqrt{1-e^2}.\cos u\frac{du}{dl}$$

что при $u=0$ приводится къ

$$\frac{d\xi_1}{da} = -\frac{an}{1-e}\cdot\frac{da}{da}; \qquad \frac{d\eta}{da} = a\sqrt{1-e^2}\frac{du}{da}$$

$$\frac{d\xi_1}{dl} = -\frac{an}{1-e}\cdot\frac{du}{dl}; \qquad \frac{d\eta}{dl} = a\sqrt{1-e^2}\frac{du}{dl}$$

Слѣдовательно по выраженіе (17) легко составляемъ

$$(e, a) = 0; \qquad (e, l) = 0$$

Остается составить символъ (a, l). Для этого въ выраженіи (16) положимъ $h=a$, $k=l$, тогда

$$(a, l) = \frac{d\xi}{da}\cdot\frac{d\xi_1}{dl} + \frac{d\eta}{da}\cdot\frac{d\eta_1}{dl} - \frac{d\xi}{dl}\cdot\frac{d\xi_1}{da} - \frac{d\eta}{dl}\cdot\frac{d\eta_1}{da}$$

но

$$\frac{d\xi}{dl} = -a.\sin u \frac{du}{dl}$$

$$\frac{d\eta_1}{dl} = -\frac{an\sqrt{1-e^2}}{1-e.\cos u}\left[\sin u + \frac{e.\sin u.\cos u}{1-e.\cos u}\right]\frac{du}{dl}$$

что при $u=0$ обращается въ

$$\frac{d\xi}{dl} = 0; \qquad \frac{d\eta_1}{dl} = 0$$

а потому предыдущее выраженіе символа (a, l) приводится къ виду

$$(a, l) = -\frac{an}{1-e}\cdot\frac{du}{dl}\cdot\frac{d\xi}{da} - a\sqrt{1-e^2}\frac{du}{dl}\cdot\frac{d\eta_1}{da}$$

но

$$\frac{d\xi}{da} = -a.\sin u\frac{du}{da} + \cos u - e$$

$$\frac{d\eta_1}{da} = \frac{\sqrt{1-e^2}.\cos u}{1-e.\cos u}\cdot\frac{d(an)}{da} - \frac{an\sqrt{1-e^2}.\sin u}{1-e.\cos u}\left[1-\frac{e.\cos u}{1-e.\cos u}\right]\frac{du}{da}$$

что при $u=0$ обращаются въ

$$\frac{d\xi}{da} = 1-e; \qquad \frac{d\eta_1}{da} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\frac{d(an)}{da}$$

но такъ какъ $n=\sqrt{\frac{k^2.\mu_0}{a^3}}$, то

$$\frac{d(an)}{da} = -\sqrt{k^2.\mu_0}\,\frac{a^{-\frac{3}{2}}}{2} = -\frac{n}{2}$$

поэтому

$$\frac{d\eta_1}{da} = -\frac{n}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

слѣдовательно

$$(a, l) = -na\frac{du}{dl} + \frac{na}{2}(1+e)\frac{du}{dl}$$

или

$$(a, l) = -\frac{na}{2}(1-e)\frac{du}{dl}$$

но такъ какъ

$$u - e.\sin u = nt + l$$

то

$$\frac{du}{dl} = \frac{1}{1-e.\cos u}$$

что при $u = 0$ обращается въ

$$\frac{du}{dl} = \frac{1}{1-e}$$

слѣдовательно

$$(a, l) = -\frac{na}{2}$$

И такъ коэффиціенты линейныхъ уравненій, служащихъ для опредѣленія измѣненій элементовъ, имѣютъ видъ

$$\begin{array}{lll}
(\theta, \omega) = 0; & (\theta, i) = -na^2\sqrt{1-e^2}.\sin i; & (\omega, i) = 0 \\
(\theta, a) = \frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}.\cos i; & (\theta, e) = -\frac{na^2.e}{\sqrt{1-e^2}}\cos i; & (\theta, l) = 0 \\
(\omega, a) = \frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}; & (\omega, e) = -\frac{na^2.e}{\sqrt{1-e^2}}; & (\omega, l) = 0 \\
(i, a) = 0; & (i, e) = 0; & (i, l) = 0 \\
(e, a) = 0 & (e, l) = 0; & (a, l) = -\frac{na}{2}
\end{array}$$

а слѣдовательно принимая въ общемъ уравненіи (8) и ему подобныхъ

$$\alpha = \theta, \quad \beta = \omega, \quad \gamma = i, \quad \delta = e, \quad \varepsilon = a, \quad \zeta = l$$

составимъ слѣдующія линейныя уравненія, служащія для опредѣленія измѣненій шести элементовъ

$$k^2\mu_0\frac{dR}{d\theta}\cdot dt = -a^2n\sqrt{1-e^2}.\sin i.di - \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}}\cos i.de + \frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}.\cos i.da$$

$$k^2\mu_0\frac{dR}{d\omega}\cdot dt = -\frac{a^2ne}{\sqrt{1-e^2}}de + \frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}.da$$

$$k^2\mu_0\frac{dR}{di}\cdot dt = na^2\sqrt{1-e^2}.\sin i.d\theta$$

$$k^2\mu_0\frac{dR}{de}\cdot dt = \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}}\cos i.d\theta + \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}}d\omega$$

$$k^2\mu_0\frac{dR}{da}\cdot dt = -\frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}.\cos i.d\theta - \frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}.d\omega - \frac{na}{2}dl$$

$$k^2\mu_0\frac{dR}{dl}\cdot dt = \frac{na}{2}da$$

Опредѣлимъ изъ этихъ уравненій измѣненія постоянныхъ. Помножимъ второе уравненіе на $\cos i$ и вычтемъ его изъ перваго, тогда получимъ

$$k^2\mu_0\left[\frac{dR}{d\omega}\cdot\cos i - \frac{dR}{d\theta}\right] = a^2n\sqrt{1-e^2}.\sin i\frac{di}{dt}$$

Такъ какъ $k^2\mu_0 = n^2 . a^3$, то

$$\frac{di}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{cotg} i \frac{dR}{d\omega} - \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{cosec} i \frac{dR}{d\theta} \tag{18}$$

Третье уравненіе прямо дастъ

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{an}{\sin i \sqrt{1-e^2}} \frac{dR}{di} \tag{19}$$

Четвертое изъ начальныхъ уравненій помножимъ па $\frac{1-e^2}{2}$, а пятое на ae и сложимъ произведенія, тогда найдемъ

$$k^2\mu_0 \left[\frac{1-e^2}{2} \frac{dR}{de} + ae \frac{dR}{da}\right] = -\frac{na^2 . e}{2} \frac{dl}{dt}$$

или

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{na}{2}(1-e^2)\frac{dR}{de} - 2a^2 \frac{dR}{da}$$

Шестое изъ начальныхъ уравненій приводится къ

$$\frac{da}{dt} = 2na^2 \frac{dR}{dl} \tag{20}$$

Внося это во второе изъ начальныхъ уравненій, легко находимъ

$$\frac{de}{dt} = \frac{na}{e}(1-e^2)\frac{dR}{dl} - \frac{na}{e}\sqrt{1-e^2}\frac{dR}{d\omega} \tag{21}$$

Наконецъ подставляя найденную величину производной $\frac{d\theta}{dt}$ въ четвертое изъ начальныхъ уравненій, получимъ

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dR}{de} - \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{cotg} i \frac{dR}{di}$$

Мы разсматривали до сихъ поръ систему элементовъ θ, ω, i, a, e, l, гдѣ ω есть разстояніе перигелія отъ узла и l средняя аномалія эпохи. Нерѣдко однако вмѣсто этой системы принимается другая, именно θ, π, i, a, e, ε, гдѣ подъ π разумѣемъ долготу перигелія, подъ ε—среднюю долготу эпохи. Но если имѣемъ формы для вычисленія измѣненій первой системы элементовъ, то легко найти соотвѣтствующія формы для второй системы. Для этого замѣтимъ, что $\pi = \omega + \theta$, $l = \varepsilon - \pi$ и если $nt + l$ есть средняя аномалія свѣтила, соотвѣтствующая времени t, то $nt + \varepsilon - \pi$ представитъ собою среднюю долготу свѣтила для того же момента t.

Такимъ образомъ

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dl}{dt} + \frac{d\pi}{dt} \tag{22}$$

а потому, если знаемъ формы производныхъ $\frac{d\omega}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{dl}{dt}$, то легко составимъ формы для $\frac{d\pi}{dt}$ и $\frac{d\varepsilon}{dt}$.

Внося въ первое изъ предыдущихъ выраженій вмѣсто $\frac{d\omega}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ ихъ выше найденныя выраженія, легко получимъ

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tang} \frac{i}{2} \frac{dR}{di} + \frac{an}{e}\sqrt{1-e^2} \frac{dR}{de} \tag{23}$$

Имѣя это, легко даемъ второму изъ выраженій (22) видъ

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{an}{e}\sqrt{1-e^2}\left[1-\sqrt{1-e^2}\right]\frac{dR}{de} + \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tang} \frac{i}{2} \frac{dR}{di} - 2a^2 n \frac{dR}{da} \tag{24}$$

Въ выраженія производныхъ $\frac{di}{dt}, \frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}$ входятъ производныя пертурбаціонной функціи взятыя по элементамъ ω и l, но эти послѣдніе замѣнены нами чрезъ π и ε, поэтому вмѣсто производныхъ $\frac{dR}{d\omega}, \frac{dR}{dl}$ должны быть введены теперь другіе коеффиціенты. Это можетъ быть выполнено на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Мы можемъ разсматривать пертурбаціонную функцію или какъ функцію элементовъ θ, ω, i, a, e, l, или какъ функцію θ, π, i, a, e, ε. Поэтому

$$\frac{dR}{d\theta}\cdot d\theta + \frac{dR}{d\omega}\cdot d\omega + \frac{dR}{di}\cdot di + \frac{dR}{da}\cdot da + \frac{dR}{de}\cdot de + \frac{dR}{dl}\cdot dl =$$
$$\left(\frac{dR}{d\theta}\right)\cdot d\theta + \left(\frac{dR}{d\pi}\right)\cdot d\pi + \left(\frac{dR}{di}\right)\cdot di + \left(\frac{dR}{da}\right)\cdot da + \left(\frac{dR}{de}\right)\cdot de + \left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)\cdot d\varepsilon$$

Для отличія мы заключаемъ въ скобки производныя взятыя по элементамъ второй системы. Мы знаемъ, что $d\omega = d\pi - d\theta$, $dl = d\varepsilon - d\pi$. Внося это въ предыдущее тождественное выраженіе и сравнивая коеффиціенты при одинакихъ дифференціалахъ, найдемъ

$$\frac{dR}{d\theta} - \frac{dR}{d\omega} = \left(\frac{dR}{d\theta}\right); \qquad \frac{dR}{d\omega} - \frac{dR}{dl} = \left(\frac{dR}{d\pi}\right)$$
$$\frac{dR}{dl} = \left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right); \qquad \frac{dR}{da} = \left(\frac{dR}{da}\right); \qquad \frac{dR}{di} = \left(\frac{dR}{di}\right); \qquad \frac{dR}{de} = \left(\frac{dR}{de}\right)$$

откуда

$$\frac{dR}{d\theta} = \left(\frac{dR}{d\theta}\right) + \frac{dR}{d\omega}$$
$$\frac{dR}{d\omega} = \left(\frac{dR}{d\theta}\right) + \frac{dR}{dl} = \left(\frac{dR}{d\pi}\right) + \left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$$

Слѣдовательно

$$\frac{dR}{d\theta} = \left(\frac{dR}{d\theta}\right) + \left(\frac{dR}{d\pi}\right) + \left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$$

Внося найденныя теперь величины производныхъ $\frac{dR}{dl}$, $\frac{dR}{d\omega}$, $\frac{dR}{d\theta}$ въ выраженія (18), (20), (21) и присоединяя къ полученнымъ результатамъ совокупность уравненій (19), (23), (24), имѣемъ

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 2a^2n\frac{dR}{d\varepsilon}\\
\frac{de}{dt} &= \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\left[\sqrt{1-e^2}-1\right]\frac{dR}{d\varepsilon}-\frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dR}{d\pi}\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -2a^2n\frac{dR}{da}-\frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\left[\sqrt{1-e^2}-1\right]\frac{dR}{de}+\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{tang}\frac{i}{2}\cdot\frac{dR}{di}\\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dR}{de}+\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{tang}\frac{i}{2}\cdot\frac{dR}{di}\\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{\sin i}\cdot\frac{dR}{di}\\
\frac{di}{dt} &= -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{\sin i}\frac{dR}{d\theta}-\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{tang}\frac{i}{2}\left[\frac{dR}{d\varepsilon}+\frac{dR}{d\pi}\right]
\end{aligned}\qquad(25)$$

Такимъ образомъ рѣшеніе вопроса о возмущеніяхъ свѣтила m_0 приводится теперь къ интегрированію этихъ совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, тогда какъ первоначально рѣшеніе того же вопроса зависило отъ интегрированія уравненій (9), ч. 4 втораго порядка; поэтому мы заключаемъ, что примѣненіемъ способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ порядокъ интегрируемыхъ уравненій пониженъ.

II.

Общія понятія о вѣковыхъ и періодическихъ возмущеніяхъ. Общая форма разложенія пертурбаціонной функціи. Разложеніе пертурбаціонной функціи въ рядъ расположенный по степенямъ эксцентриситетовъ и наклоненій.

3. До сихъ поръ не найдено ни одного интеграла уравненій (25) и если хотимъ примѣнить эти уравненія къ рѣшенію вопроса о вычисленіи возмущеній, то должны будемъ выполнить интегрированіе посредствомъ рядовъ; но понятно, что этимъ путемъ мы не можемъ получить общаго рѣшенія вопроса, ибо ряды, представляющіе достаточную сходимость въ одномъ случаѣ, не имѣютъ этого свойства въ другихъ. Эксцентриситеты орбитъ большихъ планетъ не велики, незначительны также и наклоненія этихъ орбитъ къ эклиптикѣ, поэтому ряды, расположенные по степенямъ эксцентриситетовъ или наклоненій, быстро сходятся въ примѣненіи къ вычисленію возмущеній большихъ планетъ. Эти же ряды представляютъ неудовлетворительную сходимость для малыхъ планетъ, наконецъ въ примѣненіи къ вычисленію кометныхъ возмущеній разложенія по степенямъ эксцентриситетовъ и наклоненій становятся совершенно невозможными.

Принимая это во вниманіе, слѣдуетъ считать аналитическую теорію возмущеній мало разработанною, и тѣ пріемы, которые предлагаются въ настоящее время для рѣшенія на практикѣ вопроса о возмущеніяхъ, столь сложны, что изложеніе ихъ завлекло бы насъ въ утомительныя подробности, пользу которыхъ едвали можно убѣдительно доказать. Эти соображенія заставляютъ насъ ограничиться доказательствомъ нѣкоторыхъ общихъ теоремъ небесной механики.

Геліоцентрическія координаты свѣтила, какъ мы видѣли, суть функціи элементовъ и времени; это послѣднее входитъ въ выраженія координатъ въ формѣ $nt+\varepsilon$, гдѣ подъ ε разумѣемъ среднюю долготу эпохи. Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что координаты вообще суть функціи элементовъ и средней долготы l, ибо $l=nt+\varepsilon$. Если средняя долгота l измѣняется на 2π, то свѣтило возвращается къ тому положенію, которое оно имѣло при средней долготѣ l и координаты x, y, z, соотвѣтствующіе средней долготѣ $l+2\pi$, будутъ тѣ же какъ и координаты соотвѣтствующія средней долготѣ l. Если это заключеніе справедливо для координатъ возмущеннаго свѣтила m_0, то оно вѣрно также и для координатъ возмущающаго свѣтила m_1.

Пертурбаціонная функція, какъ мы знаемъ, имѣетъ видъ

$$R = \frac{m_1}{\mu_0}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right]$$

и есть слѣдовательно функція координатъ x, y, z, x', y', z'. Если координаты суть періодическія функціи имѣющія періодъ 2π, то и функція R имѣетъ тоже свойство, она также есть періодическая функція съ періодомъ 2π. Легко показать, что такая функція разлагается въ рядъ по синусамъ и косинусамъ дугъ кратныхъ отъ l и l'.

Если нѣкоторая функція $\varphi(\zeta)$ есть періодическая съ періодомъ 2π, то $\varphi(\zeta + 2\pi) = \varphi(\zeta)$. Положимъ, что

$$\varphi(\zeta) = A.e^{\alpha\zeta} \tag{26}$$

гдѣ A и α должны быть опредѣлены подъ тѣмъ условіемъ, чтобы удовлетворялось предыдущее уравненіе представляющее собою свойство періодической функціи. Слѣдовательно также

$$\varphi(\zeta) = A.e^{\alpha(\zeta + 2\pi)}$$

Сравнивая эти два выраженія, заключаемъ, что постоянное α должно удовлетворять уравненію

$$1 = e^{2\pi\alpha}$$

корни этого уравненія суть

$$\alpha = \pm k\sqrt{-1}$$

гдѣ подъ k разумѣемъ всѣ цѣлыя положительныя числа, не исключая нуля. И такъ уравненіе (26) можетъ быть представлено въ видѣ

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k e^{k\zeta\sqrt{-1}}$$

или

$$\varphi(\zeta) = A_0 + \sum_{k=+1}^{k=+\infty}\left[A_k e^{k\zeta\sqrt{-1}} + A_{-k} e^{-k\zeta\sqrt{-1}}\right]$$

$$= A_0 + \sum_{k=+1}^{k=+\infty}\left[(A_k + A_{-k})\cos k\zeta + \sqrt{-1}\,(A_k - A_{-k})\sin k\zeta\right]$$

Пусть для краткости

$$A_k + A_{-k} = B_k; \qquad (A_k - A_{-k})\sqrt{-1} = C_k$$

тогда

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{k=\infty}\left[B_k.\cos k\zeta + C_k.\sin k\zeta\right] \tag{27}$$

гдѣ слѣдовательно $B_0 = A_0$, ибо при $k = 0$ имѣемъ $\sin k\zeta = 0$. Выраженіемъ (27) подтверждается положеніе, высказанное нами въ началѣ.

урбаціонная функція зависитъ отъ координатъ возмущеннаго и возмущающаго зла, слѣдовательно можетъ быть разсматриваема какъ функція средней долготы возмущеннаго и прямолинейныхъ координатъ возмущающаго свѣтила. Такимъ образомъ можно принять $R = f(l, x', y', z')$. По общему выраженію (27) мы можемъ представить эту функцію въ видѣ

(28)
$$R = \sum_{k=0}^{k=\infty} [b_k . \cos kl + c_k . \sin kl]$$

гдѣ по теоремѣ Фурье

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R . \cos kl . dl; \qquad c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R . \sin kl . dl$$

Если выполнимъ указанныя здѣсь интегрированія и полученные интегралы подвергнемъ вліянію предѣловъ, то выраженія коеффиціентовъ b_k и c_k не будутъ болѣе содержать перемѣннаго l, а будутъ функціями координатъ x', y', z' и кромѣ того будутъ содержать элементы возмущеннаго свѣтила и другія постоянныя величины. Замѣтимъ однако, что эпоха ε входитъ всегда только въ зависимости отъ l, а потому если b_k и c_k не содержатъ l, то они будутъ независимы и отъ эпохи ε.

Мы видимъ такимъ образомъ, что каждый изъ коеффиціентовъ b_k и c_k можетъ быть разсматриваемъ какъ функція перемѣнныхъ x', y', z', или, что все равно, какъ функція отъ l', слѣдовательно каждая изъ этихъ функцій есть періодическая съ періодомъ 2π, а потому къ каждой изъ нихъ можетъ быть примѣнена общая теорема (27). И такъ

(29)
$$b_k = \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \left[\beta_{k'} \cos k'l' + \gamma_{k'} \sin k'l' \right]$$
$$c_k = \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \left[g_{k'} \cos k'l' + h_{k'} \sin k'l' \right]$$

гдѣ

$$\beta_{k'} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} b_k \cos k'l' . dl'; \qquad \gamma_{k'} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} b_k \sin k'l' . dl'$$

подобныя же выраженія имѣютъ и коеффиціенты $g_{k'}$ и $h_{k'}$. Такъ какъ b_k и c_k въ видѣ перемѣннаго содержатъ только l', то выполнивъ указанныя здѣсь интегрированія и подвергнувъ полученные интегралы вліянію предѣловъ, найдемъ такія выраженія для $\beta_{k'}$, $\gamma_{k'}$, $g_{k'}$ и $h_{k'}$ которыя не будутъ явно содержать времени, а бу-

дутъ зависѣть только отъ элементовъ орбитъ возмущеннаго и возмущающаго свѣтилъ и нѣкоторыхъ постоянныхъ величинъ. Что касается до элемента ε, то понятно, что онъ не будетъ входить въ коэффиціенты $\beta_{k'}$, $\gamma_{k'}$, $h_{k'}$, $g_{k'}$, ибо эти коэффиціенты не содержатъ l и l', а эпоха входитъ всегда только въ зависимости отъ среднихъ долготъ.

Внося выраженія (29) въ (28) и помня, что

$$\cos kl \,.\, \cos k'l' = \frac{1}{2}\left[\cos(kl + k'l') + \cos(kl - k'l')\right]$$

$$\sin kl \,.\, \sin k'l' = \frac{1}{2}\left[\cos(kl - k'l') - \cos(kl + k'l')\right]$$

$$\cos kl \,.\, \sin k'l' = \frac{1}{2}\left[\sin(kl + k'l') - \sin(kl - k'l')\right]$$

$$\sin kl \,.\, \cos k'l' = \frac{1}{2}\left[\sin(kl + k'l') + \sin(kl - k'l')\right]$$

получимъ

$$R = \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \Big[\frac{\beta - h}{2} \cdot \cos(kl + k'l') + \frac{\beta + h}{2} \cos(kl - k'l')$$

$$+ \frac{\gamma + g}{2} \sin(kl + k'l') + \frac{g - \gamma}{2} \sin(kl - k'l')\Big]$$

Для краткости мы опустили указателей при коэффиціентахъ β, γ, g, h. Выраженія (29) показываютъ, что измѣняя одновременно знакъ при k' и при коэффиціентахъ γ и h, мы не измѣнимъ величины функцій b_k и c_k, а слѣдовательно, если въ членахъ содержащихъ коэффиціенты γ и h измѣнимъ знаки, измѣнивъ вмѣстѣ съ тѣмъ и знакъ величины k', входящей подъ знакомъ тригонометрической функціи, то величины и знаки этихъ членовъ не измѣнятся. Сдѣлаемъ подобныя измѣненія во второмъ и четвертомъ членѣ предыдущаго выраженія и тогда приведемъ его къ виду

$$R = \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \left[(\beta - h)\cos(kl + k'l') + (\gamma + g)\sin(kl + k'l')\right]$$

Пусть

$$\beta - h = A_{k\,,\,k'}; \qquad \gamma + g = B_{k\,,\,k'}$$

тогда

$$R = A_0 + \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \Big[A_{k\,,\,k'} \cos(kl + k'l') + B_{k\,,\,k'} \sin(kl + k'l') \tag{30}$$

Замѣтимъ, что A_0 получимъ изъ общаго выраженія коэффиціента $A_{k\,,\,k'}$ полагая одновременно $k = 0$ и $k' = 0$, ибо только при этомъ условіи мы выдѣляемъ изъ всего періодическаго ряда членъ свободный отъ тригонометрическихъ функцій средней дол-

готы возмущеннаго и возмущающаго свѣтилъ. Этотъ членъ не будетъ содержать явно времени t, но будетъ функціей элементовъ обѣихъ орбитъ; кромѣ того функція A_0, подобно всѣмъ другимъ коеффиціентамъ разсматриваемаго періодическаго ряда, не будетъ содержать элементовъ ε и ε'.

Разсматривая найденную теперь форму (30) разложенія пертурбаціонной функціи, мы видимъ, что эта послѣдняя можетъ быть представлена въ видѣ двухъ существенно различныхъ частей. Одна не содержитъ времени явно, а заключаетъ его въ себѣ только въ зависимости отъ элементовъ, между которыми нѣтъ однако эпохи средней аномаліи, или эпохи средней долготы. Другая часть представляется суммой періодическихъ членовъ, которые содержатъ время явно, но не иначе какъ подъ знаками тригонометрическихъ функцій. Коеффиціенты этихъ періодическихъ членовъ суть функціи элементовъ, но эпохи также не содержатъ.

Для интегрированія выраженій (25) мы должны найти производныя пертурбаціонной функціи по элементамъ и внести эти производныя въ уравненія (25). Выполнивъ затѣмъ при извѣстныхъ допущеніяхъ интегрированіе полученныхъ дифференціальныхъ выраженій, мы найдемъ, что и эти интегралы почти всѣ будутъ состоять изъ двухъ такихъ же различныхъ частей, какъ и пертурбаціонная функція. Одна часть выражается посредствомъ элементовъ орбитъ возмущеннаго и возмущающаго свѣтилъ, въ другой части время входитъ явно подъ знаками тригонометрическихъ функцій. Первая изъ этихъ частей выражаетъ собою возмущенія называемыя вѣковыми, вторая представляетъ возмущенія носящія названія періодическихъ. Элементы со временемъ измѣняются весьма медленно, такъ что вообще требуется значительное время для того, чтобы они приняли то значеніе, какое имѣли въ началѣ извѣстнаго періода времени, поэтому и возмущенія обусловливающіяся такимъ медленнымъ измѣненіемъ элементовъ называются вѣковыми. Замѣтимъ наконецъ, что вѣковыя возмущенія зависятъ отъ взаимнаго расположенія орбитъ свѣтилъ, а періодическія—отъ взаимнаго расположенія самыхъ свѣтилъ.

4. Послѣ этихъ общихъ соображеній будемъ искать форму коеффиціентовъ разложенія пертурбаціонной функціи.

Въ выраженіи (8), ч. 4 пертурбаціонной функціи ρ представляетъ взаимное разстояніе возмущеннаго и возмущающаго свѣтилъ и можетъ быть представлено въ видѣ

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'.\cos(r, r')$$

кромѣ того разстоянію ρ можно дать форму

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2(x.x' + y.y' + z.z')$$

Слѣдовательно

$$x.x' + y.y' + z.z' = rr'.\cos(r, r')$$

такимъ образомъ, если положимъ для краткости $\mu' = \frac{m_1}{1 + m_0}$, то выраженію (8), ч. 4 можемъ дать видъ

$$R = \mu'[r^2 + r'^2 - 2rr'.\cos(r, r')]^{-\frac{1}{2}} - \frac{\mu'.r}{r'^2}\cos(r, r')$$

Означимъ чрезъ η взаимное наклоненіе орбитъ возмущеннаго и возмущающаго свѣтилъ. Пусть q и q' будутъ разстоянія взаимнаго пересѣченія орбитъ считаемыя по орбитамъ свѣтилъ отъ узловъ этихъ орбитъ на эклиптикѣ. При такомъ обозначеніи въ треугольникѣ abc (фиг. 11) стороны суть q, q', $\theta - \theta'$, если подъ θ и θ' разумѣемъ долготы узловъ орбитъ на эклиптикѣ. Углы противуположные этимъ сторонамъ суть: i, $180^0 - i'$ и η. Предполагается, что i и i' представляютъ собою наклоненія орбитъ возмущеннаго и возмущающаго свѣтилъ къ эклиптикѣ. Въ треугольникѣ $m_0m'b$ стороны суть: $m_0b = v - \theta - q$; $m'b = v' - \theta' - q'$; третья сторона измѣряетъ тотъ уголъ, который составляютъ между собою радіусы векторы свѣтилъ. Такимъ образомъ изъ этого треугольника $m_0m'b$ имѣемъ

$$\cos(r,r') = \cos(v - q - \theta)\cos(v' - q' - \theta') + \sin(v - q - \theta)\sin(v' - q' - \theta')\cos\eta$$

гдѣ подъ v и v' разумѣемъ долготы въ орбитахъ возмущеннаго и возмущающаго свѣтилъ. Замѣняя во второмъ членѣ $\cos\eta$ чрезъ $\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)$ и умножая первый членъ на $\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)$, легко приводимъ предыдущее къ виду

$$\cos(r,r') = \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\cos[v - v' - (q - q' + \theta - \theta')] + \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\cos[v + v' - \theta - \theta' - (q + q')]$$

или къ виду

$$\cos(r,r') = \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)[\cos(v - v')\cos(q - q' + \theta - \theta') + \sin(v - v')\sin(q - q' + \theta - \theta')]$$
$$+ \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)[\cos(v + v' - \theta - \theta')\cos(q + q') + \sin(v + v' - \theta - \theta')\sin(q + q')]$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned} 1 + \alpha &= \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\cos(q - q' + \theta - \theta'); \quad & \beta &= \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\sin(q - q' + \theta - \theta') \\ \gamma &= \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\cos(q + q'); & \delta &= \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\sin(q + q') \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

тогда

$$\left.\begin{aligned} \cos(r,r') &= (1 + \alpha).\cos(v - v') + \beta.\sin(v - v') \\ &+ \gamma.\cos(v + v' - \theta - \theta') + \delta.\sin(v + v' - \theta - \theta') \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Примѣняя къ рѣшенію треугольника abc (фиг. 11) уравненія Гаусса, легко находимъ

$$\left.\begin{aligned} &\sin\frac{\theta - \theta' + q - q'}{2}\cos\frac{\eta}{2} = \sin(\theta - \theta')\sin\frac{i}{2}\cdot\sin\frac{i'}{2} \\ &\cos\frac{\theta - \theta' + q - q'}{2}\cos\frac{\eta}{2} = \cos\frac{i}{2}\cdot\cos\frac{i'}{2} + \sin\frac{i}{2}\cdot\sin\frac{i'}{2}\cdot\cos(\theta - \theta') \\ &\sin(q + q')\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos i' - \cos i)\sin(\theta - \theta') \\ &\cos(q + q')\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos i.\cos i')\cos(\theta - \theta') + \frac{\sin i.\sin i'}{2} \; *) \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

*) Для сферическаго треугольника, стороны котораго суть a, b, c, уравненія Гаусса даютъ:

Посредствомъ этихъ выраженій легко представить коэффиціенты α, β, γ, δ въ зависимости отъ наклоненій орбитъ къ эклиптикѣ. Помножая первое изъ этихъ уравненій на второе, найдемъ

$$\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\sin(\theta-\theta'+q-q')=\frac{\sin i.\sin i'}{2}\sin(\theta-\theta')+\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\sin 2(\theta-\theta')$$

откуда прямо заключаемъ, что

$$\beta=\frac{\sin i.\sin i'}{2}\sin(\theta-\theta')+\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\sin 2(\theta-\theta') \tag{34}$$

Возвышая первыя два изъ уравненій (33) въ квадратъ и вычитая первый квадратъ изъ втораго, легко находимъ

$$\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\cos(\theta-\theta'+q-q')=1-\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)$$
$$+\frac{\sin i.\sin i'}{2}\cos(\theta-\theta')+\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\cos 2(\theta-\theta')$$

$$\sin\frac{C}{2}\sin\frac{a+b}{2}=\sin\frac{c}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2}=\cos\frac{c}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$\cos\frac{C}{2}\sin\frac{a-b}{2}=\sin\frac{c}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2}=\cos\frac{c}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$

помножимъ третье изъ этихъ уравненій на $\cos\frac{c}{2}$, а четвертое на $\sin\frac{c}{2}$ и, сложивъ произведенія, найдемъ

$$\cos\frac{C}{2}\sin\frac{c+a-b}{2}=\sin c.\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \tag{a}$$

Помножимъ третье изъ уравненій Гаусса на $\sin\frac{c}{2}$ и вычтемъ произведеніе изъ четвертаго умноженнаго на $\cos\frac{c}{2}$, тогда получимъ

$$\cos\frac{C}{2}\cos\frac{c+a-b}{2}=\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos c \tag{b}$$

Умножимъ первое Гауссово уравненіе на второе и будемъ имѣть

$$\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\sin(a+b)=\frac{\sin c}{2}\Big[\cos A+\cos B\Big] \tag{c}$$

Вычитая квадратъ перваго уравненія изъ квадрата втораго, находимъ

$$\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\cos(a+b)=\cos^2\left(\frac{c}{2}\right)\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{c}{2}\right)\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

откуда легко получаемъ

$$\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\cos(a+b)=\frac{\cos c}{2}\Big[1+\cos A.\cos B\Big]-\frac{1}{2}\sin A.\sin B \tag{d}$$

Если въ уравненіяхъ (a), (b), (c), (d) положимъ $A=i'$; $B=180^\circ-i$; $C=\eta$; $a=q$; $b=q'$; $c=\theta-\theta'$, то и получимъ уравненія (33)

Сравнивая это съ первымъ изъ выраженій (33), заключаемъ, что

$$\alpha = -\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \frac{\sin i . \sin i'}{2}\cos(\theta-\theta') + 2\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\cos^2(\theta-\theta') \quad (35)$$

Замѣняя въ третьемъ и четвертомъ изъ выраженій (33) косинусы наклоненій синусами половинныхъ дугъ и сравнивая полученныя выраженія съ выраженіями (31), находимъ

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{\sin i . \sin i'}{2} + \left[\sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right]\cos(\theta-\theta') \\ \delta &= \quad \left[\sin^2\left(\frac{i}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right]\sin(\theta-\theta') \end{aligned} \quad (36)$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что α, β, γ и δ суть величины втораго порядка относительно наклоненій орбитъ возмущеннаго и возмущающаго свѣтилъ.

Отдѣлимъ въ выраженіи (32) явныя функціи времени отъ функцій элементовъ. Явныя функціи времени суть между прочимъ истинныя аномаліи f и f'. Мы знаемъ, что $v = f + \pi$; $v' = f' + \pi'$. Внося это въ выраженіе (32) и полагая для краткости

$$\begin{aligned} F &= \quad (1+\alpha)\cos(\pi-\pi') + \beta . \sin(\pi-\pi') \\ F_1 &= -(1+\alpha)\sin(\pi-\pi') + \beta . \cos(\pi-\pi') \\ G &= \quad \gamma . \cos(\pi+\pi'-\theta-\theta') + \delta . \sin(\pi+\pi'-\theta-\theta') \\ G_1 &= -\gamma . \sin(\pi+\pi'-\theta-\theta') + \delta . \cos(\pi+\pi'-\theta-\theta') \end{aligned} \quad (37)$$

легко находимъ

$$\begin{aligned} \cos(r, r') = {} & F . \cos(f-f') + F_1 . \sin(f-f') \\ & + G . \cos(f+f') + G_1 . \sin(f+f') \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \cos(r, r') = {} & (F+G)\cos f . \cos f' + (F-G)\sin f . \sin f' \\ & + (F_1+G_1)\sin f . \cos f' + (G_1-F_1)\cos f . \sin f' \end{aligned} \quad (38)$$

гдѣ слѣдовательно F, G, F_1, G_1 суть функціи элементовъ и времени явно не содержатъ. Функціи G и G_1 суть величины втораго порядка относительно наклоненій, а функціи F и F_1 разнятся отъ $\cos(\pi-\pi')$ и отъ $\sin(\pi'-\pi)$ величинами втораго порядка относительно наклоненій.

Пусть

$$\begin{aligned} R_1 &= \mu' \left[r^2 + r'^2 - 2rr' . \cos(r, r')\right]^{-\frac{1}{2}} \\ R_2 &= -\frac{\mu' . r}{r'^2}\cos(r, r') \end{aligned} \quad (39)$$

тогда

$$R = R_1 + R_2$$

5. Разложимъ въ періодическіе ряды явныя функціи времени входящія въ R_1 и R_2.

Для насъ необходимы теперь разложенія функцій

$\frac{r^2}{a^2}$, $\frac{r}{a}\cdot\cos f$, $\frac{r}{a}\cdot\sin f$, $\frac{a^2}{r^2}\cdot\cos f$, $\frac{a^2}{r^2}\cdot\sin f$, $\sin f$ и $\cos f$

На основаніи того, что мы говорили въ n⁰ 30, ч. 4 допустимъ, что

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \alpha_0 + \alpha_1 . \cos\zeta + \alpha_2 . \cos 2\zeta + \cdots + \alpha_k . \cos k\zeta$$

гдѣ подъ ζ разумѣемъ среднюю аномалію свѣтила. По теоремѣ Фурье

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2 . d\zeta$$

означая чрезъ u эксцентрическую аномалію свѣтила, легко приводимъ это къ виду

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - e . \cos u)^3 . du$$

откуда легко получаемъ

$$\alpha_0 = 1 + \frac{3}{2}e^2$$

Что касается до коеффиціентовъ періодическихъ членовъ разсматриваемаго теперь ряда, то вообще

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2 . \cos k\zeta . d\zeta$$

Что въ зависимости отъ эксцентрической аномаліи, какъ мы знаемъ, представляется въ видѣ

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1 - e . \cos u)^3 \cos(ku - ke . \sin u) . du$$

такъ какъ $(1 - e . \cos u)\cos(ku - ke . \sin u) . du$ за исключеніемъ постояннаго множителя есть точный дифференціалъ, то, выполняя здѣсь интегрированіе по частямъ, имѣемъ

$$\alpha_k = -\frac{2}{\pi . k}\int^{2\pi}\sin(ku - ke . \sin u)(1 - e . \cos u)\, e . \sin u . du$$

интегрируя это еще разъ по частямъ, имѣемъ

$$\alpha_k = -\frac{2}{\pi . k^2} \int_0^{2\pi} e . \cos u . \cos (ku - ke . \sin u)\, du \tag{a}$$

что можно представить въ видѣ

$$\alpha_k = -\frac{2}{\pi . k^2} \int_0^{2\pi} \cos (ku - ke . \sin u) . du + \frac{2}{\pi . k^2} \int_0^{2\pi} (1 - e . \cos u) \cos (ku - ke . \sin u) . du$$

но такъ какъ

$$\int^{2\pi} (1 - e . \cos u) \cos (ku - ke . \sin u)\, du = 0$$

то

$$\alpha_k = -\frac{2}{\pi . k^2} \int_0^{2\pi} \cos (ku - ke . \sin u) . du \tag{b}$$

Сравнивая выраженія (241) и (232) ч. 4, мы видѣли, что

$$\int_0^{2\pi} \cos (ku - ke . \sin u)\, du = 2\pi\, J^{(k)}_{\frac{ke}{2}} \tag{40}$$

а потому заключаемъ, что

$$\alpha_k = -\left(\frac{2}{k}\right)^2 J^{(k)}_{\frac{ke}{2}}$$

И такъ если положимъ для краткости

$$h_k = \frac{2}{k} J^{(k)}_{\frac{ke}{2}}$$

то будемъ имѣть

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2} e^2 - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} h_k . \cos k\zeta \tag{41}$$

Найдемъ теперь коеффиціенты разложенія функціи $\frac{r}{a} \cdot \cos f$. Легко видѣть, что это разложеніе не содержитъ синусовъ кратныхъ дугъ средней аномаліи. Назовемъ первый

членъ разложенія, не зависящій отъ періодической функціи, чрезъ β_0 и коэффиціентъ общаго члена разложенія—чрезъ β_k, тогда будемъ имѣть

$$\beta_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r}{a}\cdot\cos f\,.\,d\zeta\,; \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r}{a}\cdot\cos f\,.\cos k\zeta\,.\,d\zeta$$

Мы знаемъ, что

$$\frac{r}{a}\cdot\cos f = \cos u - e$$

поэтому

$$2\pi\beta_0 = \int_0^{2\pi} (\cos u - e)\,(1 - e\,.\cos u)\,du = -\,3\pi\,.e$$

Слѣдовательно

$$\beta_0 = -\,\frac{3}{2}\,e$$

Коэффиціентъ β_k представляется въ видѣ

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos u - e)\cos\,(ku - ke\,.\sin u)\,(1 - e\,.\cos u)\,.\,du$$

выполняя интегрированіе по частямъ, получаемъ

$$(42) \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi\,.\,k}\int_0^{2\pi} \sin u\,.\sin\,(ku - ke\,.\sin u)\,.\,du$$

Умноживъ это на de и взявъ интегралъ, найдемъ

$$\int \beta_k\,.\,de = \frac{1}{\pi\,.\,k}\int\int_0^{2\pi} \sin u\,.\sin\,(ku - ke\,.\sin u)\,du\,.\,de$$

выполняя во второй части интегрированіе по e, имѣемъ

$$\int \beta_k\,.\,de = \frac{1}{\pi\,.\,k^2}\int_0^{2\pi} \cos\,(ku - ke\,.\sin u)\,du$$

что посредствомъ выраженія (40) приводится къ виду

$$\int \beta_k\,.\,de = \frac{2}{k^2}\,J^{(k)}_{\frac{ke}{2}}$$

или по принятому теперь означенію

$$\int \beta_k \,.\, de = \frac{1}{k} h_k$$

Слѣдовательно

$$\beta_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{dh_k}{de} \tag{43}$$

И такъ

$$\frac{r}{a} \cdot \cos f = -\frac{3}{2} e + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{dh_k}{de} \cos k\zeta \tag{44}$$

Что касается до разложенія $\frac{r}{a} \cdot \sin f$, то оно уже найдено въ nº 29 и представляется выраженіемъ (242), ч. 4. При сдѣланномъ теперь означеніи эта функція имѣетъ видъ

$$\frac{r}{a} \cdot \sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{k=\infty} h_k \sin k\zeta \tag{45}$$

Опредѣлимъ теперь коеффиціенты разложенія функціи $\frac{a^2}{r^2} \cdot \cos f$. Назовемъ постоянный членъ разложенія чрезъ A_0 и коеффиціентъ общаго члена чрезъ A_k. Тогда

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{r^2} \cdot \cos f \,.\, d\zeta; \qquad A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{r^2} \cdot \cos f \,.\, \cos k\zeta \,.\, d\zeta$$

Обѣ эти функціи, будучи выражены по эксцентрической аномаліи, принимаютъ видъ

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos u - e}{(1 - e \,.\, \cos u)^2} du$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos u - e) \cos (ku - ke \,.\, \sin u)}{(1 - e \,.\, \cos u)^2} du$$

Замѣтимъ, что

$$\int \frac{\cos u - e}{(1 - e \,.\, \cos u)^2} du = \int \frac{\cos u - e \,.\, \cos^2 u - e \,.\, \sin^2 u}{(1 - e \,.\, \cos u)^2} du$$

$$= \int \frac{(1 - e \,.\, \cos u)\, d (\sin u) - \sin u \,.\, d\, (1 - e \,.\, \cos u)}{(1 - e \,.\, \cos u)^2} = \frac{\sin u}{1 - e \,.\, \cos u}$$

Слѣдовательно $A_0 = 0$.

Мы сейчасъ видѣли, что

$$\int \frac{\cos u - e}{(1 - e . \cos u)^2} = \frac{\sin u}{1 - e . \cos u}$$

а потому, выполняя въ выраженіи A_k интегрированіе по частямъ, легко находимъ

$$A_k = \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(ku - ke . \sin u) . \sin u . du$$

Сравнивая выраженія (42) и (43), видимъ

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(ku - ke . \sin u) \sin u . du = \frac{dh_k}{de}$$

Слѣдовательно

$$A_k = k \frac{dh_k}{de}$$

И такъ

(46) $$\frac{a^2}{r^2} \cdot \cos f = \sum_{k=1}^{k=\infty} k \frac{dh_k}{de} \cdot \cos k\zeta$$

Найдемъ теперь коэффиціенты разложенія функціи $\frac{a^2}{r^2} \cdot \sin f$. Пусть постоянный членъ этого разложенія будетъ B_0, а чрезъ B_k означимъ коэффиціентъ общаго члена. Тогда

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{r^2} \cdot \sin f . d\zeta; \qquad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{r^2} \cdot \sin f . \sin k\zeta . d\zeta$$

но такъ какъ

$$\frac{r}{a} \cdot \sin f = \sqrt{1 - e^2} . \sin u; \qquad \frac{r}{a} = 1 - e . \cos u$$

то

$$\frac{a^2}{r^2} \sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} . \sin u}{(1 - e . \cos u)^3}$$

Слѣдовательно

$$B_0 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin u \,.\, du}{(1 - e.\cos u)^2}$$

$$B_k = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin u \,.\, \sin(ku - ke.\sin u) \,.\, du}{(1 - e.\cos u)^2}$$

но такъ какъ

$$\int \frac{\sin u \,.\, du}{(1 - e.\cos u)^2} = -\frac{1}{e(1 - e.\cos u)}$$

то $B_0 = 0$, а коэффиціентъ B_k послѣ интегрированія по частямъ приводится къ виду

$$B_k = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k}{e} \cos(ku - ke.\sin u) \,.\, du$$

отсюда, принимая во вниманіе выраженіе (40), получаемъ

$$B_k = \frac{2k\sqrt{1-e^2}}{e} J^{(k)}_{\frac{ke}{2}}$$

или по сдѣланному означенію

$$B_k = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} k^2 . h_k$$

И такъ

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 . \sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^2 . h_k \sin k\zeta \qquad (47)$$

Найдемъ наконецъ разложенія для $\cos f$ и $\sin f$.

Пусть

$$\cos f = P_0 + P_1 . \cos\zeta + P_2 . \cos 2\zeta + \cdots\cdots + P_k . \cos k\zeta$$
$$\sin f = P_0' + P_1' . \sin\zeta + P_2' . \sin 2\zeta + \cdots\cdots + P_k' . \sin k\zeta$$

Понятно, что

$$P_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos f \,.\, d\zeta; \qquad P_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos f \,.\, \cos k\zeta \,.\, d\zeta$$

Мы знаемъ, что

$$\cos f = \frac{\cos u - e}{1 - e.\cos u}$$

поэтому легко видѣть, что

$$P_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos u - e).du$$

$$P_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos u - e)\cos(ku - ke.\sin u).du$$

Первое дастъ $P_0 = -e$, а сравнивая выраженія (a) и (b), видимъ, что

$$\int_0^{2\pi} e.\cos u.\cos(ku - ke.\sin u).du = \int_0^{2\pi}\cos(ku - ke.\sin u).du$$

Посредствомъ этого коэффиціентъ общаго члена разложенія $\cos f$ весьма легко приводится къ виду

$$P_k = \frac{1-e^2}{\pi.e}\int_0^{2\pi}\cos(ku - ke.\sin u).du$$

что по выраженію (40) обращается въ

$$P_k = \frac{1-e^2}{e}k.h_k$$

И такъ

$$\cos f = -e + \frac{1-e^2}{e}\sum_{k=1}^{k=\infty} k.h_k.\cos k\zeta$$

Опредѣлимъ теперь формы для P_0' и P_k'. Понятно, что

$$P_0' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin f.d\zeta; \quad P_k' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin f.\sin k\zeta.d\zeta$$

но мы знаемъ, что

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e.\cos u}\cdot \sin u; \qquad \zeta = u - e\,.\sin u$$

поэтому

$$P_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1-e^2}\int_0^{2\pi} \sin u\,.\,du; \quad P_k' = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin u.\sin(ku - ke.\sin u).du$$

Первое дастъ $P_0' = 0$, а второе по сравненіи выраженій (40) и (43) легко обращается въ

$$P_k' = \sqrt{1-e^2}\,\frac{dh_k}{de}$$

И такъ

$$\sin f = \sqrt{1-e^2}\sum_{k=1}^{k=+\infty}\frac{dh_k}{de}\cdot \sin k\zeta$$

6. Имѣя все это, разовьемъ сначала вторую часть пертурбаціонной функціи, которая посредствомъ выраженія (38) можетъ быть представлена въ видѣ

$$R_2 = -\frac{\mu' a}{a'^2}\Big[(F+G)\frac{r}{a}\cdot\cos f\cdot\frac{a'^2}{r'^2}\cdot\cos f' + (F-G)\frac{r}{a}\cdot\sin f\cdot\frac{a'^2}{r'^2}\cdot\sin f'$$

$$+ (F_1+G_1)\frac{r}{a}\cdot\sin f\cdot\frac{a'^2}{r'^2}\cdot\cos f' + (G_1-F_1)\frac{r}{a}\cdot\cos f\cdot\frac{a'^2}{r'^2}\cdot\sin f'\Big]$$

Замѣняя функціи $\frac{r}{a}\cdot\cos f$, $\frac{r}{a}\cdot\sin f$, и т. д. найденными теперь рядами, и полагая для краткости

$$\begin{aligned}
&(F+G)\frac{k'}{k}\cdot\frac{dh_k}{de}\cdot\frac{dh'_{k'}}{de'} = A_{k,k'} \\
&(F-G)\frac{\sqrt{1-e^2}.\sqrt{1-e'^2}}{ee'}k'^2 h_k\,.\,h'_{k'} = B_{k,k'} \qquad\qquad (48)\\
&(F_1+G_1)\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}k'.h_k\frac{dh'_{k'}}{de'} = C_{k,k'} \\
&\frac{\sqrt{1-e'^2}}{e'}(G_1-F_1)\frac{k'^2}{k^2}h'_{k'}\frac{dh_k}{de} = D_{k,k'}
\end{aligned}$$

легко находимъ

$$R_2 = \mu' \frac{a}{a'^2}\left[\frac{3}{2}(F+G)e\sum_{k'=1}^{k'=\infty} k' \frac{dh'_{k'}}{de'}\cos k'\zeta' + \frac{3}{2}(G_1-F_1)\frac{e}{e'}\sqrt{1-e'^2}\sum_{k'=1}^{k'=\infty} k'^2 h'_{k'}\sin k'\zeta'\right]$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}[A_{k,k'} - B_{k,k'}]\cos(k\zeta + k'\zeta')$$

(49) $$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}[A_{k,k'} + B_{kk'}]\cos(k\zeta - k'\zeta')$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}[C_{k,k'} + D_{k,k'}]\sin(k\zeta + k'\zeta')$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}[C_{k,k'} - D_{k,k'}]\sin(k\zeta - k'\zeta') \; *)$$

Въ такомъ видѣ представляется явною функціею времени вторая часть пертурбаціонной функціи. Такъ какъ суммованія по обоимъ аргументамъ, т. е. по k и k' производится начиная отъ единицы, то во всемъ ряду нѣтъ члена свободнаго отъ періодической функціи и вся сумма состоитъ только изъ такихъ членовъ, которые содержатъ время явно подъ знаками тригонометрическихъ функцій.

Перейдемъ теперь къ рѣшенію труднѣйшей задачи теоріи возмущеній; разложимъ въ періодическій рядъ первую часть пертурбаціонной функціи. Эта часть представляется первымъ изъ выраженій (39); которому, обращая вниманіе на выраженіе (38), можно дать видъ

$$R_1 = \mu'\left[a^2\frac{r^2}{a^2} + a'^2\frac{r'^2}{a'^2}\right.$$
$$- 2aa'(F+G)\frac{r}{a}\cdot\cos f\cdot\frac{r'}{a'}\cdot\cos f' - 2aa'(F-G)\frac{r}{a}\cdot\sin f\cdot\frac{r'}{a'}\cdot\sin f'$$
$$\left. - 2aa'(F_1+G_1)\frac{r}{a}\cdot\sin f\cdot\frac{r'}{a'}\cdot\cos f' - 2aa'(G_1-F_1)\frac{r}{a}\cdot\cos f\cdot\frac{r'}{a'}\cdot\sin f'\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Возмемъ здѣсь общимъ множителемъ сумму $a^2 + a'^2$, положимъ для краткости

$$\alpha = \frac{aa'}{a^2 + a'^2}$$

и обращая вниманіе на выраженія (41), (44) и (45), легко получимъ

---

*) Буквы со значками относятся къ возмущающей планетѣ.

$$R_1 = \frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\Bigg[1+\frac{3}{2}\alpha\left(\frac{ae^2}{a'}+\frac{a'e'^2}{a}\right)-\frac{9}{2}(F+G)\,\alpha ee' \tag{50}$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[2\frac{a}{a'}\frac{h_k}{k}-3(F+G)\frac{e'}{k}\frac{dh_k}{de}\right]\cos k\zeta$$

$$-\alpha\sum_{k'=1}^{k'=\infty}\left[2\frac{a'}{a}\frac{h'_{k'}}{k'}-3(F+G)\frac{e}{k'}\frac{dh'_{k'}}{de'}\right]\cos k'\zeta'$$

$$+3\alpha(F_1+G_1)\frac{e}{e'}\sqrt{1-e^2}\sum_{k=1}^{k=\infty}h_k\sin k\zeta+3\alpha(G_1-F_1)\frac{e}{e'}\sqrt{1-e'^2}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}h'_{k'}\sin k'\zeta'$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}\left[\frac{1}{kk'}\frac{dh_k}{de}\frac{dh'_{k'}}{de'}(F+G)+\frac{\sqrt{1-e^2}.\sqrt{1-e'^2}}{ee'}h_k.h'_{k'}(F-G)\right]\cos(k\zeta-k'\zeta')$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}\left[\frac{1}{kk'}\frac{dh_k}{de}\frac{dh'_{k'}}{de'}(F+G)-\frac{\sqrt{1-e^2}.\sqrt{1-e'^2}}{ee'}h_k.h'_{k'}(F-G)\right]\cos(k\zeta+k'\zeta')$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}\left[\frac{h_k}{k'}\frac{dh'_{k'}}{de'}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}(F_1+G_1)-\frac{h'_{k'}}{k'}\cdot\frac{dh_k}{de}\frac{\sqrt{1-e'^2}}{e'}(G_1-F_1)\right]\sin(k\zeta-k'\zeta')$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}\left[\frac{h_k}{k'}\frac{dh'_{k'}}{de'}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}(F_1+G_1)+\frac{h'_{k'}}{k'}\cdot\frac{dh_k}{de}\frac{\sqrt{1-e'^2}}{e'}(G_1-F_1)\right]\sin(k\zeta+k'\zeta')\Bigg]^{\frac{1}{2}}$$

Въ этомъ выраженіи есть нѣсколько членовъ нулеваго порядка относительно эксцентриситетовъ; къ нимъ относится между прочимъ первый членъ, т. е. единица, кромѣ того подобные же члены находятся подъ знаками двойныхъ суммъ и зависятъ отъ аргумента $k\zeta - k'\zeta'$; мы получимъ ихъ при суммованіи, если одновременно примемъ $k = 1$ и $k' = 1$. Выдѣлимъ эти члены изъ упомянутыхъ двойныхъ суммъ и положимъ

$$V = 1-\alpha\left[\frac{dh_1}{de}\cdot\frac{dh'_1}{de'}(F+G)+\frac{\sqrt{1-e^2}.\sqrt{1-e'^2}}{e.e'}h_1.h'_1(F-G)\right]\cos(\zeta-\zeta')$$
$$-\alpha\left[h'\frac{dh'_1}{de'}\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}(F_1+G_1)-h'_1\frac{dh_1}{de}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e'}(G_1-F_1)\right]\sin(\zeta-\zeta') \tag{51}$$

Раздѣленную на α сумму всѣхъ остальныхъ членовъ, находящихся подъ радикаломъ въ предыдущемъ выраженіи R_1, означимъ чрезъ W. Тогда первая часть пертурбаціонной функціи представится въ видѣ

$$R_1 = \frac{\mu'}{\sqrt{a^2 + a'^2}} [V - \alpha W]^{-\frac{1}{2}}$$

гдѣ слѣдовательно величина W не ниже какъ перваго порядка относительно эксцентриситета, а потому предыдущее выраженіе можетъ быть разложено въ рядъ по степенямъ эксцентриситета и этотъ рядъ будетъ представлять достаточную сходимость не только для всѣхъ большихъ планетъ но и для многихъ малыхъ.

И такъ

$$(52) \quad R_1 = \frac{\mu'}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[V^{-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2} V^{-\frac{3}{2}}. W + \frac{1.3}{2.4} \alpha^2. V^{-\frac{5}{2}}. W^2 + \cdots\cdots \right]$$

Въ большинствѣ случаевъ можно ограничиться тремя приведенными здѣсь членами разложенія. Такимъ образомъ мы видимъ, что для рѣшенія разсматриваемаго вопроса о разложеніи R_1 необходимо составить W и ея степени, а также найти общее выраженіе $V^{-\frac{s}{2}}$ для какихъ угодно нечетныхъ значеній s. Рѣшимъ прежде первую, болѣе простую задачу.

Функція W по нашему условію есть такое значеніе функціи R_1, которое не содержитъ членовъ съ множителями $\cos(\zeta - \zeta')$ и $\sin(\zeta - \zeta')$, ибо подобные члены включены въ выраженіе V. Такимъ образомъ выполняя въ выраженіи (50) показанныя тамъ суммованія по k и k', мы должны брать всѣ комбинаціи значеній k и k' въ предѣлахъ единицы и безконечности, за исключеніемъ только того сочетанія для аргумента $k\zeta - k'\zeta_1$ въ которомъ одновременно $k = 1$ и $k' = 1$; въ членахъ же зависящихъ отъ аргумента $k\zeta + k'\zeta'$ не исключается и эта комбинація значеній k и k'. Въ выраженіи (50) положимъ для краткости

$$-\frac{3}{2}\frac{a'}{a}e'^2 - \frac{3}{2}\frac{a}{a'}e^2 + \frac{9}{2}(F+G)ee' = E$$

$$-3(F+G)\frac{e'}{k}\frac{dh_k}{de} = A_k.\cos a_k; \quad 3\frac{e'}{e}(F_1+G_1)h_k = A_k.\sin a_k$$

$$3(F+G)\frac{e}{k'}\frac{dh'_{k'}}{de'} = B_k.\cos b_k; \quad 3(G_1 - F_1)\frac{e}{e'}h'_{k'}\sqrt{1-e'^2} = B_k.\sin b_k$$

$$(53) \quad \frac{1}{kk'}\frac{dh_k}{de}\frac{dh'_{k'}}{de'}(F+G) + \frac{\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e'^2}}{ee'}h_k.h_{k'}(F-G) = 2H_{k,k'}\cos e_{k,k'}$$

$$-\frac{h_k}{k'}\frac{dh'_{k'}}{de'}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}(F_1+G_1) + \frac{h'_{k'}}{k}\frac{dh_k}{de}\frac{\sqrt{1-e'^2}}{e'}(G_1 - F_1) = 2H_{k,k'}\sin e_{k,k'}$$

$$\frac{1}{kk'}\frac{dh_k}{de}\frac{dh'_{k'}}{de'}(F+G) - \frac{\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e'^2}}{ee'}h_k.h'_{k'}(F-G) = 2L_{k,k'}$$

$$-\frac{h_k}{k'}\frac{dh'_{k'}}{de'}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}(F_1+G_1) - \frac{h'_{k'}}{k}\frac{dh_k}{de}\frac{\sqrt{1-e'^2}}{e'}(G_1 - F_1) = 2M_{k,k'}$$

тогда функція W приведется къ виду

$$W = E + 2\frac{a}{a'}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{h_k}{k}\cdot\cos k\zeta + 2\frac{a'}{a}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}\frac{h'_{k'}}{k'}\cdot\cos k'\zeta'$$
$$+\sum_{k=1}^{k=\infty}A_k\cos(a_k+k\zeta) - \sum_{k'=1}^{k'=\infty}B_{k'}\cos(b_k - k'\zeta') \tag{54}$$
$$+2\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}H_{k,k'}\cos(k\zeta - k'\zeta' + c_{k,k'})$$
$$+2\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{k'=1}^{k'=\infty}[L_{k,k'}\cos(k\zeta + k'\zeta') + M_{k,k'}\sin(k\zeta + k'\zeta')]$$

Замѣтимъ еще разъ, что въ членѣ зависящемъ отъ аргумента $k\zeta - k'\zeta' + c_{k,k'}$ при суммованіи должно быть исключено сочетаніе $k = 1$ съ $k' = 1$. Такимъ образомъ это выраженіе W не содержитъ члена $2H_{1,1}\cos(\zeta - \zeta' + c_{1,1})$, который включенъ въ функцію V.

Опредѣлимъ теперь составъ функціи $V^{-\frac{s}{2}}$. Положимъ въ выраженіи (51)

$$\frac{dh_1}{de}\cdot\frac{dh'_1}{de'}(F+G) + \frac{\sqrt{1-e^2}\cdot\sqrt{1-e'^2}}{ee'}h_1\cdot h'_1(F-G) = 2(1+\varepsilon)\cos\varphi$$
$$h'_1\cdot\frac{dh_1}{de}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e'}(G_1-F_1) - h_1\frac{dh'_1}{de'}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}(F_1+G_1) = 2(1+\varepsilon)\sin\varphi \tag{55}$$

тогда функція V приметъ видъ

$$V = 1 - 2\alpha(1+\varepsilon)\cos(\zeta - \zeta' + \varphi) \tag{55$_*$}$$

положимъ здѣсь для краткости

$$\zeta - \zeta' + \varphi = \psi; \qquad \alpha(1+\varepsilon) = \beta$$

тогда

$$V = 1 - 2\beta\,.\cos\psi$$

Пусть

$$U = 1 - 2\alpha\,.\cos\psi$$

Слѣдовательно U есть та функція, въ которую обращается V при $\varepsilon = 0$. Понятно, что какъ $U^{-\frac{s}{2}}$, такъ и $V^{-\frac{s}{2}}$ могутъ быть разложены въ ряды по косинусамъ кратныхъ дугъ отъ ψ и коэффиціенты обоихъ разложеній будутъ находиться въ извѣстной зависимости между собою. Если назовемъ чрезъ $P_k^{(s)}$ коэффиціентъ общаго члена въ разложеніи $V^{-\frac{s}{2}}$ и если $A_k^{(s)}$ будетъ коэффиціентъ общаго члена въ разложеніи $U^{-\frac{s}{2}}$, то помня, что $\beta = \alpha + \alpha\varepsilon$, можно принять

(56) $$P_k^{(s)} = A_k^{(s)} + \frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}\alpha\varepsilon + \frac{d^2A_k^{(s)}}{d\alpha^2}\frac{\alpha^2.\varepsilon^2}{1.2} + \frac{d^3A_k^{(s)}}{d\alpha^3}\frac{\alpha^3.\varepsilon^3}{2.3}\cdots\cdots$$

такимъ образомъ опредѣленіе коеффиціентовъ $P_k^{(s)}$ приводится къ опредѣленію коеффиціентовъ $A_k^{(s)}$.

Такъ какъ $\alpha < 1$, то можно считать $\alpha = \sin p$; полагая кромѣ того

$$x = \cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi; \quad x^{-1} = \cos\psi - \sqrt{-1}\sin\psi$$

пишемъ

$$2.\cos\psi = x + \frac{1}{x}$$

Слѣдовательно

$$U = 1 - \sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}\left[x + \frac{1}{x}\right]$$

или

$$U = \cos^2\left(\frac{p}{2}\right)\left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{p}{2}\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{p}{2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]$$

откуда, какъ мы уже видѣли, легко получить

$$U^{-\frac{s}{2}} = \cos^{-s}\left(\frac{p}{2}\right)\left[1 - x.\operatorname{tang}\left(\frac{p}{2}\right)\right]^{-\frac{s}{2}}\left[1 - \frac{1}{x}\cdot\operatorname{tang}\left(\frac{p}{2}\right)\right]^{-\frac{s}{2}}$$

положимъ здѣсь для краткости

$$\cos^{-s}\left(\frac{p}{2}\right) = m^s; \qquad \operatorname{tang}\frac{p}{2} = n$$

тогда

(57) $$U^{-\frac{s}{2}} = m^s\left[1 - nx\right]^{-\frac{s}{2}}\left[1 - \frac{n}{x}\right]^{-\frac{s}{2}}$$

Разлагая обоихъ производителей въ ряды и перемножая эти послѣдніе, легко получимъ

(58) $$\begin{aligned} U^{-\frac{s}{2}} = b_0^{(s)} &+ b_1^{(s)}.x + b_2^{(s)}.x^2 + b_3^{(s)}.x^3 + \cdots\cdots \\ &+ b_1^{(s)}.\frac{1}{x} + b_2^{(s)}.\frac{1}{x^2} + b_3^{(s)}.\frac{1}{x^3} + \cdots\cdots \end{aligned}$$

гдѣ

$$b_0^{(s)} = 1 + \left(\frac{s}{2}\right)^2.n^2 + \left[\frac{s(s+2)}{2.4}\right]^2 n^4 + \left[\frac{s(s+2)(s+4)}{2.4.6}\right]^2 n^6 + \cdots\cdots$$

$$b_1^{(s)} = \frac{s}{2}\cdot n + \frac{s}{2}\cdot\frac{s(s+2)}{2.4}n^3 + \frac{s(s+2)}{2.4}\cdot\frac{s(s+2)(s+4)}{2.4.6}n^5 + \cdots\cdots$$

$$b_2^{(s)} = \frac{s(s+2)}{2.4}n^2 + \frac{s}{2}\cdot\frac{s(s+2)(s+4)}{2.4.6}n^4 + \cdots\cdots$$

и т. д.

Такимъ образомъ

$$U^{-\frac{s}{2}}=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k^{(s)}\, x^k \qquad (59)$$

гдѣ $b_k^{(s)}=b_{-k}^{(s)}$. Изъ выраженія (58) видно также, что

$$U^{-\frac{s}{2}}=b_0^{(s)}+2b_1^{(s)}\cos\psi+2b_2^{(s)}\cos 2\psi+2b_3^{(s)}\cos 3\psi+\cdots\cdots \qquad (59_*)$$

полагая $2b_k^{(s)}=A_k^{(s)}$, имѣемъ

$$U^{-\frac{s}{2}}=\frac{A_0^{(s)}}{2}+A_1^{(s)}\cos\psi+A_2^{(s)}\cos 2\psi+\cdots\cdots$$

И такъ мы видимъ, что опредѣленіе коэффиціентовъ разложенія $U^{-\frac{s}{2}}$ въ этой формѣ приводится къ опредѣленію коэффиціентовъ $b_k^{(s)}$.

Дифференцируя выраженіе (57) относительно x, легко находимъ

$$\frac{dU^{-\frac{s}{2}}}{dx}=\frac{s}{2}\,m^s.\,n\left[1-nx\right]^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}\left[1-\frac{n}{x}\right]^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

Слѣдовательно

$$x\frac{dU^{-\frac{s}{2}}}{dx}=\frac{s}{2}\,m^s.\,n\left[1-n\,.\,x\right]^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}\left[1-\frac{n}{x}\right]^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

Такъ какъ выраженіе (57) справедливо для всякаго s, то поставивъ въ немъ $s+2$ на мѣсто s, получимъ

$$U^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}=m^{s+2}\left[1-n\,.\,x\right]^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}\left[1-\frac{n}{x}\right]^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

а потому

$$x\frac{dU^{-\frac{s}{2}}}{dx}=\frac{s}{2}\,m^{-2}.\,n\left(x-\frac{1}{x}\right)U^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} \qquad (60)$$

Выраженіе (57) можно представить въ видѣ

$$U^{-\frac{s}{2}}=m^{-2}.\,m^{s+2}\left(1-nx\right)\left(1-\frac{n}{x}\right)\left[1-n.x\right]^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}\left[1-\frac{n}{x}\right]^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

откуда легко выводимъ

$$\frac{s}{2}\,U^{-\frac{s}{2}}=\frac{s}{2}\,m^{-2}\left(1+n^2\right)U^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}-\frac{s}{2}\,m^{-2}.\,n\left(x+\frac{1}{x}\right)U^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

Сумма и разность этого выраженія съ выраженіемъ (60) имѣютъ видъ

$$\frac{s}{2}\,U^{-\frac{s}{2}} + x\,\frac{dU^{-\frac{s}{2}}}{dx} = \frac{s}{2}\,m^{-2}\,(1+n^2)\,U^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} - s\,.\,m^{-2}\,.\,\frac{n}{x}\,U^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

$$\frac{s}{2}\,U^{-\frac{s}{2}} - x\,\frac{dU^{-\frac{s}{2}}}{dx} = \frac{s}{2}\,m^{-2}\,(1+n^2)\,U^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} - s\,.\,m^{-2}\,.\,nx\,.\,U^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

По выраженію (59) составляемъ

$$U^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k^{(s+2)} x^k; \qquad x\,\frac{dU^{-\frac{s}{2}}}{dx} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} k b_k^{(s)}\,.\,x^k$$

Слѣдовательно два предыдущія уравненія можно представить въ видѣ

$$\sum \left(\frac{s}{2}+k\right) b_k^{(s)} \cdot x^k = \frac{s}{2}\,m^{-2}\,(1+n^2) \sum b_k^{(s+2)} \cdot x^k - s.m^{-2}.\,n \sum b_{k+1}^{(s+2)}\,.\,x^k$$

$$\sum \left(\frac{s}{2}-k\right) b_k^{(s)} \cdot x^k = \frac{s}{2}\,m^{-2}\,(1+n^2) \sum b_k^{(s+2)} \cdot x^k - s.m^{-2}.\,n \sum b_{k-1}^{(s+2)}\,.\,x^k$$

Сравнивая въ этихъ тождественныхъ уравненіяхъ коэффиціенты при одинакихъ степеняхъ x, имѣемъ

$$\left(\frac{s}{2}+k\right) b_k^{(s)} = \frac{s}{2}\,m^{-2}\,(1+n^2)\,b_k^{(s+2)} - s.m^{-2}.n.\,b_{k+1}^{(s+2)}$$

$$\left(\frac{s}{2}-k\right) b_k^{(s)} = \frac{s}{2}\,m^{-2}\,(1+n^2)\,b_k^{(s+2)} - s.m^{-2}.n.\,b_{k-1}^{(s+2)}$$

исключая изъ этихъ двухъ уравненій коэффиціентъ $b_k^{(s)}$, находимъ

$$0 = -k\,(1+n^2)\,b_k^{(s+2)} - n\left(\frac{s}{2}-k\right) b_{k+1}^{(s+2)} + n\left(\frac{s}{2}+k\right) b_{k-1}^{(s+2)}$$

Такъ какъ это справедливо для всякаго s, то поставивъ здѣсь $s-2$ на мѣсто s, получимъ

$$(61) \qquad 0 = k\,(1+n^2)\,b_k^{(s)} + n\left(\frac{s}{2}-1-k\right) b_{k+1}^{(s)} - n\left(\frac{s}{2}-1+k\right) b_{k-1}^{(s)}$$

Это уравненіе даетъ возможность опредѣлить всякій коэффиціентъ разложенія по двумъ начальнымъ.

На практикѣ удобнѣе пользоваться для этой цѣли другимъ выраженіемъ, имѣющимъ форму непрерывной дроби.

Полагая

$$\frac{b_k^{(s)}}{b_{k-1}^{(s)}} = q_k; \quad . \quad \frac{b_{k+1}^{(s)}}{b_k^{(s)}} = q_{k+1}$$

и помня, что

$$\frac{n}{1+n^2} = \frac{\sin p}{2}$$

легко приводимъ предыдущее уравненіе къ виду

$$0 = k . q_k + \left[\frac{s}{2} - k - 1\right] q_k . q_{k+1} \frac{\sin p}{2} - \left[\frac{s}{2} - 1 + k\right] \frac{\sin p}{2}$$

Пусть

$$\frac{2k + s - 2}{4k} \cdot \sin p = F_k$$

тогда предыдущее обращается въ

$$0 = \frac{q_k}{F_k} + \frac{q_k}{F_k} q_{k+1} \left[\frac{\frac{s}{2} - (k+1)}{2k}\right] \sin p - 1$$

Такъ какъ по сдѣланному означенію

$$F_{k+1} = \frac{k + \frac{s}{2}}{2(k+1)} \sin p$$

то положивъ

$$F_{k+1} \left[\frac{\frac{s}{2} - (k+1)}{k}\right] \frac{\sin p}{2} = \lambda_{k+1}$$

имѣемъ

$$0 = \frac{q_k}{F_k} + \frac{q_k . q_{k+1}}{F_k . F_{k+1}} \lambda_{k+1} - 1$$

Пусть

$$\frac{q_k}{F_k} = \gamma_k; \qquad \frac{q_{k+1}}{F_{k+1}} = \gamma_{k+1} \quad \text{и т. д.} \tag{62}$$

тогда предыдущее уравненіе принимаетъ видъ

$$0 = 1 - \gamma_k - \gamma_k . \gamma_{k+1} . \lambda_{k+1}$$

откуда

$$\gamma_k = \frac{1}{1 + \lambda_{k+1} . \gamma_{k+1}}$$

слѣдовательно

$$\gamma_{k-1} = \frac{1}{1 + \lambda_k . \gamma_k}; \qquad \gamma_{k-2} = \frac{1}{1 + \lambda_{k-1} . \gamma_{k-1}} \quad \text{и т. д.}$$

Внося въ выраженіе γ_{k-1} величину γ_k, получимъ

$$\gamma_{k-1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\lambda_k}{1 + \lambda_{k+1} \cdot \gamma_{k+1}}}$$

Замѣнивъ здѣсь γ_{k+1} его величиною, найдемъ

$$\gamma_{k-1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\lambda_k}{1 + \cfrac{\lambda_{k+1}}{1 + \lambda_{k+2} \cdot \gamma_{k+2}}}}$$

или

$$\gamma_{k-1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\lambda_k}{1 + \cfrac{\lambda_{k+1}}{1 + \cfrac{\lambda_{k+2}}{1 + \text{ и т. д.}}}}}$$

поставивъ здѣсь $k - 1$ на мѣсто k, будемъ имѣть форму для γ_{k-2} и т. д.

Если γ_k вычислено и потомъ по выраженіямъ (62) найдена величина q_k, то могутъ быть опредѣлены всѣ коэффиціенты разсматриваемаго разложенія. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что

$$\frac{b_k^{(s)}}{b_{k-1}^{(s)}} = q_k$$

но такъ какъ

$$b_{k-1}^{(s)} = b_{k-2}^{(s)} \cdot q_{k-1}$$

то

$$b_k^{(s)} = b_{k-2}^{(s)} \cdot q_{k-1} \cdot q_k$$

также

$$b_k^{(s)} = b_{k-3}^{(s)} \cdot q_{k-2} \cdot q_{k-1} \cdot q_k$$

и вообще

(62$_*$) $$b_k^{(s)} = b_0^{(s)} \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_4 \cdot \ldots \cdot q_{k-1} \cdot q_k$$

И такъ зная одинъ коэффиціентъ $b_0^{(s)}$, можно опредѣлить по этой формѣ сколько угодно другихъ.

При рѣшеніи нашего главнаго вопроса мы должны будемъ давать величинѣ s значенія цѣлыхъ, нечетныхъ чиселъ, т. е. полагать $s = 1, 3, 5 \ldots.$ Поэтому для полнаго рѣшенія вопроса необходимо найти значенія коэффиціентовъ $b_0^{(1)}$, $b_0^{(3)}$, $b_0^{(5)}$ и т. д. Это удобно сдѣлать на основаніи слѣдующихъ соображеній. Положимъ $\psi = 180^\circ - 2\psi'$, тогда функція U легко приведется къ виду

$$U = (1 + 2\alpha)\left[1 - \frac{4\alpha}{1 + 2\alpha} \sin^2 \psi'\right]$$

Если

$$\frac{4\alpha}{1+2\alpha}=\eta^2$$

то

$$U^{-\frac{s}{2}}=(1+2\alpha)^{-\frac{s}{2}}[1-\eta^2.\sin^2\psi']^{-\frac{s}{2}}$$

Но при замѣнѣ ψ чрезъ ψ', по сдѣланному теперь положенію рядъ (59_*) принимаетъ видъ

$$U^{-\frac{s}{2}}=b_0^{(s)}-2b_1^{(s)}\cos 2\psi'+2b_2^{(s)}\cos 4\psi'-2b_3^{(s)}\cos 6\psi'+\cdots\cdots$$

Слѣдовательно

$$(1+2\alpha)^{-\frac{s}{2}}[1-\eta^2.\sin^2\psi']^{-\frac{s}{2}}=b_0^{(s)}-2b_1^{(s)}\cos 2\psi'+2b_2^{(s)}\cos 4\psi'-\cdots \qquad (63)$$

Умноживъ это на $d\psi$ и взявъ интегралъ въ предѣлахъ 0 и π, получимъ

$$\pi b_0^{(s)}=(1+2\alpha)^{-\frac{s}{2}}\int_0^\pi[1-\eta^2.\sin^2\psi']^{-\frac{s}{2}}d\psi' \qquad (64)$$

поэтому

$$b_0^{(1)}=\frac{1}{\pi\sqrt{1+2\alpha}}\int_0^\pi\frac{d\psi'}{\sqrt{1-\eta^2.\sin^2\psi'}} \qquad (65)$$

Замѣтимъ, что существуетъ тождество вида

$$\int_0^\pi\frac{d\psi'}{\sqrt{1-\eta^2.\sin^2\psi'}}=\left(1-\frac{\eta^2}{2}\right)\int_0^\pi\frac{d\psi'}{(1-\eta^2.\sin^2\psi')^{\frac{3}{2}}}+\frac{\eta^2}{2}\int_0^\pi\frac{\cos 2\psi'.\,d\psi'}{(1-\eta^2.\sin^2\psi')^{\frac{3}{2}}} \qquad (66)$$

По выраженію (64) составляемъ

$$b_0^{(s)}=\frac{1}{\pi(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\pi\frac{d\psi'}{(1-\eta^2.\sin^2\psi')^{\frac{3}{2}}}$$

Умноживъ выраженіе (63) на $\cos 2\psi'.\,d\psi'$ и взявъ интегралъ въ предѣлахъ 0 и π, получимъ

$$-b_1^{(s)}=\frac{1}{\pi(1+2\alpha)^{\frac{s}{2}}}\int_0^\pi\frac{\cos 2\psi'.\,d\psi'}{(1-\eta^2.\sin^2\psi')^{\frac{s}{2}}}$$

Слѣдовательно

$$-b_1^{(s)}=\frac{1}{\pi(1+2\alpha)^{\frac{s}{2}}}\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\psi'.\,d\psi'}{(1-\eta^2.\sin^2\psi')^{\frac{s}{2}}}$$

а потому тождеству (66) можно дать видъ

$$b_0^{(1)}=(1+2\alpha)\left[\left(1-\frac{\eta^2}{2}\right)b_0^{(s)}-\frac{\eta^2}{2}\,b_1^{(s)}\right]$$

Но по выраженію (62) имѣемъ $b_1^{(s)}=b_0^{(s)}.\,q_1^{(s)}$. Слѣдовательно

$$b_0^{(1)}=(1+2\alpha)\left[1-\frac{\eta^2}{2}-\frac{\eta^2}{2}\cdot q_1^{(s)}\right]b_0^{(s)}$$

откуда

$$b_0^{(s)}=\frac{b_0^{(1)}}{(1+2\alpha)\left[1-\frac{\eta^2}{2}-\frac{\eta^2}{2}\cdot q_1^{(s)}\right]}$$

Увеличивая всѣ указатели двумя, составляемъ

$$b_0^{(5)}=\frac{b_0^{(s)}}{(1+2\alpha)\left[1-\frac{\eta^2}{2}\left(1+q_1^{(5)}\right)\right]}$$

и т. д.

Слѣдовательно мы можемъ опредѣлить $b_0^{(s)}$ для какаго угодно цѣлаго нечетнаго значенія s, если только будемъ знать $b_0^{(1)}$, а этотъ коеффиціентъ, какъ показываетъ выраженіе (65), зависитъ отъ интеграла совершенно извѣстнаго.

Кромѣ соотношенія (61) намъ будутъ необходимы нѣкоторыя другія, ему подобныя; ихъ теперь мы и составимъ. Такъ какъ

$$b_k^{(s)}=\frac{A_k^{(s)}}{2};\qquad x^k=e^{k\psi\sqrt{-1}}$$

то ряду (59) можно дать видъ

$$\left[1-\alpha.e^{\psi\sqrt{-1}}-\alpha.e^{-\psi\sqrt{-1}}\right]^{-\frac{s}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}A_k^{(s)}.\,e^{k\psi\sqrt{-1}} \tag{67}$$

Взявъ отъ этого выраженія производную по ψ, имѣемъ

$$-s\left[1-\alpha.e^{\psi\sqrt{-1}}-\alpha.e^{-\psi\sqrt{-1}}\right]^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}\left[\alpha.e^{-\psi\sqrt{-1}}-\alpha.e^{\psi\sqrt{-1}}\right]=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}kA_k^{(s)}.\,e^{k\psi\sqrt{-1}} \tag{68}$$

или

$$\frac{s\alpha}{2}\left[\sum A_k^{(s+2)} c^{(k+1)\psi\sqrt{-1}} - \sum A_k^{(s+2)} c^{(k-1)\psi\sqrt{-1}}\right] = \sum k A_k^{(s)} c^{k\psi\sqrt{-1}}$$

Такъ какъ здѣсь всѣ суммы берутся въ предѣлахъ $-\infty$ и $+\infty$, то предыдущее выраженіе не измѣнится, если въ первой его части и въ первой суммѣ поставимъ $k-1$ на мѣсто k, а во второй суммѣ измѣнимъ k на $k+1$. Тогда это выраженіе приметъ видъ

$$\frac{s\alpha}{2}\left[\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_{k-1}^{(s+2)} . c^{k\psi\sqrt{-1}} - \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_{k+1}^{(s+2)} . c^{k\psi\sqrt{-1}}\right] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} k A_k^{(s)} . c^{k\psi\sqrt{-1}}$$

Сравнивая въ этомъ тождественномъ выраженіи коэффиціенты при одинакихъ степеняхъ перемѣннаго, находимъ

$$A_k^{(s)} = \frac{s\alpha}{2k}\left[A_{k-1}^{(s+2)} - A_{k+1}^{(s+2)}\right] \tag{69}$$

Умножая уравненіе (68) на $1-\alpha . c^{\psi\sqrt{-1}} - \alpha . c^{-\psi\sqrt{-1}}$, получимъ

$$\frac{s\alpha}{2}\left[c^{\psi\sqrt{-1}} - c^{-\psi\sqrt{-1}}\right]\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k^{(s)} c^{k\psi\sqrt{-1}} =$$

$$\left[1-\alpha . c^{\psi\sqrt{-1}} - \alpha\, c^{-\psi\sqrt{-1}}\right]\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} k A_k^{(s)} c^{k\psi\sqrt{-1}}$$

что подобно предыдущему можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{s\alpha}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[A_{k-1}^{(s)} - A_{k+1}^{(s)}\right] c^{k\psi\sqrt{-1}} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[kA_k^{(s)} - \alpha(k-1)A_{k-1}^{(s)} - \alpha(k+1)A_{k+1}^{(s)}\right] c^{k\psi\sqrt{-1}}$$

откуда легко выводимъ

$$A_{k+1}^{(s)} = \frac{2kA_k^{(s)} - \alpha\,(2k-2+s)\,A_{k-1}^{(s)}}{\alpha\,(2k+2-s)} \tag{70}$$

Если въ выраженіи (69) поставимъ $k-1$ на мѣсто k, то будемъ имѣть

$$A_{k-1}^{(s)} = \frac{s . \alpha}{2\,(k-1)}\left[A_{k-2}^{(s+2)} - A_k^{(s+2)}\right] \tag{71}$$

Замѣняя въ выраженіи (70) указателя s чрезъ $s+2$, найдемъ

$$\frac{\alpha}{2}(s+2k)\,A_{k-1}^{(s+2)} - kA_k^{(s+2)} + \frac{\alpha}{2}(2k-s)\,A_{k+1}^{(s+2)} = 0 \tag{72}$$

перемѣнимъ здѣсь k на $k-1$, тогда получимъ

$$(73)\qquad \frac{\alpha}{2}(s+2k-2)A_{k-2}^{(s+2)}-(k-1)A_{k-1}^{(s+2)}+\frac{\alpha}{2}(2k-2-s)A_k^{(s+2)}=0$$

Исключая между уравненіями (69) и (72) коеффиціентъ $A_{k+1}^{(s+2)}$, найдемъ

$$(74)\qquad 2s.\alpha A_{k-1}^{(s+2)}-sA_k^{(s+2)}-(2k-s)A_k^{(s)}=0$$

исключая между этимъ и предыдущимъ уравненіемъ коеффиціентъ $A_{k-1}^{(s+2)}$, получимъ

$$s\alpha^2(s+2k-2)A_{k-2}^{(s+2)}-(2k-s)(k-1)A_k^{(s)}-s[(k-1)(1-2\alpha^2)+\alpha^2 s]A_k^{(s+2)}=0$$

исключимъ отсюда $A_{k-2}^{(s+2)}$ посредствомъ уравненія (71) и тогда будемъ имѣть

$$(75)\qquad A_k^{(s+2)}=\frac{2\alpha(s+2k-2)A_{k-1}^{(s)}-(2k-s)A_k^{(s)}}{s(1-4\alpha^2)}$$

Дифференцируя выраженіе (67) относительно α, легко находимъ

$$\frac{s}{2}\left[c^{\psi\sqrt{-1}}+c^{-\psi\sqrt{-1}}\right]\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}A_k^{(s+2)}c^{k\psi\sqrt{-1}}=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}c^{k\psi\sqrt{-1}}$$

но такъ какъ суммы берутся въ предѣлахъ $-\infty$ и $+\infty$, то это можно представить въ видѣ

$$\frac{s}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[A_{k-1}^{(s+2)}+A_{k+1}^{(s+2)}\right]c^{k\psi\sqrt{-1}}=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}c^{k\psi\sqrt{-1}}$$

Сравнивая въ этомъ уравненіи коеффиціенты при одинакихъ степеняхъ перемѣннаго, получимъ

$$(76)\qquad \frac{s}{2}\left[A_{k-1}^{(s+2)}+A_{k+1}^{(s+2)}\right]=\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}$$

Исключая отсюда $A_{k-1}^{(s+2)}$ посредствомъ выраженія (69), имѣемъ

$$(77)\qquad s\alpha A_{k+1}^{(s+2)}=\alpha\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}-kA_k^{(s)}$$

Исключеніе изъ тѣхъ же уравненій коеффиціента $A_{k+1}^{(s+2)}$ приводитъ къ

$$(78)\qquad s\alpha.A_{k-1}^{(s+2)}=\alpha\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}+kA_k^{(s)}$$

Исключая изъ уравненія (72) коэффиціентъ $A_{k+1}^{(s+2)}$ посредствомъ уравненія (77), получаемъ

$$\frac{\alpha}{2}(s+2k)A_{k-1}^{(s+2)} - kA_k^{(s+2)} = \frac{\alpha(s-2k)}{2s}\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha} - \frac{k(s-2k)}{2s}A_k^{(s)}$$

Если исключимъ отсюда $A_{k-1}^{(s+2)}$ посредствомъ уравненія (78), то легко найдемъ

$$sA_k^{(s+2)} = 2\alpha\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha} + sA_k^{(s)} \tag{79}$$

Поставивъ въ уравненіи (70) вездѣ $s+2$ на мѣсто s, имѣемъ

$$A_{k+1}^{(s+2)} = \frac{2kA_k^{(s+2)} - \alpha(2k+s)A_{k-1}^{(s+2)}}{\alpha(2k-s)}$$

Внося это въ уравненіе (69), легко находимъ

$$A_k^{(s)} = \frac{s}{(2k-s)}\left[2\alpha A_{k-1}^{(s+2)} - A_k^{(s+2)}\right] \tag{80}$$

Перемѣняя въ выраженіи (75) k на $-k$ и помня, что $A_{-k}^{(s)} = A_k^{(s)}$, имѣемъ

$$A_k^{(s+2)} = \frac{(2k+s)A_k^{(s)} - 2\alpha(2k+2-s)A_{k+1}^{(s)}}{s(1-4\alpha^2)} \tag{81}$$

Вотъ всѣ тѣ соотношенія между коэффиціентами, которыя ниже намъ будутъ необходимы. Составимъ наконецъ посредствомъ нихъ такія выраженія для $A_k^{(3)}$, $A_k^{(5)}$, $A_{k-1}^{(5)}$, $A_{k-2}^{(5)}$, которыя зависили бы отъ $A_k^{(1)}$ и $\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}$.

По выраженію (79) при $s=1$ имѣемъ

$$A_k^{(3)} = 2\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + A_k^{(1)} \tag{82}$$

по выраженію (81) при $s=3$ составляемъ

$$A_k^{(5)} = \frac{(2k+3)A_k^{(3)} - 2\alpha(2k-1)A_{k+1}^{(3)}}{3(1-4\alpha^2)} \tag{83}$$

Выраженіе (77) при $s=1$ даетъ

$$\alpha A_{k+1}^{(3)} = \alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - kA_k^{(1)}$$

Слѣдовательно

$$A_k^{(5)} = \frac{(2k+3)\,A_k^{(3)} - 2\,(2k-1)\left[\alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - kA_k^{(1)}\right]}{3\,(1-4\alpha^2)}$$

вноси сюда вмѣсто $A_k^{(3)}$ его предыдущую величину, находимъ

(84)
$$A_k^{(5)} = \frac{8\alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + (4k^2+3)\,A_k^{(1)}}{3\,(1-4\alpha^2)}$$

Уравненіе (80) при $s=3$ дастъ

(85)
$$A_{k-1}^{(5)} = \frac{1}{2\alpha}\,A_k^{(5)} + \frac{2k-3}{6\alpha}\,A_k^{(3)}$$

Наконецъ уравненіе (73) при $s=3$ дастъ

(86)
$$A_{k-2}^{(5)} = \frac{2\,(k-1)}{\alpha\,(2k+1)}\,A_{k-1}^{(5)} + \frac{5-2k}{2k+1}\,A_k^{(5)}$$

И такъ мы видимъ возможность опредѣлить числовыя величины коэффиціентовъ разложенія функціи $U^{-\frac{5}{2}}$, знаемъ кромѣ того различныя соотношенія между коэффиціентами этого общаго ряда. Посредствомъ этихъ коэффиціентовъ по выраженію (56) можно вычислить и коэффиціенты разложенія функціи $V^{-\frac{5}{2}}$. Это разложеніе, какъ мы знаемъ, представляется въ формѣ

$$V^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P_k^{(5)} \cos k\,(\zeta - \zeta' + \varphi)$$

или по выраженію (56)—въ видѣ

(87)
$$V^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[A_k^{(5)} + \alpha\varepsilon\,\frac{dA_k^{(5)}}{d\alpha} + \frac{\alpha^2\cdot\varepsilon^2}{1.2}\,\frac{d^2A_k^{(5)}}{d\alpha^2} + \cdots\cdots\right]\cos k\,(\zeta - \zeta' + \varphi)$$

Какъ скоро разложеніе функціи $V^{-\frac{5}{2}}$ выполнено, то можно считать извѣстнымъ составъ первой части пертурбаціонной функціи по формѣ (52).

7. Пояснимъ эти общія соображенія на частномъ примѣрѣ. Составимъ выраженіе пертурбаціонной функціи вѣрное до членовъ втораго порядка включительно. Мы приняли

$$h_k = \frac{2}{k}\,J_{\frac{k\varepsilon}{2}}^{(k)}$$

гдѣ

$$J^{(k)}_{\frac{ke}{2}} = \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^k}{1.2.3...k}\left[1 - \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^2}{1.(1+k)} + \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^4}{1.2.(k+1)(k+2)} - \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^6}{1.2.3.(k+1)(k+2)(k+3)} + \dots\right]$$

Слѣдовательно для $k = 1$ имѣемъ

$$h_1 = e\left[1 - \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{192} - \dots\right]; \qquad \frac{dh_1}{de} = 1 - \frac{3e^2}{8} + \frac{5}{192}e^4 - \dots$$

$$\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \dots; \quad \frac{h_1}{e}\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{5}{8}e^2 - \frac{11}{192}e^4 - \dots$$

а потому ограничиваясь членами втораго порядка относительно эксцентрисите́та, имѣемъ

$$\frac{dh_1}{de} = 1 - \frac{3}{8}e^2; \qquad \frac{dh'_1}{de'} = 1 - \frac{3}{8}e'^2$$

$$\frac{dh_1}{de}\cdot\frac{dh'_1}{de'} = 1 - \frac{3}{8}(e^2 + e'^2)$$

$$\frac{h_1}{e}\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{5}{8}e^2; \qquad \frac{h'_1}{e'}\sqrt{1-e'^2} = 1 - \frac{5}{8}e'^2$$

$$\frac{h_1 h'_1}{e.e'}\sqrt{1-e^2}.\sqrt{1-e'^2} = 1 - \frac{5}{8}(e^2 + e'^2)$$

Внося это въ выраженія (55) и ограничиваясь членами втораго порядка, легко получаемъ

$$(1+\epsilon)\cos\varphi = \left[1 - \frac{e^2+e'^2}{2}\right]F + (e^2+e'^2)\frac{G}{8}$$

$$(1+\epsilon)\sin\varphi = -\left[1 - \frac{e^2+e'^2}{2}\right]F + (e^2-e'^2)\frac{G_1}{8}$$

По общимъ выраженіямъ (37) видимъ, что G и G_1 суть величины втораго порядка, а потому послѣдніе члены предыдущихъ уравненій какъ величины четвертаго порядка должны быть отвергнуты; итакъ

$$(1+\epsilon)\cos\varphi = \left[1 - \frac{e^2+e'^2}{2}\right]F; \quad (1+\epsilon)\sin\varphi = -\left[1 - \frac{e^2+e'^2}{2}\right]F_1 \qquad (88)$$

откуда

$$(1+\epsilon)^2 = \left[1 - \frac{e^2+e'^2}{2}\right]^2.(F^2 + F_1^{\,2})$$

Но выраженіямъ (37), ограничиваясь членами втораго порядка, легко составляемъ

$$F^2 + F_1^{\,2} = 1 + 2\alpha$$

Но такъ какъ α по выраженіе (35) сама есть величина втораго порядка *), то слѣдуетъ принять

*) Эту величину α не слѣдуетъ смѣшивать съ $\alpha = \frac{aa'}{a^2 + a'^2}$.

$$(1+\varepsilon)^2 = 1 + 2\alpha - (e^2 + e'^2)$$

откуда легко выводимъ

$$\varepsilon = \alpha + \frac{e^2 + e'^2}{2}$$

Принимая во вниманіе выраженіе (35) и ограничиваясь въ немъ величинами втораго порядка, имѣемъ

(89) $$\varepsilon = -\frac{e^2 + e'^2}{2} - \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) + \frac{\sin i \,.\, \sin i'}{2}\cos(\theta - \theta')$$

Раздѣливъ выраженія (88) одно на другое, находимъ

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{F_1}{F}$$

но по выраженіямъ (37) составляемъ

$$F_1 = -\sin(\pi - \pi')\,[1 + \alpha - \beta\,.\,\operatorname{cotg}(\pi' - \pi)]$$
$$F = \cos(\pi - \pi')\,[1 + \alpha + \beta\,.\,\operatorname{tang}(\pi' - \pi)]$$

откуда ограничиваясь членами втораго порядка, имѣемъ

$$\frac{F_1}{F} = -\operatorname{tang}(\pi - \pi')\,[1 + \alpha - \beta\,.\,\operatorname{cotg}(\pi' - \pi)]\,[1 - \alpha - \beta\,.\,\operatorname{tang}(\pi' - \pi)]$$

или

$$\frac{F_1}{F} = -\operatorname{tang}(\pi - \pi') + \beta\,.\,\sec^2(\pi - \pi')$$

Слѣдовательно

$$\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}(\pi - \pi') = -\beta\,.\,\sec^2(\pi - \pi')$$

или

$$\sin[\varphi - (\pi - \pi')] = \frac{-\beta\,.\,\cos\varphi}{\cos(\pi - \pi')}$$

Изъ этого выраженія видно, что $\sin(\varphi - \pi + \pi')$ есть величина втораго порядка, а потому можно считать

$$\varphi - (\pi - \pi') = \frac{-\beta\,.\,\cos\varphi}{\cos(\pi - \pi')}$$

а такъ какъ разность между φ и $\pi - \pi'$ есть величина втораго порядка, то можно принимать $\cos\varphi = \cos(\pi - \pi')$, поэтому

$$\varphi = \pi - \pi' - \beta$$

или обращая вниманіе на выраженіе (34) и ограничиваясь величинами втораго порядка, имѣемъ

(90) $$\varphi = \pi - \pi' - \frac{\sin i\,.\,\sin i'}{2}\sin(\theta - \theta')$$

Имѣя все это, найдемъ выраженіе $V^{-\frac{s}{2}}$ вѣрное до членовъ втораго порядка включительно.

Означимъ чрезъ g среднюю долготу планеты и помня, что ζ есть соотвѣтствующая ей средняя аномалія, имѣемъ $\zeta = g - \pi$; $\zeta' = g' - \pi'$; такимъ образомъ

$$\zeta - \zeta' = g - g' - (\pi - \pi')$$

а слѣдовательно принимая во вниманіе соотношеніе (90), имѣемъ

$$\zeta - \zeta' + \varphi = g - g' + \lambda \tag{91}$$

гдѣ

$$\lambda = \varphi - (\pi - \pi') = -\frac{\sin i . \sin i'}{2} \sin(\theta - \theta') \tag{92}$$

Слѣдовательно λ есть величина втораго порядка. По соотношенію (91) выраженіе (55_*) принимаетъ видъ

$$V = 1 - 2\alpha(1 + \varepsilon)\cos(g - g' + \lambda)$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{aa'}{a^2 + a'^2}$$

Пусть

$$V_0 = 1 - 2\alpha(1 + \varepsilon)\cos(g - g')$$

Слѣдовательно

$$V^{-\frac{s}{2}} = V_0^{-\frac{s}{2}} + \frac{dV_0^{-\frac{s}{2}}}{d(g - g')} \cdot \lambda + \frac{d^2 V_0^{-\frac{s}{2}}}{d(g - g')^2} \cdot \frac{\lambda^2}{1.2} + \cdots\cdots$$

кромѣ того по выраженію (87) заключаемъ, что

$$V_0^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[A_k^{(s)} + \alpha\varepsilon\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha} + \frac{\alpha^2 . \varepsilon^2}{1.2}\frac{d^2 A_k^{(s)}}{d\alpha^2} + \cdots\cdots\right]\cos k(g - g')$$

но такъ какъ мы имѣемъ въ виду ограничиться членами втораго порядка, то помня что по выраженію (89) ε сама есть величина втораго порядка, мы должны принять

$$V^{-\frac{s}{2}} = V_0^{-\frac{s}{2}} + \lambda\frac{dV_0^{-\frac{s}{2}}}{d(g - g')}$$

$$V_0^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[A_k^{(s)} + \alpha\varepsilon\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}\right]\cos k(g - g')$$

Слѣдовательно

$$\frac{dV_0^{-\frac{s}{2}}}{d(g - g')} = -\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} k\left[A_k^{(s)} + \alpha\varepsilon\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}\right]\sin k(g - g')$$

И такъ принимая во вниманіе составъ λ, по первому изъ предыдущихъ выраженій имѣемъ

$$V^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2}\sum\left[A_k^{(s)} + \alpha\varepsilon\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}\right]\cos k(g-g')$$

$$+\frac{1}{4}\sin i.\sin i'.\sin(\theta-\theta')\sum k\left[A_k^{(s)} + \alpha\varepsilon\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}\right]\sin k(g-g')$$

такъ какъ произведеніе $\varepsilon.\sin i.\sin i'$ есть величина четвертаго порядка, то послѣдній членъ этого выраженія по условію долженъ быть отвергнутъ и тогда

$$V^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2}\sum\left[A_k^{(s)} + \alpha\varepsilon\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}\right]\cos k(g-g')$$

$$+\frac{1}{4}\sin i.\sin i'.\sin(\theta-\theta')\sum kA_k^{(s)}\sin k(g-g')$$

Внося сюда вмѣсто ε его величину изъ выраженія (89), имѣемъ

$$V^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[A_k^{(s)} - \left\{\frac{e^2+e'^2}{2} + \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\alpha\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}\right]\cos k(g-g')$$

$$+\frac{1}{4}\sin i.\sin i'.\cos(\theta-\theta')\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\alpha\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}\cos k(g-g')$$

$$+\frac{1}{4}\sin i.\sin i'.\sin(\theta-\theta')\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}kA_k^{(s)}\sin k(g-g')$$

или

$$V^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2}\sum\left[A_k^{(s)} - \left\{\frac{e^2+e'^2}{2} + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\alpha\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}\right]\cos k(g-g')$$

$$+\frac{1}{8}\sin i.\sin i'\sum\left[\alpha\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha} - kA_k^{(s)}\right]\cos(kg-kg'+\theta-\theta')$$

$$+\frac{1}{8}\sin i.\sin i'\sum\left[\alpha\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha} + kA_k^{(s)}\right]\cos(kg-kg'-\theta+\theta')$$

Такъ какъ входящія сюда суммы берутся по k отъ $-\infty$ до $+\infty$, то въ послѣднемъ членѣ подъ знакомъ суммы можемъ поставить $-k$ на мѣсто k, тогда замѣтивъ, что

$$A_{-k}^{(s)} = A_k^{(s)}; \qquad \frac{dA_{-k}^{(s)}}{d\alpha} = \frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}$$

получимъ

$$V^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[A_k^{(s)} - \left\{\frac{e^2+e'^2}{2} + \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\alpha\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}\right]\cos k\,(g-g')$$

$$+\frac{1}{4}\sin i\,.\sin i'\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[\alpha\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha} - kA_k^{(s)}\right]\cos(kg-kg'+\theta-\theta')$$

что по соотношеніе (77) приводится къ виду

$$V^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[A_k^{(s)} - \left\{\frac{e^2+e'^2}{2} + \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\alpha\frac{dA_k^{(s)}}{d\alpha}\right]\cos k\,(g-g')$$

$$+\frac{1}{4}\sin i\,.\sin i'\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\alpha s\,.\,A_{k+1}^{(s+2)}\cos[k(g-g')+\theta-\theta'] \tag{93}$$

Составимъ теперь для первой части пертурбаціонной функціи выраженіе вѣрное до членовъ втораго порядка включительно. Для этого будемъ пользоваться общей формой (52). Мы увидимъ, что для нашей цѣли достаточно изъ ряда (52) удержать три первые члена, а потому по общимъ выраженіямъ (53) и (54) составимъ сначала функцію W, а потомъ W^2.

Такъ какъ, ограничиваясь членами втораго порядка включительно, мы принимаемъ

$$h_1 = e\left(1-\frac{e^2}{8}\right); \qquad h_2 = J_e^{(2)} = \frac{e^2}{2}\left(1-\frac{e^2}{3}\right)$$

то второе и третье изъ выраженій (53), для $k=1$, принимаютъ видъ

$$-3e'\left[1-\frac{3e^2}{8}\right](F+G) = A_1\cos a_1\,; \qquad 3e'\left[1-\frac{e^2}{8}\right](F_1+G_1) = A_1\sin a_1$$

Понятно, что при нашемъ условіи здѣсь надо считать

$$F=\cos(\pi-\pi'); \qquad G=0; \qquad F_1=-\sin(\pi-\pi'); \qquad G_1=0$$

Слѣдовательно вѣрно до членовъ втораго порядка включительно имѣемъ

$$A_1\cos a_1 = -3e'.\cos(\pi-\pi'); \qquad A_1\sin a_1 = -3e'.\sin(\pi-\pi')$$

откуда заключаемъ, что

$$A_1 = -3e'; \qquad a_1 = \pi-\pi'$$

тѣ же общія выраженія при $k=2$ даютъ

$$A_2\cos a_2 = -\frac{3}{2}ee'.(F+G)\,; \qquad A_2\sin a_2 = -\frac{3}{2}ee'.(F_1+G_1)$$

или

$$A_2\cos a_2 = -\frac{3}{2}ee'.\cos(\pi-\pi'); \qquad A_2\sin a_2 = -\frac{3}{2}ee'.\sin(\pi-\pi')$$

Слѣдовательно

$$A_2 = -\frac{3}{2}\,ee'; \qquad a_2 = \pi - \pi'$$

Что касается до значеній A соотвѣтствующихъ дальнѣйшимъ указателямъ, т. е. указателямъ $k = 3, 4$ и т. д., то эти значенія будутъ третьяго и высшихъ порядковъ, а потому должны быть отвергнуты.

Совершенно подобно этому по четвертому и пятому изъ выраженій (53) составляемъ

$$B_1 = 3e; \qquad b_1 = \pi - \pi'; \qquad B_2 = \frac{3}{2}\,ee'; \qquad b_2 = \pi - \pi'$$

Составляя различныя значенія H и c по шестому и седьмому изъ выраженій (53), достаточно разсматривать только слѣдующія комбинаціи указателей k и k':

$$k = 1;\ k' = 2;\ k = 1;\ k' = 3;\ k = 2;\ k' = 1;\ k = 2;\ k' = 2;\ k = 3;\ k' = 1$$

Значенія H для всѣхъ другихъ сочетаній указателей будутъ величины третьяго и высшихъ порядковъ, а потому должны быть отвергнуты. И такъ для $k = 1$ и $k' = 2$ шестое и седьмое изъ уравненій (53) принимаютъ видъ

$$\frac{e'}{2}\left[1 - \frac{3e^2}{8}\right](F + G) + \frac{e'}{2}\left[1 - \frac{5}{8}\,e^2\right]\sqrt{1 - e'^2}\,(F - G) = 2H_{1,2}\cos c_{1,2}$$

$$-\frac{e'}{2}\left[1 - \frac{5e^2}{8}\right](F_1 + G_1) + \frac{e'}{2}\left[1 - \frac{3}{8}\,e^2\right]\sqrt{1 - e'^2}\,(F_1 - G_1) = 2H_{1,2}\sin c_{1,2}$$

Такъ какъ G и G_1 сами суть величины втораго порядка, то члены, зависящіе отъ нихъ, не будутъ ниже третьяго порядка и потому должны быть отвергнуты, тогда предыдущія уравненія принимаютъ видъ

$$e'.F = 2H_{1,2}\cos c_{1,2}; \qquad -e'.F_1 = 2H_{1,2}\sin c_{1,2}$$

или

$$e'.\cos(\pi - \pi') = 2H_{1,2}\cos c_{1,2}; \qquad e'.\sin(\pi - \pi') = 2H_{1,2}\sin c_{1,2}$$

Слѣдовательно

$$H_{1,2} = \frac{e'}{2}; \qquad c_{1,2} = \pi - \pi'$$

Совершенно подобнымъ же образомъ найдемъ

$$H_{1,3} = \frac{3}{8}\,e'^2; \qquad H_{2,1} = \frac{e}{2}; \qquad H_{2,2} = \frac{ee'}{4}; \qquad H_{3,1} = \frac{3}{8}\,e^2$$

$$c_{1,3} = c_{2,1} = c_{2,2} = c_{3,1} = \pi - \pi'$$

Что касается значенія H соотвѣтствующаго комбинаціи указателей $k = 1$ и $k' = 1$, то членъ содержащій это значеніе включенъ въ функцію V и здѣсь разсматриваемъ быть не долженъ.

Изъ значеній L и M должны быть опредѣлены только тѣ, которыя соотвѣтствуютъ указателямъ $k = 1$ и $k' = 1$, другія значенія суть величины третьяго и

высшихъ порядковъ. При $k = 1$ и $k' = 1$ по восьмому изъ выраженій (53) составляемъ

$$2L_{1,1} = \left[1 - \frac{3e^2}{8} - \frac{3e'^2}{8}\right](F + G) - \left[1 - \frac{5e^2}{8} - \frac{5e'^2}{8}\right](F - G)$$

откуда легко находимъ

$$L_{1,1} = G + \frac{e^2 + e'^2}{8} \cdot F$$

обращая вниманіе на выраженія (37) и ограничиваясь членами втораго порядка, отсюда находимъ

$$L_{1,1} = \frac{e^2 + e'^2}{8} \cos(\pi - \pi') - \frac{\sin i \,.\, \sin i'}{2} \cos(\pi + \pi' - \theta - \theta')$$

$$+ \left[\sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right] \cos(\theta - \theta') \cos(\pi + \pi' - \theta - \theta')$$

$$+ \left[\sin^2\left(\frac{i}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right] \sin(\theta - \theta') \sin(\pi + \pi' - \theta - \theta')$$

или

$$L_{1,1} = \frac{e^2 + e'^2}{8} \cos(\pi - \pi') - \frac{\sin i \,.\, \sin i'}{2} \cos(\pi + \pi' - \theta - \theta')$$

$$+ \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) \cos(\pi + \pi' - 2\theta) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) \cos(\pi + \pi' - 2\theta')$$

Совершенно подобнымъ же образомъ по послѣднему изъ выраженій (53) имѣемъ

$$M_{1,1} = \frac{e^2 - e'^2}{8} \sin(\pi - \pi') - \frac{\sin i \,.\, \sin i'}{2} \sin(\pi + \pi' - \theta - \theta')$$

$$+ \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) \sin(\pi + \pi' - 2\theta) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) \sin(\pi + \pi' - 2\theta')$$

Итакъ ограничиваясь членами втораго порядка, мы даемъ выраженію (54) видъ

$$W = E + \frac{2a}{a'} h_1 \cos\zeta + \frac{a}{a'} h_2 \cos 2\zeta + 2\frac{a'}{a} h_1' \cos\zeta' + \frac{a'}{a} h_2' \cos 2\zeta'$$

$$+ A_1 \cos(a_1 + \zeta) + A_2 \cos(a_2 + 2\zeta) - B_1 \cos(b_1 - \zeta') - B_2 \cos(b_2 - 2\zeta')$$

$$+ 2H_{1,2} \cos(\zeta - 2\zeta' + c_{1,2}) + 2H_{1,3} \cos(\zeta - 3\zeta' + c_{1,3})$$

$$+ 2H_{2,1} \cos(2\zeta - \zeta' + c_{2,1}) + 2H_{2,2} \cos(2\zeta - 2\zeta' + c_{2,2})$$

$$+ 2H_{3,1} \cos(3\zeta - \zeta' + c_{3,1})$$

$$+ 2L_{1,1} \cos(\zeta + \zeta') + 2M_{1,1} \sin(\zeta + \zeta')$$

принимая во вниманіе выше найденныя значенія A, B, H, L, M, a, b и c для разныхъ указателей, внося вмѣсто E его величину изъ перваго изъ уравненій (53) и вводя вмѣсто среднихъ аномалій среднія долготы g и g', легко получаемъ

$$\frac{1}{2}W = -\frac{3}{4}\frac{a}{a'}e^2 - \frac{3}{4}\frac{a'}{a}e'^2 - \frac{9}{4}ee'\cos(\pi-\pi')$$
$$+\frac{a}{a'}e.\cos(g-\pi)+\frac{1}{4}\frac{a}{a'}e^2\cos 2(g-\pi)$$
$$+\frac{a'}{a}e'.\cos(g'-\pi')+\frac{1}{4}\frac{a'}{a}e'^2\cos 2(g'-\pi')$$
$$-\frac{3}{4}ee'.\cos(2g-\pi-\pi')-\frac{3}{2}e\cos(g'-\pi)-\frac{3}{2}e'\cos(g-\pi')$$
$$-\frac{3}{4}ee'.\cos(2g'-\pi-\pi')+\frac{e'}{2}\cos(g-2g'+\pi')+\frac{e}{2}\cos(2g-g'-\pi)$$
$$+\frac{3}{8}e^2.\cos(3g-g'-2\pi)+\frac{3}{8}e'^2\cos(g-3g'+2\pi')$$
$$+\frac{ee'}{4}\cos(2g-2g'-\pi+\pi')+\frac{e^2}{8}\cos(g+g'-2\pi)+\frac{e'^2}{8}\cos(g+g'-2\pi')$$
$$+\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\cos(g+g'-2\theta)+\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\cos(g+g'-2\theta')$$
$$-\frac{\sin i.\sin i'}{2}\cos(g+g'-\theta-\theta')$$

При составленіи функціи $\frac{1}{4}W^2$ изъ этого выраженія придется взять только слѣдующіе члены

$$\frac{a}{a'}e.\cos(g-\pi)+\frac{a'}{a}e'.\cos(g'-\pi')-\frac{3}{2}e.\cos(g'-\pi)-\frac{3}{2}e'.\cos(g-\pi')$$
$$+\frac{e'}{2}\cos(g-2g'+\pi')+\frac{e}{2}\cos(2g-g'-\pi)$$

Квадратъ этой суммы при нашемъ условіи представитъ собою функцію $\frac{1}{4}W^2$. И такъ

$$\frac{1}{4}W^2 = \frac{a}{a'}e^2.\cos(g-\pi)+2ee'.\cos(g-\pi)\cos(g'-\pi')+\frac{a'^2}{a^2}e'^2.\cos^2(g'-\pi')$$
$$+\frac{9}{4}e^2.\cos^2(g'-\pi)+\frac{9}{4}e'^2.\cos^2(g-\pi')+\frac{e'^2}{4}\cos^2(g-2g'+\pi')$$
$$+\frac{e^2}{4}\cos(2g-g'-\pi)-3\frac{a}{a'}e^2.\cos(g-\pi)\cos(g'-\pi)-\frac{3a'}{a}ee'.\cos(g'-\pi')\cos(g'-\pi)$$
$$-\frac{3a}{a'}ee'.\cos(g-\pi)\cos(g-\pi')-\frac{3a'}{a}e'^2.\cos(g'-\pi')\cos(g-\pi')$$
$$+\frac{9}{2}ee'.\cos(g'-\pi)\cos(g-\pi')+\frac{a}{a'}ee'.\cos(g-\pi)\cos(g-2g'+\pi')$$
$$+\frac{a'}{a}e'^2.\cos(g'-\pi')\cos(g-2g'+\pi')-\frac{3}{2}ee'.\cos(g'-\pi)\cos(g-2g'+\pi')$$
$$-\frac{3}{2}e'^2.\cos(g-\pi')\cos(g-2g'+\pi')+\frac{a}{a'}e^2.\cos(g-\pi)\cos(2g-g'-\pi)$$
$$+\frac{a'}{a}ee'.\cos(g'-\pi')\cos(2g-g'-\pi)-\frac{3}{2}e^2.\cos(g'-\pi)\cos(2g-g'-\pi)$$
$$-\frac{3}{2}ee'.\cos(g-\pi')\cos(2g-g'-\pi)+\frac{ee'}{2}\cos(g-2g'+\pi')\cos(2g-g'-\pi)$$

что легко преобразуется въ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}W^2=\frac{3}{4}\frac{a^2}{a'^2}e^2+\frac{3}{4}\frac{a'^2}{a^2}e'^2+\frac{15}{8}(e^2+e'^2)-\frac{9}{4}\frac{1}{\alpha}ee'.\cos(\pi-\pi')$$
$$+\left(\frac{3}{4}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{9}{8}\right)e^2.\cos 2(g-\pi)+\left(\frac{3}{4}\frac{a'^2}{a^2}-\frac{9}{8}\right)e'^2.\cos 2(g'-\pi')$$
$$+\frac{27}{16}e'^2.\cos 2(g-\pi')+\frac{27}{16}e^2.\cos 2(g'-\pi)+\frac{21}{4}ee'.\cos(g+g'-\pi-\pi')$$
$$-\frac{3}{4}ee'.\cos(g-g'-\pi+\pi')+\left(\frac{3}{4}\frac{a'}{a}-\frac{9}{4}\frac{a}{a'}\right)ee'.\cos(2g-\pi-\pi')$$
$$+\left(\frac{3}{4}\frac{a}{a'}-\frac{9}{4}\frac{a'}{a}\right)ee'.\cos(2g'-\pi-\pi')-\frac{9}{4}e^2.\cos(g+g'-2\pi)$$
$$-\frac{9}{4}\frac{a'}{a}e'^2.\cos(g+g'-2\pi')-\frac{9}{8}(e^2+e'^2)\cos 2(g-g')$$
$$-\frac{3}{2}\left(\frac{a}{a'}e^2+\frac{a'}{a}e'^2\right)\cos(g-g')+\frac{27}{8}ee'.\cos(g-g'+\pi-\pi')$$
$$+\frac{3}{4}\frac{1}{\alpha}ee'.\cos(2g-2g'-\pi+\pi')+\frac{3}{8}ee'.\cos(3g-3g'-\pi+\pi')$$
$$+\frac{3}{4}\frac{a'}{a}e'^2.\cos(g-3g'+2\pi')+\frac{3}{4}\frac{a}{a'}e^2.\cos(3g-g'-2\pi)$$
$$-\frac{9}{8}ee'.\cos(g-3g'+\pi+\pi')-\frac{9}{8}ee'.\cos(3g-g'-\pi-\pi')$$
$$+\frac{3}{16}e^2.\cos(4g-2g'-2\pi)+\frac{3}{16}e'^2.\cos(2g-4g'+2\pi')$$

гдѣ, какъ прежде, $\alpha=\dfrac{aa'}{a^2+a'^2}$.

Имѣя все это, составимъ функцію R_1. Прежде всего замѣтимъ, что полагая $s=1$, изъ выраженія (93) имѣемъ

$$V^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[A_k^{(1)}-\left\{\frac{e^2+e'^2}{2}+\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}\right]\cos k(g-g')$$
$$+\frac{1}{4}\sin i.\sin i'\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\alpha A_{k+1}^{(3)}\cos(kg-kg'+\theta-\theta')$$

Такъ какъ функціи $\frac{1}{2}W$ и $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}W^2$ сами суть величины втораго порядка, то въ множителяхъ $V^{-\frac{3}{2}}$ и $V^{-\frac{5}{2}}$ должны быть удержаны только члены нулеваго порядка относительно эксцентриситетовъ и наклоненій. И такъ дѣлая въ выраженіи (93) послѣдовательно $s=3$ и $s=5$, мы должны для нашей цѣли считать

$$V^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}A_k^{(3)}\cos k(g-g')\,;\qquad V^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}A_k^{(5)}\cos k(g-g')$$

Слѣдовательно по выраженію (52) имѣемъ

$$R_1 = \frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[A_k^{(1)} - \left\{\frac{e^2+e'^2}{2} + \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}\right]\cos k(g-g')\right.$$

$$(94) \qquad + \frac{1}{4}\sin i \,.\, \sin i' \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \alpha A_{k+1}^{(s)} \cos\left[k(g-g') + \theta - \theta'\right]$$

$$\left. + \frac{1}{2}W\frac{\alpha}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k^{(s)} \cos k(g-g') + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}W^2\frac{\alpha^2}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k^{(s)}\cos k(g-g')\right]$$

Это весьма сложное по виду выраженіе приводится къ сравнительно не многимъ членамъ зависящимъ отъ различныхъ аргументовъ. Чтобы показать способъ соединенія членовъ принадлежащихъ одному и тому же аргументу, найдемъ общее выраженіе для

$$\cos(pg - qg' + \beta)\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k^{(s)} \cos k(g-g')$$

Понятно, что это можетъ быть представлено въ формѣ

$$\frac{1}{2}\sum A_k^{(s)}\cos[(k+p)g - (k+q)g' + \beta] + \frac{1}{2}\sum A_k^{(s)}\cos[(k-p)g - (k-q)g' - \beta]$$

такъ какъ суммы берутся по k въ предѣлахъ $-\infty$ и $+\infty$, то въ послѣднемъ членѣ, не измѣняя его величины, можно поставить $-k$ на мѣсто k, тогда этотъ членъ приметъ видъ

$$\frac{1}{2}\sum A_{-k}^{(s)}\cos[(k+p)g - (k+q)g' + \beta]$$

но такъ какъ $A_{-k}^{(s)} = A_k^{(s)}$, то этотъ членъ сравнивается съ первымъ и мы имѣемъ

$$\cos(pg - qg' + \beta)\sum A_k \cos k(g-g') = \sum A_k^{(s)}\cos[(k+p)g - (k+q)g' + \beta]$$

поставивъ во второй части $k-q$ на мѣсто k, получимъ

$$(95) \quad \cos(pg - qg' + \beta)\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k^{(s)}\cos k(g-g') = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_{k-q}^{(s)}\cos[k(g-g') + (p-q)g + \beta]$$

Этимъ выраженіемъ мы и будемъ пользоваться, соединяя члены функціи R_1, принадлежащіе одному аргументу.

Всѣ члены въ выраженіи R_1, зависящіе отъ аргумента $k(g-g')$, суть

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\left[\frac{1}{2}\sum\left\{A_k^{(1)}-\left\{\frac{e^2+e'^2}{2}+\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}\right\}\cos k(g-g')\right.$$

$$-\frac{3}{8}\frac{a}{a'}e^2\alpha\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')-\frac{3}{8}\frac{a'}{a}e'^2\alpha\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')$$

$$+\frac{3}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2\alpha^2\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')+\frac{3}{8}\frac{a'^2}{a^2}e'^2\alpha^2\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')$$

$$+(e^2+e'^2)\left\{\frac{15}{16}\alpha^2\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')-\frac{9}{16}\alpha^2\cos 2(g-g')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')\right\}$$

$$\left.-\frac{3}{4}\left(\frac{a}{a'}e^2+\frac{a'}{a}e'^2\right)\alpha^2.\cos(g-g')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')\right]$$

изъ этой суммы только два послѣдніе члена подлежатъ преобразованію по выраженію (95).

Для преобразованія предпослѣдняго члена, въ выраженіи (95) положимъ $s=5$, $\beta=0$, $p=q=2$, тогда получимъ

$$\cos 2(g-g')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')=\sum A_{k-2}^{(5)}\cos k(g-g')$$

полагая въ томъ же общемъ выраженіи (95) $\beta=0$, $p=q=1$, найдемъ для преобразованія послѣдняго члена

$$\cos(g-g')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')=\sum A_{k-1}^{(5)}\cos k(g-g')$$

и такъ предыдущая сумма приводится къ виду

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\left[\frac{1}{2}\sum A_k^{(1)}\cos k(g-g')+\frac{1}{2}\left\{\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\sum\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}\cos k(g-g')\right.$$

$$+\frac{e^2+e'^2}{4}\sum\left[\frac{15}{4}\alpha^2A_k^{(5)}-\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}-\frac{9}{4}\alpha^2A_{k-2}^{(5)}\right]\cos k(g-g')$$

$$+\alpha\frac{e^2}{4}\frac{a}{a'}\sum\left[\frac{3\alpha}{2}\frac{a}{a'}A_k^{(5)}-\frac{3}{2}A_k^{(3)}-3\alpha A_{k-1}^{(5)}\right]\cos k(g-g') \tag{96}$$

$$\left.+\alpha\frac{e'^2}{4}\frac{a'}{a}\sum\left[\frac{3\alpha}{2}\frac{a'}{a}A_k^{(5)}-\frac{3}{2}A_k^{(3)}-3\alpha A_{k-1}^{(5)}\right]\cos k(g-g')\right]$$

такова форма членовъ зависящихъ отъ аргумента $k(g-g')$.

Члены выраженія (94) зависящіе отъ аргумента $k(g-g')+g-\pi$ суть:

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\left[\frac{a}{a'}\frac{\alpha}{2}e.\cos(g-\pi)\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')+\frac{3}{4}\alpha e.\cos(g'-\pi)\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{4}e.\cos(2g-g'-\pi)\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')\right]$$

Для преобразованія перваго члена, въ выраженіи (95) положимъ $p = 1$, $q = 0$, $\beta = -\pi$; для преобразованія втораго пусть $p = 0$, $q = -1$, $\beta = -\pi$; наконецъ—третьяго $p = 2$, $q = 1$, $\beta = -\pi$, тогда предыдущее обращается въ

$$(97) \qquad \frac{\mu'}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \frac{e\alpha}{2} \sum \left\{ \frac{a}{a'} A_k^{(3)} - \frac{3}{2} A_{k+1}^{(3)} + \frac{1}{2} A_{k-1}^{(3)} \right\} \cos\left[k(g - g') + g - \pi\right]$$

это и есть членъ зависящій отъ аргумента $k(g - g') + g - \pi$.

Члены выраженія (94), зависящіе отъ аргумента $k(g - g') + g - \pi'$, суть

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \frac{e'\alpha}{2} \left[\frac{a'}{a} \cos(g' - \pi') \sum A_k^{(3)} \cos k(g - g') - \frac{3}{2} \cos(g - \pi') \sum A_k^{(3)} \cos k(g - g') \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \cos(g - 2g' + \pi') \sum A_k^{(3)} \cos k(g - g') \right]$$

для преобразованія перваго изъ этихъ членовъ въ выраженіи (95) примемъ $q = -1$, $p = 0$, $\beta = -\pi'$, втораго $p = 1$, $q = 0$, $\beta = -\pi'$ и третьяго $p = 1$, $q = 2$, $\beta = \pi'$, кромѣ того послѣ преобразованія въ третьемъ членѣ поставимъ $-k$ на мѣсто k и тогда получимъ

$$(98) \qquad \frac{\mu'}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \frac{e'\alpha}{2} \sum \left[\frac{a'}{a} A_{k+1}^{(3)} - \frac{3}{2} A_k^{(3)} + \frac{1}{2} A_{k+2}^{(3)} \right] \cos\left[k(g - g') + g - \pi'\right]$$

таковъ членъ зависящій отъ аргумента $k(g - g') + g - \pi'$.

Отъ аргумента $k(g - g') + \pi - \pi'$ въ выраженіи R_1 зависятъ слѣдующіе члены

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \frac{ee'}{2} \left[\frac{9}{4} \alpha . \cos(\pi - \pi') \sum A_k^{(3)} \cos k(g - g') + \frac{\alpha}{4} \cos[2(g - g') - \pi + \pi'] \sum A_k^{(5)} \cos k(g - g') \right.$$
$$+ \frac{9}{4} \alpha . \cos(\pi - \pi') \sum A_k^{(5)} \cos k(g - g') - \frac{3}{4} \alpha^2 . \cos(g - g' - \pi + \pi') \sum A_k^{(5)} \cos k(g - g')$$
$$+ \frac{27}{8} \alpha^2 . \cos(g - g' + \pi - \pi') \sum A_k^{(5)} \cos k(g - g') + \frac{3}{4} \alpha . \cos[2(g - g') - \pi + \pi'] \sum A_k^{(5)} \cos k(g - g')$$
$$\left. + \frac{3}{8} \alpha^2 . \cos[3(g - g') - \pi + \pi'] \sum A_k^{(5)} \cos k(g - g') \right]$$

Въ выраженіи (95) для перваго члена слѣдуетъ положить: $s = 3$, $p = 0$, $q = 0$, $\beta = \pi - \pi'$; для втораго $s = 5$, $p = q = 2$, $\beta = -(\pi - \pi')$ и послѣ преобразованія перемѣнить k на $-k$; для третьяго члена слѣдуетъ принять $s = 5$, $p = q = 0$, $\beta = \pi - \pi'$; для четвертаго $s = 5$, $p = q = 1$, $\beta = -(\pi - \pi')$, для пятаго $s = 5$, $p = q = 1$, $\beta = \pi - \pi'$; для шестаго $s = 5$, $p = q = 2$, $\beta = -(\pi - \pi')$ и перемѣнить k на $-k$. Такимъ образомъ приведемъ предыдущую сумму къ виду

$$(99) \qquad \frac{\mu'}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \frac{ee'}{2} \sum \left[\frac{9}{4} \alpha A_k^{(3)} + \frac{\alpha}{4} A_{k+2}^{(3)} - \frac{9}{4} \alpha A_k^{(5)} - \frac{3}{4} \alpha^2 A_{k+1}^{(5)} \right.$$
$$\left. + \frac{27}{8} \alpha^2 A_{k-1}^{(5)} + \frac{3}{4} \alpha A_{k+2}^{(5)} + \frac{3}{8} \alpha^2 A_{k+3}^{(5)} \right] \cos\left[k(g - g') + \pi - \pi'\right]$$

это и есть сумма членовъ выраженія R_1, зависящая отъ аргумента $k(g - g') + \pi - \pi'$.

Часть выраженія R_1, зависящая отъ аргумента $k(g-g')+2g-(\pi+\pi')$, есть

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{ee'}{2}\Bigg[-\frac{3}{4}\alpha.\cos(2g-\pi-\pi')\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')$$

$$-\frac{3}{4}\alpha.\cos(2g'-\pi-\pi')\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')$$

$$+\frac{21}{4}\alpha^2.\cos(g+g'-\pi-\pi')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{a'}{a}-\frac{9}{4}\frac{a}{a'}\right)\alpha^2.\cos(2g-\pi-\pi')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{a}{a'}-\frac{9}{4}\frac{a'}{a}\right)\alpha^2.\cos(2g'-\pi-\pi')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')$$

$$-\frac{9}{8}\alpha^2.\cos(g-3g'+\pi+\pi')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')\Bigg]$$

Для преобразованія входящихъ сюда аргументовъ примемъ въ выраженіи (95) послѣдовательно

1) $p=2;\quad q=0;\quad \beta=-\pi-\pi';\quad s=3$
2) $p=0;\quad q=-2;\quad \beta=-\pi-\pi';\quad s=3$
3) $p=1;\quad q=-1;\quad \beta=-\pi-\pi';\quad s=5$
4) $p=2;\quad q=0;\quad \beta=-\pi-\pi';\quad s=5$
5) $p=0;\quad q=-2;\quad \beta=-\pi-\pi';\quad s=5$
6) $p=1;\quad q=3;\quad \beta=+\pi+\pi';\quad s=5$
7) $p=3;\quad q=1;\quad \beta=-\pi-\pi';\quad s=5$

Кромѣ того послѣ преобразованія шестаго члена замѣнимъ въ немъ k чрезъ $-k$, тогда приведемъ предыдущую сумму къ формѣ

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{ee'}{2}\sum\Bigg[-\frac{3}{4}\alpha A_k^{(3)}-\frac{3}{4}\alpha A_{k+2}^{(3)}+\frac{21}{4}\alpha^2 A_{k+1}^{(5)}$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{a'}{a}-\frac{9}{4}\frac{a}{a'}\right)\alpha^2 A_k^{(5)}+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{a'}-\frac{9}{4}\frac{a'}{a}\right)\alpha^2 A_{k+2}^{(5)} \qquad (100)$$

$$-\frac{9}{8}\alpha^2 A_{k+3}^{(5)}-\frac{9}{8}\alpha^2 A_{k-1}^{(5)}\Bigg]\cos\left[k(g-g')+2g-\pi-\pi'\right]$$

это есть членъ зависящій отъ аргумента $k(g-g')+2g-\pi-\pi'$.

Часть выраженія R_1, зависящая отъ аргумента $k(g-g')+2g-2\pi$, состоитъ изъ суммы

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{e^2}{2}\Bigg[\frac{1}{4}\frac{a}{a'}\alpha.\cos 2(g-\pi)\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')+\frac{3}{8}\alpha.\cos(3g-g'-2\pi)\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')$$

$$+\frac{\alpha}{8}\cos(g+g'-2\pi)\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')+\left(\frac{3}{4}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{9}{8}\right)\alpha^2.\cos 2(g-\pi)\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')$$

$$+\frac{27}{16}\alpha^2.\cos 2(g'-\pi)\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')-\frac{9}{4}\frac{a}{a'}\alpha^2.\cos(g+g'-2\pi)\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')$$

$$+\frac{3}{4}\frac{a}{a'}\alpha^2.\cos(3g-g'-2\pi)\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')+\frac{3}{16}\alpha^2.\cos(4g-2g'-2\pi)\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')\Bigg]$$

Для преобразованія аргументовъ этой суммы примемъ въ выраженіи (95) послѣдовательно

$$\begin{array}{lllll}
1) & p=2; & q=0; & \beta=-2\pi; & s=3\\
2) & p=3; & q=1; & \beta=-2\pi; & s=3\\
3) & p=1; & q=-1; & \beta=-2\pi; & s=3\\
4) & p=2; & q=0; & \beta=-2\pi; & s=5\\
5) & p=0; & q=-2; & \beta=-2\pi; & s=5\\
6) & p=1; & q=-1; & \beta=-2\pi; & s=5\\
7) & p=3; & q=1; & \beta=-2\pi; & s=5\\
8) & p=4; & q=2; & \beta=-2\pi; & s=5
\end{array}$$

тогда членъ выраженія R_1, зависящій отъ аргумента $k(g-g')+2g-2\pi$, приведется къ виду

$$(101)\quad \begin{aligned}\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{e^2}{2}\sum\Big[&\frac{\alpha}{4}\frac{a}{a'}A_k^{(3)}+\frac{3}{8}\alpha A_{k-1}^{(3)}+\frac{\alpha}{8}A_{k+1}^{(3)}\\
&+\frac{3}{4}\left(\frac{a^2}{a'^2}-\frac{9}{8}\right)\alpha^2A_k^{(5)}+\frac{27}{16}\alpha^2A_{k+2}^{(5)}-\frac{9}{4}\frac{a}{a'}\alpha^2A_{k+1}^{(5)}\\
&+\frac{3}{4}\frac{a}{a'}\alpha^2A_{k-1}^{(5)}+\frac{3}{16}\alpha^2A_{k-2}^{(5)}\Big]\cos[k(g-g')+2g-2\pi]\end{aligned}$$

Члены выраженія R_1, зависящіе отъ аргумента $k(g-g')+2g-2\pi'$, суть

$$\begin{aligned}\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{e'^2}{2}\Big[&\frac{\alpha}{4}\frac{a'}{a}\cos2(g'-\pi')\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')+\frac{3\alpha}{8}\cos(g-3g'+2\pi')\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')\\
&+\frac{\alpha}{8}\cos(g+g'-2\pi')\sum A_k^{(3)}\cos k(g-g')+\left(\frac{3}{4}\frac{a'^2}{a^2}-\frac{9}{8}\right)\alpha^2.\cos2(g'-\pi')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')\\
&+\frac{27}{16}\alpha^2.\cos2(g-\pi')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')-\frac{9}{4}\frac{a'}{a}\alpha^2.\cos(g+g'-2\pi')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')\\
&+\frac{3}{4}\frac{a'}{a}\alpha^2.\cos(g-3g'+2\pi')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')+\frac{3\alpha^2}{16}\cos(2g-4g'+2\pi')\sum A_k^{(5)}\cos k(g-g')\Big]\end{aligned}$$

Для преобразованія аргументовъ этой суммы въ общемъ выраженіи (95) примемъ послѣдовательно

$$\begin{array}{lllll}
1) & p=0; & q=-2; & \beta=-2\pi'; & s=3\\
2) & p=1; & q=3; & \beta=2\pi'; & s=3\\
3) & p=1; & q=-1; & \beta=-2\pi'; & s=3\\
4) & p=0; & q=-2; & \beta=-2\pi'; & s=5\\
5) & p=2; & q=0; & \beta=-2\pi'; & s=5\\
6) & p=1; & q=-1; & \beta=-2\pi'; & s=5\\
7) & p=1; & q=3; & \beta=2\pi'; & s=5\\
8) & p=2; & q=4; & \beta=2\pi'; & s=5
\end{array}$$

и кромѣ того во второмъ, седьмомъ и осьмомъ членѣ послѣ преобразованія перемѣнимъ k на $-k$, тогда будемъ имѣть

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{e'^2}{2}\sum\Big[\frac{\alpha}{4}\frac{a'}{a}A_{k+2}^{(s)}+\frac{3\alpha}{8}A_{k+3}^{(s)}+\frac{\alpha}{8}A_{k+1}^{(s)}+\Big(\frac{3}{4}\frac{a'^2}{a^2}-\frac{9}{8}\Big)\alpha^2.A_{k+2}^{(s)}$$
$$+\frac{27}{16}\alpha^2.A_k^{(s)}-\frac{9}{4}\frac{a'}{a}\alpha^2.A_{k+1}^{(s)}+\frac{3}{4}\frac{a'}{a}\alpha^2.A_{k+3}^{(s)}+\frac{3\alpha^2}{16}A_{k+4}^{(s)}\Big]\cos[k(g-g')+2g-2\pi'] \tag{102}$$

Понятно, что членъ выраженія R_1, зависящій отъ аргумента $k(g-g')+\theta-\theta'$, есть

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a'^2+a^2}}\frac{\alpha}{4}\sin i.\sin i'\sum A_{k+1}^{(s)}\cos[k(g-g')+\theta-\theta'] \tag{103}$$

Въ томъ же выраженіи R_1 членъ, зависящій отъ аргумента $k(g-g')+2g-\theta-\theta'$, есть

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{\alpha}{4}\sin i.\sin i'\cos(g-g'-\theta-\theta')\sum A_k^{(s)}\cos k(g-g')$$

Для преобразованія его въ общемъ выраженіи (95) примемъ: $p=1$, $q=-1$, $\beta=-\theta-\theta'$, $s=3$ и тогда получимъ

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{\alpha}{4}\sin i.\sin i'\sum A_{k+1}^{(s)}\cos[k(g-g')+2g-\theta-\theta'] \tag{104}$$

наконецъ въ выраженіи R_1 отъ аргументовъ $k(g-g')+2g-2\theta$ и $k(g-g')+2g-2\theta'$ зависятъ члены

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{\alpha}{2}\Big[\sin^2\Big(\frac{i}{2}\Big)\cos(g+g'-2\theta)\sum A_k^{(s)}\cos k(g-g')$$
$$+\sin^2\Big(\frac{i'}{2}\Big)\cos(g+g'-2\theta')\sum A_k^{(s)}\cos k(g-g')\Big]$$

Чтобы преобразовать ихъ, въ общемъ выраженіи (95) примемъ: 1) $p=1$; $q=-1$; $\beta=-2\theta$; $s=3$; 2) $p=1$; $q=-1$; $\beta=2\theta'$; $s=3$ и тогда найдемъ, что предыдущая сумма обратится въ

$$\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{\alpha}{2}\Big[\sin^2\Big(\frac{i}{2}\Big)\sum A_{k+1}^{(s)}\cos[k(g-g')+2g-2\theta]$$
$$+\sin^2\Big(\frac{i'}{2}\Big)\sum A_{k+1}^{(s)}\cos[k(g-g')+2g-2\theta']\Big] \tag{105}$$

Если сложимъ эту послѣднюю сумму съ выраженіями (96), (97), (98) ... (104), то найдемъ

$$R_1=\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\Big[\frac{1}{2}\sum A_k^{(1)}\cos k(g-g')+\frac{1}{2}\Big\{\sin^2\Big(\frac{i}{2}\Big)+\sin^2\Big(\frac{i'}{2}\Big)\Big\}\sum\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}\cos k(g-g') \tag{106}$$
$$+\sum B'_k\cos k(g-g')+\frac{e}{2}\sum C_k\cos[k(g-g')+g-\pi]+\frac{e'}{2}\sum D_k\cos[k(g-g')+g-\pi']$$
$$+\frac{ee'}{2}\sum\Big(E_k\cos[k(g-g')+\pi-\pi']+F_k\cos[k(g-g')+2g-\pi-\pi']\Big)$$
$$+\frac{e^2}{2}\sum G_k\cos[k(g-g')+2g-2\pi]+\frac{e'^2}{2}\sum H_k\cos[k(g-g')+2g-2\pi']$$
$$+\frac{\alpha}{4}\sin i.\sin i'\sum\Big(A_{k+1}^{(s)}\cos[k(g-g')+\theta-\theta']+A_{k+1}^{(s)}\cos[k(g-g')+2g-\theta-\theta']\Big)$$
$$+\frac{\alpha}{2}\sin^2\Big(\frac{i}{2}\Big)\sum A_{k+1}^{(s)}\cos[k(g-g')+2g-2\theta]$$
$$+\frac{\alpha}{2}\sin^2\Big(\frac{i'}{2}\Big)\sum A_{k+1}^{(s)}\cos[k(g-g')+2g-2\theta']\Big]$$

Составъ коэффиціентовъ B'_k, C_k, D_k, E_k, F_k, G_k и H_k теперь совершенно извѣстенъ, но форма ихъ можетъ быть значительно упрощена. Коэффиціентъ B'_k представляется въ видѣ

$$B'_k = \frac{e^2}{4}\left[\frac{15}{4}\alpha^2 A_k^{(5)} - \alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - \frac{9}{4}\alpha^2 A_{k-2}^{(5)} + \frac{3}{2}\alpha^2\left(\frac{a}{a'}\right)^2 A_k^{(5)} - \frac{3}{2}\alpha\frac{a}{a'}A_k^{(3)} - 3\alpha^2\frac{a}{a'}A_{k-1}^{(5)}\right]$$
$$+ \frac{e'^2}{4}\left[\frac{15}{4}\alpha^2 A_k^{(5)} - \alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - \frac{9}{4}\alpha^2 A_{k-2}^{(5)} + \frac{3}{2}\alpha^2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 A_k^{(5)} - \frac{3}{2}\alpha\frac{a'}{a}A_k^{(3)} - 3\alpha^2\left(\frac{a'}{a}\right)A_{k-1}^{(5)}\right]$$

Такъ какъ разность въ коэффиціентахъ при $\frac{e^2}{4}$ и $\frac{e'^2}{4}$ заключается только въ томъ, что первый изъ нихъ зависитъ отъ отношенія $\frac{a}{a'}$, а второй отъ обратнаго отношенія, то все что будемъ говорить о преобразованіи перваго коэффиціента, будетъ легко приложимо и къ преобразованію другаго.

Въ уравненіи (69) поставимъ $k-1$ на мѣсто k и примемъ $s=3$, тогда будемъ имѣть

$$A_{k-2}^{(5)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{k-1}{\alpha}A_{k-1}^{(3)} + A_k^{(5)}$$

Исключая посредствомъ этого $A_{k-2}^{(5)}$ изъ коэффиціента при $\frac{e^2}{4}$, приводимъ этотъ коэффиціентъ къ виду

$$\frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+a'^2}\right)A_k^{(5)} - 3\alpha^2\left(\frac{a}{a'}\right)A_{k-1}^{(5)} - \frac{3}{2}\alpha(k-1)A_{k-1}^{(3)} - \frac{3}{2}\frac{a}{a'}\alpha A_k^{(3)} - \alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}$$

ибо

$$\alpha = \frac{aa'}{a^2+a'^2}$$

Изъ выраженія (80) при $s=3$ имѣемъ

$$(107)\qquad A_{k-1}^{(5)} = \frac{2k-3}{6\alpha}A_k^{(3)} + \frac{1}{2\alpha}A_k^{(5)}$$

Внося это въ предыдущее выраженіе коэффиціента при $\frac{e^2}{4}$, легко приводимъ его къ виду

$$-\frac{3\alpha}{2}(k-1)A_{k-1}^{(3)} - k\alpha\frac{a}{a'}A_k^{(3)} - \alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}$$

по выраженію (78) при $s=1$ имѣемъ

$$\alpha A_{k-1}^{(3)} = \alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + kA_k^{(1)}$$

Слѣдовательно предыдущая сумма обращается въ

$$-\left(\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}\right)\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - \frac{3}{2}k(k-1)A_k^{(1)} - k\alpha\frac{a}{a'}A_k^{(3)}$$

Выраженіе (79) при $s = 1$ даетъ

$$A_k^{(3)} = 2\alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + A_k^{(1)}$$

Слѣдовательно разсматриваемая сумма принимаетъ видъ

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} k - 2k \, . \, \alpha \frac{a}{a'}\right] \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - \left[\frac{3}{2} k (k-1) + k\alpha \frac{a}{a'}\right] A_k^{(1)}$$

или

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} k - \frac{2ka^2}{a^2 + a'^2}\right] \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \left[\frac{3}{2} k - \frac{3}{2} k^2 - k \frac{a^2}{a^2 + a'^2}\right] A_k^{(1)}$$

Поэтому

$$B'_k = \frac{e^2}{4}\left\{\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} k - \frac{2ka^2}{a^2 + a'^2}\right] \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \left[\frac{3}{2} k - \frac{3}{2} k^2 - \frac{k . a^2}{a^2 + a'^2}\right] A_k^{(1)}\right\}$$

$$+ \frac{e'^2}{4}\left\{\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} k - \frac{2ka^2}{a^2 + a'^2}\right] \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \left[\frac{3}{2} k - \frac{3}{2} k^2 - \frac{k . a'^2}{a^2 + a'^2}\right] A_k^{(1)}\right\}$$

Означимъ коеффиціентъ при $\frac{e^2}{4}$ чрезъ P_k и при $\frac{e'^2}{4}$ чрезъ P_k', тогда

$$B_k' = \frac{e^2}{4} P_k + \frac{e'^2}{4} P_k'$$

Слѣдовательно въ выраженіе (106) будетъ входить членъ

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} B_k' \cos k(g - g') = \frac{e^2}{4} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P_k \cos k(g - g') + \frac{e'^2}{4} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P_k' \cos k(g - g')$$

Но

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P_k \cos k(g - g') = \sum_{k=0}^{k=+\infty} P_k \cos k(g - g') + \sum_{k=0}^{k=-\infty} P_k \cos k(g - g')$$

или

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P_k \cos k(g - g') = \sum_{k=0}^{k=+\infty} P_k \cos k(g - g') + \sum_{k=0}^{k=+\infty} P_{-k} \cos k(g - g')$$

ибо при измѣненіи k на $-k$ функція $\cos k(g - g')$ не измѣняетъ своего значенія. Такимъ образомъ

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P_k \cos k(g - g') = \sum_{k=0}^{k=+\infty} [P_k + P_{-k}] \cos k(g - g')$$

но легко видѣть, что

$$P_k + P_{-k} = \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - 3k^2 A_k^{(1)}$$

Слѣдовательно можно принять

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P_k \cos k(g-g') = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[\alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - 3k^2 A_k^{(1)}\right]\cos k(g-g')$$

очевидно, что тоже самое значеніе имѣетъ и функція зависящая отъ P_k', ибо какъ $P_k + P_{-k}$ такъ и $P_k' + P'_{-k}$ составлены совершенно симметрично относительно a и a'. И такъ

$$(108)\qquad \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} B_k' \cos k(g-g') = \frac{e^2+e'^2}{8}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[\alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - 3k^2 A_k^{(1)}\right]\cos k(g-g')$$

Преобразуемъ коэффиціентъ C_k, который, какъ легко видѣть, имѣетъ форму

$$C_k = \alpha\left[\frac{a}{a'} A_k^{(3)} - \frac{3}{2} A_{k+1}^{(3)} + \frac{1}{2} A_{k-1}^{(3)}\right]$$

исключимъ отсюда $A_k^{(3)}$ и $A_{k+1}^{(3)}$ посредствомъ выраженій (77) и (79), въ которыхъ примемъ для этого $s=1$, и тогда получимъ

$$C_k = \alpha\left[2\frac{a}{a'}\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{a}{a'}A_k^{(1)} - \frac{3}{2}\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{3}{2}\frac{k}{\alpha}A_k^{(1)} + \frac{1}{2}A_{k-1}^{(3)}\right]$$

изъ уравненія (76) при помощи уравненія (77) и (79), принимая вездѣ $s=1$, находимъ

$$(109)\qquad A_{k-1}^{(3)} = \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{k}{\alpha}A_k^{(1)}$$

поэтому

$$C_k = \alpha\left[2\alpha\frac{a}{a'} - 1\right]\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \alpha\left[\frac{a}{a'} + \frac{2k}{\alpha}\right]A_k^{(1)}$$

или наконецъ

$$(110)\qquad C_k = \left[\frac{a^2-a'^2}{a^2+a'^2}\right]\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \left[\frac{a^2}{a^2+a'^2} + 2k\right]A_k^{(1)}$$

Преобразуемъ коэффиціентъ D_k, имѣющій видъ

$$D_k = \frac{a'}{a}\alpha A_{k+1}^{(3)} - \frac{3}{2}\alpha A_k^{(3)} + \frac{\alpha}{2}A_{k+2}^{(3)}$$

Уравненіе (79) при $s=1$ и при замѣнѣ k чрезъ $k+1$ дастъ

$$A_{k+1}^{(3)} = 2\alpha \frac{dA_{k+1}^{(1)}}{d\alpha} + A_{k+1}^{(1)} \tag{111}$$

уравненіе (77) при тѣхъ же условіяхъ обращается въ

$$\alpha A_{k+2}^{(3)} = \alpha \frac{dA_{k+1}^{(1)}}{d\alpha} - (k+1)\, A_{k+1}^{(1)} \tag{112}$$

Наконецъ уравненіе (76) при замѣнѣ k чрезъ $k+1$ и при $s=1$ даетъ

$$\frac{dA_{k+1}^{(1)}}{d\alpha} = \frac{1}{2} A_k^{(3)} + \frac{1}{2} A_{k+2}^{(3)}$$

Слѣдовательно

$$A_k^{(3)} = \frac{dA_{k+1}^{(1)}}{d\alpha} + \frac{k+1}{\alpha} A_{k+1}^{(1)} \tag{113}$$

Такимъ образомъ при помощи выраженій (111), (112), (113) коэффиціентъ D_k приводится къ виду

$$D_k = \frac{a'^2 - a^2}{a^2 + a'^2}\, \alpha \frac{dA_{k+1}^{(1)}}{d\alpha} + \left[\frac{\alpha}{a^2 + a'^2} - 2(k+1)\right] A_{k+1}^{(1)} \tag{114}$$

Коэффиціентъ E_k имѣетъ видъ

$$E_k = \frac{3}{4}\left[3\alpha A_k^{(3)} + \frac{\alpha}{3} A_{k+2}^{(3)} - 3\alpha A_k^{(5)} - \alpha^2 A_{k+1}^{(5)} + \frac{9}{2}\alpha^2 A_{k-1}^{(5)} + \alpha A_{k+1}^{(5)} + \frac{\alpha^2}{2} A_{k+3}^{(5)}\right]$$

Въ выраженіи (69) замѣнимъ k чрезъ $k+2$ и положимъ $s=3$, тогда будемъ имѣть

$$A_{k+3}^{(5)} = A_{k+1}^{(5)} - \frac{2(k+2)}{3\alpha} A_{k+2}^{(3)} \tag{115}$$

Исключая посредствомъ этого $A_{k+3}^{(5)}$ изъ предыдущаго выраженія, имѣемъ

$$E_k = \frac{3}{4}\left[3\alpha A_k^{(3)} - \frac{\alpha}{3}(k+1)\, A_{k+2}^{(3)} - 3\alpha A_k^{(5)} - \frac{\alpha^2}{2} A_{k+1}^{(5)} + \frac{9}{2}\alpha^2 A_{k-1}^{(5)} + \alpha A_{k+2}^{(5)}\right]$$

тоже выраженіе (69) дастъ

$$\left.\begin{aligned} A_{k+2}^{(5)} &= A_k^{(5)} - \frac{2(k+1)}{3\alpha} A_{k+1}^{(3)} \\ A_{k+1}^{(5)} &= A_{k-1}^{(5)} - \frac{2k}{3\alpha} A_k^{(3)} \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Внося это въ предыдущее, легко находимъ

$$E_k = \frac{3}{4}\left[\alpha\left(3 + \frac{k}{3}\right) A_k^{(3)} - \frac{2(k+1)}{3} A_{k+1}^{(3)} - \frac{\alpha}{3}(k+1)\, A_{k+2}^{(3)} - 2\alpha A_k^{(5)} + 4\alpha^2 A_{k-1}^{(5)}\right]$$

Исключая отсюда $A_{k-1}^{(5)}$ посредствомъ выраженія (107), находимъ

$$E_k = \frac{3}{4}\left[\alpha\left(1+\frac{5}{3}k\right)A_k^{(3)} - \frac{\alpha}{3}(k+1)A_{k+2}^{(3)} - \frac{2}{3}(k+1)A_{k+1}^{(3)}\right]$$

Наконецъ это посредствомъ выраженій (111), (112), (113) приводимъ къ виду

$$E_k = \frac{(k+1)(3k+1)}{2}A_{k+1}^{(1)} - \frac{\alpha}{2}\frac{dA_{k+1}^{(1)}}{d\alpha} \tag{117}$$

Коэффиціентъ F_k имѣетъ форму

$$F_k = \left(\frac{3}{4}\frac{a}{a'} - \frac{9}{4}\frac{a'}{a}\right)\alpha^2 A_{k+2}^{(5)} - \frac{9}{8}\alpha^2 A_{k+3}^{(5)} - \frac{9}{8}\alpha^2 A_{k-1}^{(5)}$$

Исключая отсюда $A_{k+3}^{(5)}$, $A_{k+2}^{(5)}$, $A_{k-1}^{(5)}$ посредствомъ выраженій (115), (116), (107), находимъ

$$F_k = -\frac{3}{4}\alpha\left(3+\frac{7}{3}k\right)A_k^{(3)} - \frac{\alpha}{2}(k+1)\left(\frac{a}{a'} - 3\frac{a'}{a}\right)A_{k+1}^{(3)} + \frac{3}{4}\alpha A_{k+2}^{(3)}$$

Исключая отсюда $A_k^{(3)}$, $A_{k+1}^{(3)}$ и $A_{k+2}^{(3)}$ посредствомъ (113), (111) и (112), легко приводимъ это къ виду

$$F_k = -\left[\frac{1}{2} + 2(k+1)\frac{a^2-a'^2}{a^2+a'^2}\right]\alpha\frac{dA_{k+1}^{(1)}}{d\alpha} - \left[\frac{k+1}{2}(3+5k) + 2(k+1)\frac{a^2}{a^2+a'^2}\right]A_{k+1}^{(1)} \tag{118}$$

Коэффиціентъ G_k имѣетъ форму

$$G_k = \frac{\alpha}{4}\frac{a}{a'}A_k^{(3)} + \frac{3}{8}\alpha A_{k-1}^{(3)} + \frac{\alpha}{8}A_{k+1}^{(3)} + \left(\frac{3}{4}\frac{a^2}{a'^2} - \frac{9}{8}\right)\alpha^2 A_k^{(5)}$$
$$+ \frac{27}{16}\alpha^2 A_{k+2}^{(5)} - \frac{9}{4}\frac{a}{a'}\alpha^2 A_{k+1}^{(5)} + \frac{3}{4}\frac{a}{a'}\alpha^2 A_{k-1}^{(5)} + \frac{3\alpha^2}{16}A_{k-2}^{(5)}$$

Исключимъ отсюда коэффиціенты $A_{k+2}^{(5)}$, $A_{k+1}^{(5)}$ и $A_{k-1}^{(5)}$ посредствомъ выраженій (111), (112) и (107), а функцію $A_{k-2}^{(5)}$ посредствомъ выраженія, которое получимъ изъ (69), замѣняя въ немъ k черезъ $k-1$ и полагая $s=3$. Послѣ всего этого легко найдемъ

$$G_k = \frac{1}{4}\left[4\alpha\frac{a}{a'}(k+1)A_k^{(3)} + \frac{\alpha}{2}(2+k)A_{k-1}^{(3)} - \frac{\alpha}{2}(8+9k)A_{k+1}^{(3)}\right]$$

При помощи уравненій (77) и (79), принимая въ нихъ $s=1$, и уравненія (109) отсюда выводимъ

$$G_k = \left[\frac{5}{4}k(k+1) + (k+1)\frac{a^2}{a^2+a'^2}\right]A_k^{(1)} + \left[\frac{1}{4} + (k+1)\frac{a^2-a'^2}{a^2+a'^2}\right]\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} \tag{119}$$

Начальная форма коэффиціента H_k есть

$$H_k = \frac{\alpha}{4}\frac{a'}{a} A_{k+2}^{(3)} + \frac{3\alpha}{8} A_{k+3}^{(3)} + \frac{\alpha}{8} A_{k+1}^{(3)} + \left(\frac{3}{4}\frac{a'^2}{a^2} - \frac{9}{8}\right)\alpha^2 A_{k+2}^{(5)}$$
$$+ \frac{27}{16}\alpha^2 A_k^{(5)} - \frac{9}{4}\frac{a'}{a}\alpha^2 A_{k+1}^{(5)} + \frac{3}{4}\frac{a'}{a}\alpha^2 A_{k+3}^{(5)} + \frac{3\alpha^2}{16} A_{k+4}^{(5)}$$

Замѣняя k чрезъ $k+1$ въ выраженіи $(115)_1$ найдемъ форму для $A_{k+4}^{(5)}$; пользуясь ею вмѣстѣ съ выраженіями (115), (116) и (107), легко находимъ

$$H_k = \frac{1}{4}\left[\alpha\frac{a'}{a}(2k+3)A_k^{(3)} + \left\{3 - 2(k+1)\frac{a'^2}{a^2} + \frac{5k}{2}\right\}\alpha A_{k+1}^{(3)}\right.$$
$$\left. - \alpha\frac{a'}{a}(2k+3)A_{k+2}^{(3)} - \frac{\alpha k}{2}A_{k+3}^{(3)}\right]$$

Выраженіе (69) при $s = 1$ и по замѣнѣ k чрезъ $k+1$ даетъ

$$\frac{2(k+1)}{\alpha} A_{k+1}^{(1)} = A_k^{(3)} - A_{k+2}^{(3)}$$

Поэтому предыдущее приводится къ виду

$$H_k = \frac{1}{4}\left[2\frac{a'}{a}(k+1)(2k+3)A_{k+1}^{(1)} + \left\{3 - 2(k+1)\frac{a'^2}{a^2} + \frac{5k}{2}\right\}\alpha A_{k+1}^{(3)} - \frac{\alpha k}{2}A_{k+3}^{(3)}\right]$$

Уравненіе (81) при $s = 1$ и при замѣнѣ k чрезъ $k+1$ даетъ

$$(2k+3)A_{k+1}^{(1)} = (1 - 4\alpha^2)A_{k+1}^{(3)} + 2\alpha(2k+3)A_{k+2}^{(1)}$$

поэтому

$$H_k = \frac{1}{4}\left[2(k+1)\left(\frac{a^2 - 3a'^2}{a^2 + a'^2}\right) + 3 + \frac{5k}{2}\right]\alpha A_{k+1}^{(3)} + \alpha\frac{a'}{a}(k+1)(2k+3)A_{k+2}^{(1)} - \frac{\alpha k}{8}A_{k+3}^{(3)}$$

Выраженіе (77) при $s = 1$ и при замѣнѣ k чрезъ $(k+2)$ даетъ

$$\alpha A_{k+3}^{(3)} = \alpha\frac{dA_{k+2}^{(1)}}{d\alpha} - (k+2)A_{k+2}^{(1)} \tag{120}$$

Изъ выраженія (76) при $s = 1$ и замѣнѣ k чрезъ $k+2$ находимъ

$$A_{k+1}^{(3)} = 2\frac{dA_{k+2}^{(1)}}{d\alpha} - A_{k+3}^{(1)}$$

Исключая отсюда $A_{k+3}^{(1)}$ посредствомъ предыдущаго соотношенія, имѣемъ

$$A_{k+1}^{(3)} = \frac{dA_{k+2}^{(1)}}{d\alpha} + \frac{k+2}{\alpha}A_{k+2}^{(1)}$$

при помощи этого выраженія и выраженія (120) легко обращаемъ предыдущую форму коэффиціента H_k въ

$$H_k = (k+1)\frac{a^2 - a'^2}{a^2 + a'^2}\alpha\frac{dA_{k+2}^{(1)}}{d\alpha} + \frac{\alpha}{4}\frac{dA_{k+2}^{(1)}}{d\alpha}$$
$$+ \frac{(k+1)}{4}(5k+6)A_{k+2}^{(1)} + (k+1)\frac{a^2}{a^2 + a'^2}A_{k+2}^{(1)} \tag{121}$$

Если положимъ

$$\frac{1}{a} X_k = \frac{a^2}{a^2 + a'^2} A_k^{(1)} + \frac{a^2 - a'^2}{a^2 + a'^2} \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}$$

то коэффиціенты, которые мы теперь преобразовывали, примутъ форму

$$C_k = \quad 2kA_k^{(1)} + \frac{1}{a} X_k$$

$$D_k = -(2k+1) A_{k+1}^{(1)} - \frac{1}{a} X_{k+1}$$

$$E_k = \quad \frac{k+1}{2} (3k+1) A_{k+1}^{(1)} - \frac{\alpha}{2} \frac{dA_{k+1}}{d\alpha}$$

$$F_k = -\frac{(k+1)}{2} (5k+3) A_{k+1}^{(1)} - \frac{\alpha}{2} \frac{dA_{k+1}^{(1)}}{d\alpha} - \frac{2(k+1)}{a} X_{k+1}$$

$$G_k = \quad \frac{5}{4} k(k+1) A_k^{(1)} + \frac{\alpha}{4} \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{(k+1)}{a} X_k$$

$$H_k = \quad \frac{k+1}{4} (5k+6) A_{k+2}^{(1)} + \frac{\alpha}{4} \frac{dA_{k+2}^{(1)}}{d\alpha} + \frac{(k+1)}{a} X_{k+2}$$

Кромѣ того какъ видно изъ выраженія (108)

$$B_k = \frac{1}{4} \left[\alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - 3k^2 A_k^{(1)}\right]$$

а потому выраженіе (106) приводится къ виду

$$\begin{aligned}
R_1 = \frac{\mu'}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \Big[& \frac{1}{2} \sum A_k^{(1)} \cos k(g - g') \\
& - \frac{1}{2} \left\{\sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\} \sum \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} \cos k(g-g') + \frac{e^2 + e'^2}{2} \sum B_k \cos k(g-g') \\
& + \frac{e}{2} \sum C_k \cos[k(g-g') + g - \pi] + \frac{e'}{2} \sum D_k \cos[k(g-g') + g - \pi'] \\
& + \frac{ee'}{2} \sum E_k \cos[k(g-g') + \pi - \pi'] + \frac{ee'}{2} \sum F_k \cos[k(g-g') + 2g - \pi - \pi'] \\
& + \frac{e^2}{2} \sum G_k \cos[k(g-g') + 2g - 2\pi] + \frac{e'^2}{2} \sum H_k \cos[k(g-g') + 2g - 2\pi'] \qquad (122) \\
& + \frac{\alpha}{4} \sin i \,.\, \sin i' \sum A_{k+1}^{(3)} \cos[k(g-g') + \theta - \theta'] \\
& + \frac{\alpha}{4} \sin i \,.\, \sin i' \sum A_{k+1}^{(3)} \cos[k(g-g') + 2g - \theta - \theta'] \\
& + \frac{\alpha}{2} \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) \sum A_{k+1}^{(3)} \cos[k(g-g') + 2g - 2\theta] \\
& + \frac{\alpha}{2} \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) \sum A_{k+1}^{(3)} \cos[k(g-g') + 2g - 2\theta'] \Big] \text{*)}
\end{aligned}$$

---

*) См. *М. Ковальскій*. Теорія движенія Нептуна стр. 29.

Всѣ суммы этого выраженія берутся по k отъ $-\infty$ до $+\infty$. Въ такой формѣ представляется выраженіе первой части пертурбаціонной функціи точное до членовъ втораго порядка относительно эксцентриситетовъ и наклоненій.

Составимъ наконецъ для второй части пертурбаціонной функціи выраженіе вѣрное до членовъ втораго порядка включительно. Для этого обратимся къ выраженіямъ (48) и (49). Имѣя въ виду ограничиться величинами втораго порядка относительно эксцентриситетовъ и наклоненій, мы очевидно должны принять

$$h_1 = e; \qquad h'_1 = e'; \qquad \frac{dh_1}{de} = 1 - \frac{3}{8}e^2; \qquad \frac{dh'_1}{de'} = 1 - \frac{3}{8}e'^2$$

$$h_2 = \frac{e^2}{2}; \qquad h'_2 = \frac{e'^2}{2}; \qquad \frac{dh_2}{de} = e; \qquad \frac{dh'_2}{de'} = e'$$

$$h_3 = 0; \qquad h'_3 = 0; \qquad \frac{dh_3}{de} = \frac{9}{8}e^2; \qquad \frac{dh'_3}{de'} = \frac{9}{8}e'^2$$

Выполняя суммованіе по k и k' въ выраженіи (49), мы должны ограничиться значеніями этихъ указателей $k=3$ и $k'=3$, ибо при высшихъ значеніяхъ будутъ получаться только такіе члены, порядокъ которыхъ во всякомъ случаѣ выше втораго. Такимъ образомъ

$$R_2 = \mu' \frac{a}{a'^2}\Big[\frac{3}{2}(F+G)\cdot e\left(\frac{dh'_1}{de'}\cos\zeta + 2\frac{dh'_2}{de'}\cos 2\zeta'\right)$$
$$+\frac{3}{2}(G_1 - F_1)\frac{e}{e'}(h'_1.\sin\zeta + 4h'_2.\sin 2\zeta)$$
$$-\frac{A_{1,1}-B_{1,1}}{2}\cos(\zeta+\zeta') - \frac{A_{2,1}-B_{2,1}}{2}\cos(2\zeta+\zeta') - \frac{A_{3,1}-B_{3,1}}{2}\cos(3\zeta+\zeta')$$
$$-\frac{A_{1,2}-B_{1,2}}{2}\cos(\zeta+2\zeta') - \frac{A_{2,2}-B_{2,2}}{2}\cos(2\zeta+2\zeta') - \frac{A_{3,2}-B_{3,2}}{2}\cos(3\zeta+2\zeta')$$
$$-\frac{A_{1,3}-B_{1,3}}{2}\cos(\zeta+3\zeta') - \frac{A_{2,3}-B_{2,3}}{2}\cos(2\zeta+3\zeta') - \frac{A_{3,3}-B_{3,3}}{2}\cos(3\zeta+3\zeta')$$
$$-\frac{A_{1,1}+B_{1,1}}{2}\cos(\zeta-\zeta') - \frac{A_{2,1}-B_{2,1}}{2}\cos(2\zeta-\zeta') - \frac{A_{3,1}+B_{3,1}}{2}\cos(3\zeta-\zeta')$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

Но принимая во вниманіе выраженія (48) и (37), легко приводимъ это къ виду:

$$R_2 = \mu'\frac{a}{a^2}\Big[\frac{3}{2}e.\cos(\zeta-\pi+\pi') + 3ee'.\cos(2\zeta'-\pi+\pi') - 2e'.\cos(\zeta-2\zeta'+\pi-\pi')$$
$$-\frac{e}{2}\cos(2\zeta-\zeta'+\pi-\pi') - \frac{27}{8}e'^2.\cos(\zeta-3\zeta'+\pi-\pi') - ee'.\cos(2\zeta-2\zeta'+\pi-\pi')$$
$$-\frac{3}{8}e^2.\cos(3\zeta-\zeta'+\pi-\pi') - \frac{1}{8}e'^2.\cos(\zeta+\zeta'+\pi-\pi') - \frac{1}{8}e^2.\cos(\zeta+\zeta'-\pi+\pi')$$
$$-\left\{1-\frac{e^2+e'^2}{2} - \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) + \frac{\sin i.\sin i'}{2}\cos(\theta-\theta')\right\}\cos(\zeta-\zeta'+\pi-\pi')$$
$$+\left\{\frac{\sin i.\sin i'}{2} - \left\{\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\cos(\theta-\theta')\right\}\cos(\zeta+\zeta'+\pi+\pi'-\theta-\theta')$$
$$-\left\{\sin^2\left(\frac{i}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\sin(\theta-\theta')\sin(\zeta+\zeta'+\pi+\pi'-\theta-\theta')$$
$$-\frac{\sin i.\sin i'}{2}\sin(\theta-\theta')\sin(\zeta-\zeta'+\pi-\pi')\Big]$$

Или вводя сюда среднія долготы вмѣсто среднихъ аномалій, получаемъ

$$R_2 = \mu' \frac{a}{a'^2}\Big[\frac{3}{2}e.\cos(g'-\pi)+3ee'.\cos(2g'-\pi-\pi')-2e'.\cos(g-2g'+\pi')$$

$$-\frac{e}{2}\cos(2g-g'-\pi)-\frac{27}{8}e'^2.\cos(g-3g'+2\pi')-ee'.\cos(2g-2g'-\pi+\pi')$$

$$(123)\quad -\frac{3e^2}{8}\cos(3g-g'-2\pi)-\frac{e'^2}{8}\cos(g+g'-2\pi')-\frac{e^2}{8}\cos(g+g'-2\pi)$$

$$-\left\{1-\frac{e^2+e'^2}{2}-\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\cos(g-g')-\frac{\sin i.\sin i'}{2}\cos(g-g'-\theta+\theta')$$

$$+\frac{\sin i.\sin i'}{2}\cos(g+g'-\theta-\theta')-\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\cos(g+g'-2\theta)-\sin^2\frac{i'}{2}\cos(g+g'-2\theta')\Big]$$

Сумма найденныхъ теперь формъ (122) и (123) представляетъ собою выраженіе пертурбаціонной функціи вѣрное включительно до членовъ втораго порядка относительно эксцентриситетовъ и наклоненій.

Теперь легко уже составить себѣ понятіе о той части разложенія пертурбаціонной функціи, которая не содержитъ явно времени и которую въ выраженіи (30) мы означили чрезъ A_0. Эта часть заключается только въ выраженіи (122), именно въ первыхъ трехъ его членахъ и затѣмъ въ шестомъ и десятомъ членѣ. Мы получимъ часть пертурбаціонной функціи не содержащую явно времени t, если въ упомянутыхъ сейчасъ членахъ примемъ $k=0$. Означивъ составляющуюся такимъ образомъ функцію чрезъ F, найдемъ

$$F=\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\Big[\frac{1}{2}A_0^{(1)}-\frac{1}{2}\left\{\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\alpha\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}+\frac{e^2+e'^2}{2}B_0$$

$$+\frac{\alpha}{4}\sin i.\sin i'\,A_1^{(3)}\cos(\theta-\theta')+\frac{ee'}{2}E_0.\cos(\pi-\pi')\Big]$$

Всѣ другіе члены части R_1, за исключеніемъ выше указанныхъ, ни для какого значенія k не даютъ членовъ свободныхъ отъ времени входящаго явно. Легко видѣть, что

$$B_0=\frac{\alpha}{4}\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha};\qquad E_0=\frac{1}{2}A_1^{(1)}-\frac{\alpha}{2}\frac{dA_1^{(1)}}{d\alpha}$$

поэтому

$$(124)\quad F=\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\Big[\frac{A_0^{(1)}}{2}-\frac{1}{2}\left\{\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\alpha\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}+\frac{e^2+e'^2}{8}\alpha\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}$$

$$+\frac{\alpha A_1^{(3)}}{4}\sin i.\sin i'.\cos(\theta-\theta')+\frac{ee'}{4}\left\{A_1^{(1)}-\alpha\frac{dA_1^{(1)}}{d\alpha}\right\}\cos(\pi-\pi')\Big]$$

Во второй части пертурбаціонной функціи, точно представленной выраженіемъ (49), вовсе нѣтъ членовъ независящихъ явно отъ времени, ибо всѣ суммы этого выраженія по k и k' берутся въ предѣлахъ единицы и $+\infty$.

Такимъ образомъ если хотимъ найти форму вѣковыхъ возмущеній, то интегрируя выраженія (25), должны положить въ нихъ $R=F$, гдѣ подъ F разумѣемъ показанную сейчасъ часть пертурбаціонной функціи.

III.

Общія понятія о вычисленіи вѣковыхъ и періодическихъ неравенствъ планетъ. Прочность устройства солнечной системы.

8. Зная форму зависимости пертурбаціонной функціи отъ элементовъ, приступимъ къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій (25). Эти совмѣстныя дифференціальныя уравненія въ конечной формѣ интегрированы быть не могутъ, а потому задача о вычисленіи возмущеній можетъ быть рѣшена только съ извѣстнымъ приближеніемъ. Условимся найти интегралы вѣрные включительно до членовъ втораго порядка относительно эксцентриситетовъ и наклоненій.

Покажемъ прежде всего способъ вычисленія вѣковыхъ неравенствъ. Для этого въ выраженіяхъ (25) мы должны принять $R = F$ и опредѣлить производныя функціи F относительно элементовъ. Мы видѣли, что функція F не содержитъ элемента ε, т. е. эпохи, а потому $\frac{dF}{d\varepsilon} = 0$. Слѣдовательно по первому изъ выраженій (25) имѣемъ $\frac{da}{dt} = 0$ и отсюда заключаемъ, что большія полуоси орбитъ не подлежатъ вѣковымъ измѣненіямъ, а потому онѣ не могутъ возрастать или уменьшаться неограниченно и если подлежатъ измѣненіямъ, то только періодическимъ. Въ этомъ заключается одно изъ существенныхъ условій прочности устройства солнечной системы.

Посмотримъ теперь въ какой формѣ представляется зависимость отъ времени эксцентриситета и долготы перигелія орбиты. Въ дифференціальныя выраженія представляющія измѣненія этихъ элементовъ входятъ производныя $\frac{dR}{d\varepsilon}$, $\frac{dR}{d\pi}$, $\frac{dR}{de}$ и $\frac{dR}{di}$. Такъ какъ для рѣшенія того вопроса, который мы имѣемъ теперь въ виду, мы должны принять $R = F$, то первая изъ этихъ производныхъ обращается въ нуль, остается опредѣлить три другія. Обращаясь для этого къ выраженію (124), легко находимъ

$$
\begin{aligned}
\frac{dF}{de} &= \frac{\mu'}{4\sqrt{a^2+a'^2}}\left[e\alpha\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha} + e'\left(A_1^{(1)} - \alpha\frac{dA_1^{(1)}}{d\alpha}\right)\cos(\pi-\pi')\right] \\
\frac{dF}{d\pi} &= -\frac{\mu'}{4\sqrt{a^2+a'^2}}ee'\left(A_1^{(1)} - \alpha\frac{dA_1^{(1)}}{d\alpha}\right)\sin(\pi-\pi') \qquad (125) \\
\frac{dF}{di} &= -\frac{\mu'}{4\sqrt{a^2+a'^2}}\alpha\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}\sin i + \frac{\mu'}{4\sqrt{a^2+a'^2}}\alpha A_1^{(3)}\cos i.\sin i'\cos(\theta-\theta')
\end{aligned}
$$

Но замѣтимъ прежде всего, что, ограничиваясь членами втораго порядка относительно наклоненій, мы должны считать въ послѣднемъ членѣ $\cos i = 1$. Кромѣ того выраженіе (77) показываетъ, что при $k = 0$ и $s = 1$

$$A_1^{(s)} = \frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}$$

Слѣдовательно послѣдняя производная приводится къ виду

$$(126)\qquad \frac{dF}{di} = \frac{\mu'}{4\sqrt{a^2 + a'^2}}\,\alpha\,\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}\left[\sin i' \cos(\theta - \theta') - \sin i\right]$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что производныя $\frac{dF}{de}$ и $\frac{dF}{di}$ сами суть величины перваго порядка относительно эксцентриситотовъ и наклоненій, а производная $\frac{dF}{d\pi}$ есть уже величина втораго порядка.

Помня, что $\frac{dF}{de} = 0$, мы имѣемъ

$$\frac{de}{dt} = -\frac{an}{e}\sqrt{1 - e^2}\,\frac{dF}{d\pi}$$

разлагая $\sqrt{1 - e^2}$, мы удержимъ только первый членъ и тогда получимъ

$$\frac{de}{dt} = -\frac{an}{e}\,\frac{dF}{d\pi}$$

другіе члены разложенія $\sqrt{1 - e^2}$, будучи умножены на $\frac{dF}{d\pi}$, дали бы члены третьяго и высшихъ порядковъ.

Что касается до производной $\frac{d\pi}{dt}$, то для нея примемъ

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{an}{e}\,\frac{dF}{de}$$

Внесемъ сюда вмѣсто $\frac{dF}{d\pi}$ и $\frac{dF}{de}$ ихъ выше найденныя выраженія и при этомъ положимъ для краткости

$$K = \frac{1}{4}\left[A_1^{(1)} - \alpha\,\frac{dA_1^{(1)}}{d\alpha}\right];\qquad L = \frac{\alpha}{4}\,\frac{dA_0}{d\alpha};\qquad \beta = \frac{\mu'.\,an}{\sqrt{a^2 + a'^2}}$$

тогда будемъ имѣть

$$(127)\qquad \begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \beta\,.\,K\,.\,e'.\sin(\pi - \pi') \\ e\,\frac{d\pi}{dt} &= \beta\left[L\,.\,e + K\,.\,e'.\cos(\pi - \pi')\right] \end{aligned}$$

Подобнымъ же образомъ для возмущающаго свѣтила имѣемъ

$$\frac{de'}{dt} = -\beta'.K.e.\sin(\pi - \pi')$$
$$e'\frac{d\pi'}{dt} = \beta'[L.e' + K.e.\cos(\pi - \pi')] \qquad (127_*)$$

гдѣ

$$\beta' = \frac{\mu.a'n'}{\sqrt{a^2 + a'^2}}; \qquad \mu = \frac{m}{1 + m'}$$

Что касается до функцій K и L, то онѣ относительно полуосей орбитъ того и другаго свѣтила составлены совершенно симметрично, а потому имѣютъ совершенно одинакое значеніе въ обѣихъ системахъ уравненій. Чтобы интегрировать предыдущія уравненія положимъ

$$u = e.\sin\pi; \qquad v = e.\cos\pi$$
$$u' = e'.\sin\pi'; \qquad v' = e'.\cos\pi'$$

откуда

$$\frac{du}{dt} = \quad e.\cos\pi\frac{d\pi}{dt} + \sin\pi\frac{de}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt} = -e.\sin\pi\frac{d\pi}{dt} + \cos\pi\frac{de}{dt}$$

Подставляя сюда вмѣсто $e\frac{d\pi}{dt}$ и $\frac{de}{dt}$ ихъ выраженія (127), легко находимъ

$$\frac{du}{dt} = \quad \beta[L.v + K.v']$$
$$\frac{dv}{dt} = -\beta[L.u + K.u'] \qquad (128)$$

подобнымъ же образомъ имѣемъ

$$\frac{du'}{dt} = \quad \beta'[L.v' + K.v]$$
$$\frac{dv'}{dt} = -\beta'[L.u' + K.u] \qquad (128_*)$$

Интегралы этихъ линейныхъ уравненій, какъ извѣстно, имѣютъ форму

$$u = A.\sin(ht + \gamma); \qquad v = A.\cos(ht + \gamma)$$
$$u' = A'.\sin(ht + \gamma); \qquad v' = A'.\cos(ht + \gamma)$$

гдѣ A, A', h и γ суть постоянныя. Внося эти интегралы въ уравненія (128), находимъ

$$Ah = \beta[L.A + K.A'] \qquad (129)$$

подобнымъ же образомъ уравненія (128_*) даютъ

$$A'h = \beta'[L.A' + K.A] \qquad (129_*)$$

Исключая изъ этихъ уравненій отношеніе $\frac{A}{A'}$, имѣемъ

$$(130) \qquad h^2 - (\beta + \beta') L . h + \beta . \beta' (L^2 - K^2) = 0$$

Такъ какъ уравненія (129) и (129_*), представляющія зависимость между постоянными, не содержатъ въ себѣ постоянной γ, то заключаемъ, что эта послѣдняя есть произвольная величина. Корни предыдущаго квадратнаго уравненія относительно h могутъ быть или дѣйствительные не равные, или дѣйствительные равные, или мнимые, смотря потому, будетъ ли величина

$$(\beta + \beta')^2 . L^2 - 4\beta\beta' (L^2 - K^2)$$

положительна, равна нулю, или отрицательна. Эта разность можетъ быть представлена въ видѣ

$$(\beta - \beta')^2 . L^2 + 4\beta\beta' . K^2$$

Первый членъ есть всегда существенно положительная величина, второй будетъ положительною величиною, если β и β' будутъ имѣть одинакіе знаки. Знаки же величинъ β и β' исключительно зависятъ отъ знаковъ n и n'. Такъ какъ всѣ планеты солнечной системы движутся въ одну сторону, по направленію знаковъ зодіака, то n и n' имѣютъ одинакіе знаки, поэтому предыдущая функція всегда имѣетъ положительную величину и корни уравненія (130) всегда суть не равные и дѣйствительные. Если бы корни этого уравненія были мнимые, то функціи u, u', v, v' не имѣли бы тригонометрической формы, а представлялись бы показательными функціями и тогда эксцентриситеты орбитъ представлялись бы такими функціями времени, которыя содержали бы время внѣ знаковъ тригонометрическихъ функцій, а слѣдовательно эксцентриситеты орбитъ отъ возмущеній могли бы измѣняться, непрерывно увеличиваясь или уменьшаясь и такимъ образомъ орбиты не удерживали бы форму опредѣленнаго коническаго сѣченія и солнечная система не имѣла бы прочнаго устройства относительно эксцентриситетовъ. Отсюда мы заключаемъ, что движеніемъ всѣхъ планетъ въ одну сторону обусловливается въ извѣстномъ смыслѣ прочность устройства солнечной системы.

И такъ уравненіе (130) имѣетъ два дѣйствительные корня; означимъ ихъ чрезъ h_1 и h_2. Каждому изъ этихъ двухъ корней будетъ очевидно соотвѣтствовать своя система постоянныхъ величинъ γ, A и A'. Пусть величины соотвѣтствующія корню h_1 будутъ γ_1, A_1 и A_1', а корню h_2 пусть соотвѣтствуютъ γ_2, A_2 и A_2'. Такимъ образомъ полные интегралы уравненій (128) и (128_*) будутъ имѣть видъ

$$(131) \qquad \begin{aligned} u &= A_1 \sin (h_1 t + \gamma_1) + A_2 \sin (h_2 t + \gamma_2) \\ v &= A_1 \cos (h_1 t + \gamma_1) + A_2 \cos (h_2 t + \gamma_2) \\ u' &= A_1' \sin (h_1 t + \gamma_1) + A_2' \sin (h_2 t + \gamma_2) \\ v' &= A_1' \cos (h_1 t + \gamma_1) + A_2' \cos (h_2 t + \gamma_2) \end{aligned}$$

Посредствомъ этихъ выраженій уже легко опредѣлить эксцентриситетъ и долготу перигелія представленныя въ функціи времени.

Въ самомъ дѣлѣ возвышая два первыя уравненія въ квадратъ и складывая ихъ, получимъ

$$e^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(h_1 - h_2)t + \gamma_1 - \gamma_2] \qquad (132)$$

Раздѣливъ первое изъ тѣхъ же уравненій на второе, получимъ

$$\tang \pi = \frac{A_1 \sin(h_1 t + \gamma_1) + A_2 \sin(h_2 t + \gamma_2)}{A_1 \cos(h_1 t + \gamma_1) + A_2 \cos(h_2 t + \gamma_2)} \qquad (133)$$

Два послѣднія изъ уравненій (131) даютъ возможность опредѣлить подобнымъ же образомъ e' и π'. Очевидно, что наибольшее значеніе e^2 имѣетъ мѣсто при $(h_1 - h_2)t + \gamma_1 - \gamma_2 = 0$, а наименьшее при $(h_1 - h_2)t + \gamma_1 - \gamma_2 = 180^\circ$. Такимъ образомъ наибольшее значеніе e есть $e = A_1 + A_2$, а наименьшее $e = A_1 - A_2$. Слѣдовательно $e = A_1$ есть средняя величина, которую можетъ имѣть эксцентриситетъ, измѣняясь отъ возмущеній. Предположимъ, что t_1 есть время соотвѣтствующее наименьшему значенію эксцентриситета, а t_2 — наибольшему, тогда

$$(h_1 - h_2)t_1 + \gamma_1 - \gamma_2 = 0; \qquad (h_1 - h_2)t_2 + \gamma_1 - \gamma_2 = 180^\circ$$

Слѣдовательно промежутокъ времени, въ который эксцентриситетъ измѣняется отъ наименьшаго до наибольшаго значенія будетъ

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{180^\circ}{h_1 - h_2}$$

а полный періодъ измѣненія эксцентриситета будетъ слѣдовательно

$$\frac{360^\circ}{h_1 - h_2}$$

Чтобы опредѣлить подобно этому періодъ измѣненія долготы перигелія, найдемъ времена, въ которыя эта долгота, измѣняясь отъ вѣковыхъ возмущеній, достигаетъ наибольшей и наименьшей величины. Возьмемъ для этого отъ выраженія (133) производную по t, тогда будемъ имѣть

$$\frac{1}{\cos^2\pi} \cdot \frac{d\pi}{dt} = \frac{h_1 . A_1^2 + h_2 . A_2^2 + (h_1 + h_2) A_1 . A_2 \cos[(h_1 - h_2)t + \gamma_1 - \gamma_2]}{[A_1 \cos(h_1 t + \gamma_1) + A_2 \cos(h_2 t + \gamma_2)]^2}$$

или

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{h_1 . A_1^2 + h_2 . A_2^2 + (h_1 + h_2) A_1 . A_2 \cos[(h_1 - h_2)t + \gamma_1 - \gamma_2]}{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 . A_2 \cos[(h_1 - h_2)t + \gamma_1 - \gamma_2]}$$

Такъ какъ знаменатель ни для какого значенія t въ безконечность не обращается, то условіе maximum или minimum π будетъ представляться уравненіемъ

$$h_1 . A_1^2 + h_2 . A_2^2 + (h_1 + h_2) A_1 . A_2 \cos[(h_1 - h_2)t + \gamma_1 - \gamma_2] = 0$$

откуда

$$\cos[(h_1 - h_2)t + \gamma_1 - \gamma_2] = -\frac{h_1 . A_1^2 + h_2 . A_2^2}{(h_1 + h_2) A_1 . A_2}$$

Изъ этого уравненія можно опредѣлить величину t, соотвѣтствующую наибольшему или наименьшему значенію долготы перигелія только тогда, когда

$$\frac{h_1 . A_1^2 + h_2 . A_2^2}{(h_1 + h_2) A_1 . A_2} < 1$$

Если же эта дробь болѣе единицы, то i будетъ имѣть мнимую величину; другими словами, уравненіе, изъ котораго придется опредѣлить наибольшее значеніе π, не будетъ имѣть дѣйствительнаго корня и долгота перигелія въ этомъ случаѣ возрастаетъ или уменьшается неограниченно. Такимъ образомъ вопросъ о періодѣ измѣненія долготы перигелія не можетъ имѣть общаго рѣшенія.

9. Перейдемъ теперь къ интегрированію уравненій представляющихъ измѣненія наклоненія и долготы восходящаго узла. Для этой цѣли въ послѣднихъ двухъ изъ уравненій (25) мы удержимъ только члены нулеваго порядка относительно эксцентриситетовъ и наклоненій, ибо другіе члены дали бы величины третьяго и высшихъ порядковъ, которые мы условились отвергать. И такъ примемъ

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{an}{\sin i}\frac{dF}{di};\qquad \frac{di}{dt}=-\frac{an}{\sin i}\frac{dF}{d\theta}$$

Замѣтимъ, что по выраженіе (124)

$$\frac{dF}{d\theta}=-\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{\alpha A_1^{(3)}}{4}\sin i.\sin i'.\sin(\theta-\theta')$$

Но такъ какъ $A_1^{(3)}=\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}$, то

$$\frac{dF}{d\theta}=-\frac{\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}}\cdot\frac{\alpha}{4}\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}\sin i.\sin i'.\sin(\theta-\theta')$$

Слѣдовательно

(134)
$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\mu'}{4}\frac{an}{\sqrt{a^2+a'^2}}\alpha\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}\left[\frac{\sin i'}{\sin i}\cos(\theta-\theta')-1\right]$$
$$\frac{di}{dt}=\frac{\mu'}{4}\frac{an}{\sqrt{a^2+a'^2}}\alpha\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}\sin i'.\sin(\theta-\theta')$$

Положимъ подобно предыдущему

(135)
$$\sin i.\sin\theta=p;\qquad \sin i'.\sin\theta'=p'$$
$$\sin i.\cos\theta=q;\qquad \sin i'.\cos\theta'=q'$$

откуда

(136)
$$\frac{dp}{dt}=\cos i.\sin\theta\frac{di}{dt}+\sin i.\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{dq}{dt}=\cos i.\cos\theta\frac{di}{dt}-\sin i.\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

но такъ какъ мы ограничиваемся величинами втораго порядка относительно эксцентриситетовъ и наклоненій, то должны считать $\cos i=1$, принимая это, внесемъ въ

послѣднія уравненія вмѣсто производныхъ $\frac{di}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ ихъ выраженія (134) и тогда легко получимъ

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\mu'}{4}\frac{an}{\sqrt{a^2+a'^2}}\alpha\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}(q'-q)$$
$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\mu'}{4}\frac{an}{\sqrt{a^2+a'^2}}\alpha\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha}(p'-p) \tag{137}$$

положимъ здѣсь для краткости

$$\frac{\alpha}{4}\frac{dA_0^{(1)}}{d\alpha} = M; \qquad \frac{an\,.\,\mu'}{\sqrt{a^2+a'^2}} = b$$

тогда

$$\frac{dp}{dt} = bM(q'-q); \qquad \frac{dq}{dt} = -bM(p'-p) \tag{138}$$

подобнымъ же образомъ

$$\frac{dp'}{dt} = b'M(q-q'); \qquad \frac{dq'}{dt} = -b'M(p-p') \tag{138$_*$}$$

интегралы этихъ линейныхъ уравненій, какъ извѣстно, суть

$$p = B\,.\sin(kt+\delta); \qquad q = B\,.\cos(kt+\delta)$$
$$p' = B'.\sin(kt+\delta); \qquad q' = B'.\cos(kt+\delta) \tag{139}$$

Внося это въ уравненія (138) и (138$_*$), имѣемъ

$$kB = bM(B'-B); \qquad kB' = b'M(B-B')$$

исключая отсюда отношеніе $\frac{B}{B'}$, находимъ

$$k^2 + (b+b')M\,.\,k = 0$$

корни этого уравненія суть: $k_1 = -(b+b')M$ и $k_2 = 0$, слѣдовательно полные интегралы уравненій (138) и (138$_*$) представляются въ формѣ:

$$p = B_1\sin(k_1t+\delta_1) + B_2\sin\delta_2$$
$$q = B_1\cos(k_1t+\delta_1) + B_2\cos\delta_2$$
$$p' = B_1'\sin(k_1t+\delta_1) + B_2\sin\delta_2$$
$$q' = B_1'\cos(k_1t+\delta_1) + B_2\cos\delta_2 \tag{140}$$

Возвышая въ квадратъ и складывая первыя два изъ этихъ уравненій, имѣемъ

$$\sin^2 i = B_1{}^2 + B_2{}^2 + 2B_1B_2\cos(k_1t+\delta_1-\delta_2) \tag{141}$$

отсюда заключаемъ, что отъ дѣйствія вѣковыхъ возмущеній наклоненіе орбиты какой либо планеты не можетъ возрастать непрерывно, а измѣняется только въ извѣстныхъ

предѣлахъ и предѣлы измѣненія $\sin i$ суть $B_1 + B_2$ и $B_1 - B_2$. Раздѣливъ первое изъ уравненій (140) на второе, найдемъ

$$\tan\theta = \frac{B_1 \sin(k_1 t + \delta_1) + B_2 \sin\delta_2}{B_1 \cos(k_1 t + \delta_1) + B_2 \cos\delta_2} \tag{142}$$

Этимъ выраженіемъ должно пользоваться для вычисленія возмущеннаго значенія долготы узла орбиты. Подобно предыдущему легко находимъ, что время которому соотвѣтствуетъ наибольшее значеніе θ опредѣлится изъ выраженія

$$\cos(k_1 t + \delta_1 - \delta_2) = -\frac{B_1}{B_2}$$

Отсюда видимъ, что θ имѣетъ maximum и minimum только тогда, когда $\frac{B_1}{B_2} < 1$, въ противномъ же случаѣ узелъ орбиты отъ возмущеній движется по эклиптикѣ непрерывно въ одну сторону.

10. Опредѣлимъ наконецъ форму эпохи измѣненной вѣковыми возмущеніями.

Въ третьемъ изъ выраженій (25) мы отвергнемъ послѣдній членъ по его малости; во второмъ членѣ удержимъ ту часть, которая есть величина перваго порядка относительно эксцентриситета и такимъ образомъ примемъ

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -2a^2 n \frac{dF}{da} + \frac{ane}{2}\frac{dF}{de} \tag{143}$$

Форма производной $\frac{dF}{de}$ извѣстна, остается опредѣлить форму производной $\frac{dF}{da}$. Замѣтимъ, что a входитъ въ выраженіе (124) двояко: явно и въ зависимости отъ α; коэффиціенты же $\overset{(1)}{A_0}$ и $\overset{(1)}{A_1}$ содержатъ a только въ зависимости отъ α, поэтому помня, что для $k = 0$

$$\overset{(3)}{A_1} = \frac{d\overset{(1)}{A_0}}{d\alpha}$$

и что кромѣ того

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{a'(a'^2 - a^2)}{(a^2 + a'^2)^2}$$

Изъ выраженія (124), полагая

$$\frac{e^2 + e'^2}{8} - \frac{1}{2}\left[\sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right] + \frac{\sin i . \sin i}{4}\cos(\theta - \theta') = G$$

легко находимъ

$$\frac{dF}{da} = -\frac{\mu' a}{(a^2 + a'^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\overset{(1)}{A_0}}{2} + \frac{ee'}{4}\cos(\pi - \pi')\left(\overset{(1)}{A_1} - \alpha\frac{d\overset{(1)}{A_1}}{d\alpha}\right) + \alpha\frac{d\overset{(1)}{A_0}}{d\alpha}G\right]$$

$$+ \frac{\alpha}{a}\frac{\mu'(a'^2 - a^2)}{(a^2 + a'^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{2}\frac{d\overset{(1)}{A_0}}{d\alpha} - \frac{ee'}{4}\cos(\pi - \pi')\,\alpha\frac{d^2\overset{(1)}{A_1}}{d\alpha^2} + \left(\frac{d\overset{(1)}{A_0}}{d\alpha} + \alpha\frac{d^2\overset{(1)}{A_0}}{d\alpha^2}\right)G\right]$$

Вносъ это вмѣстѣ съ найденнымъ выше выраженіемъ $\frac{dF}{de}$ въ уравненіе (143) и полагая для краткости

$$P = \frac{\mu' a n}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[\frac{a^2}{a^2 + a'^2} \overset{(1)}{A_0} + \frac{a^2 - a'^2}{a^2 + a'^2} \alpha \frac{d\overset{(1)}{A_0}}{d\alpha} \right]$$

$$Q = \frac{\mu' a n}{8\sqrt{a^2 + a'^2}} \alpha \frac{d\overset{(1)}{A_0}}{d\alpha}$$

$$R = \frac{\mu'}{4} \frac{a n}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[\frac{2a^2 - a'^2}{a^2 + a'^2} \alpha \frac{d\overset{(1)}{A_0}}{d\alpha} + \frac{a^2 - a'^2}{a^2 + a'^2} \alpha^2 \frac{d^2\overset{(1)}{A_0}}{d\alpha^2} \right]$$

$$S = \frac{\mu'}{8} \frac{a n}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[\frac{5a^2 + a'^2}{a^2 + a'^2} \left(\overset{(1)}{A_1} - \alpha \frac{d\overset{(1)}{A_1}}{d\alpha} \right) - \frac{4(a^2 - a'^2)}{a^2 + a'^2} \alpha^2 \frac{d^2\overset{(1)}{A_1}}{d\alpha^2} \right]$$

легко находимъ

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = P + e^2 . Q + ee' . S . \cos(\pi - \pi') + \left[e^2 + e'^2 + 2 \sin i . \sin i' . \cos(\theta - \theta') - 4 \left\{ \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) \right\} \right] R \quad (144)$$

По выраженіямъ (131) составляемъ

$$ee' . \cos(\pi - \pi') = uu' + vv' = A_1 A_1' + A_2 A_2' + (A_1 A_2' + A_2 A_1') \cos[(h_1 - h_2)t + \gamma_1 - \gamma_2]$$

подобно этому выраженія (140) даютъ

$$\sin i . \sin i' . \cos(\theta - \theta') = B_1 B_1' + B_2^2 + B_2 (B_1 + B_1') \cos(k_1 t + \delta_1 - \delta_2)$$

Кромѣ того мы знаемъ, что

$$\sin^2 i = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos(k_1 t + \delta_1 - \delta_2)$$
$$\sin^2 i' = B_1'^2 + B_2'^2 + 2B_1' B_2' \cos(k_1 t + \delta_1 - \delta_2)$$

Въ выраженіе (144) входятъ однако не $\sin^2 i$ и $\sin^2 i'$, но $\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)$ и $\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)$, но принимая $\sin i = i$ и $\sin i' = i'$, мы будемъ считать

$$4\left[\sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) \right] = \sin^2 i + \sin^2 i'$$

Поэтому принимая все это во вниманіе и основываясь на выраженіи (132) и ему подобномъ для e'^2, приводимъ уравненіе (144) къ виду

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = M_0 n + M_1 \cos[(h_1 - h_2)t + \gamma_1 - \gamma_2] + M_2 \cos(k_1 t + \delta_1 - \delta_2) \quad (145)$$

гдѣ для краткости положено

$$M_0 n = P + (A_1^2 + A_2^2)(Q + R) + S(A_1 . A_1' + A_2 . A_2')$$
$$+ R[A_1'^2 + A_2'^2 - (B_1 - B_1')^2 + B_2^2 + B_2'^2]$$
$$M_1 = 2\left[A_1 A_2 Q + (A_1 A_2 + A_1' A_2') R + \frac{S}{2}(A_1 A_2' + A_2 A_1')\right]$$
$$M_2 = 2R . R_1' (B_2 - B_2')$$

Коэффиціенты выраженія (145) за исключеніемъ постоянныхъ величинъ содержатъ, какъ мы видимъ, элементы a и n, но мы знаемъ, что большія полуоси не подлежатъ вѣковымъ измѣненіямъ, тоже свойство имѣютъ слѣдовательно и среднія движенія, ибо $n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$. Такимъ образомъ коэффиціенты выраженія (145) надо считать при рѣшеніи разсматриваемаго вопроса за величины постоянныя, а слѣдовательно интегралъ этого выраженія будетъ

$$(146) \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 + M_0 n . t + \frac{M_1}{h_1 - h_2} \sin[(h_1 - h_2) t + \gamma_1 - \gamma_2] + \frac{M_2}{k_1} \sin(k_1 t + \delta_1 - \delta_2)$$

гдѣ ε_0 есть постоянная величина, вводенная интегрированіемъ и представляющая собою величину эпохи, соотвѣтствующую опредѣленному моменту времени.

11. Вычисленіе возмущенныхъ значеній элементовъ по выраженіямъ (132), (133), (141), (142) и (146) предполагаетъ, что изъ наблюденій опредѣлены значенія постоянныхъ введенныхъ интегрированіемъ, но на практикѣ это не легко выполняется, а потому вычисленіе вѣковыхъ возмущеній элементовъ основывается обыкновенно на соображеніяхъ подобныхъ тѣмъ, которыя мы указали въ n° 57, т. I для вычисленія измѣненій координатъ отъ прецессіи въ теченіи извѣстнаго промежутка времени.

Если хотимъ вычислить напр. годичныя измѣненія элементовъ, то въ теченіи такого малаго промежутка времени можемъ считать элементы e, e', π, π' и т. д. постоянными; тогда вторыя части уравненій (127) можно считать за постоянныя величины и интегрировать эти уравненія при такомъ допущеніи. Подобное интегрированіе приведется къ умноженію на t величинъ производныхъ $\frac{de}{dt}$ и $\frac{d\pi}{dt}$ вычисленныхъ по уравненіямъ (127) съ помощію частныхъ значеній элементовъ соотвѣтствующихъ опредѣленному моменту, напр. срединѣ разсматриваемаго промежутка времени.

Для вычисленія вѣковыхъ измѣненій элементовъ i и θ обыкновенно вычисляются измѣненія функцій p и q по уравненіямъ (137). Такъ какъ сама эклиптика отъ возмущеній перемѣщается въ пространствѣ, то чтобы имѣть движеніе узла и измѣненіе положенія орбиты какой либо планеты относительно подвижной эклиптики, вычислимъ сначала измѣненія функцій p и q для земной орбиты, а потомъ—измѣненія тѣхъ же функцій для разсматриваемой планеты. То и другое выполнимъ по уравненіямъ (137). Пусть $\frac{dp_2}{dt}$ и $\frac{dq_2}{dt}$ будутъ значенія производныхъ относящіяся къ земной орбитѣ, а $\frac{dp_1}{dt}$ и $\frac{dq_1}{dt}$ — значенія тѣхъ же производныхъ для разсматриваемой планеты. Вычисливъ эти производныя по уравненіямъ (137), внесемъ ихъ въ уравненія

$$\frac{di}{dt} = \sin\theta\,\frac{dp}{dt} + \cos\theta\,\frac{dq}{dt}$$

$$\sin i\,\frac{d\theta}{dt} = \cos\theta\,\frac{dp}{dt} - \sin\theta\,\frac{dq}{dt}$$

которыя легко получаются изъ уравненій (136). Такимъ образомъ если означимъ чрезъ $\frac{d\theta_1}{dt}$ и $\frac{di_1}{dt}$ движеніе узла и измѣненіе наклоненія разсматриваемой орбиты относительно подвижной эклиптики, то эти движенія опредѣлятся по выраженіямъ

$$\sin i\,\frac{d\theta_1}{dt} = \cos\theta\left(\frac{dp_1}{dt} - \frac{dp_2}{dt}\right) - \sin\theta\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt}\right)$$

$$\frac{di_1}{dt} = \sin\theta\left(\frac{dp_1}{dt} - \frac{dp_2}{dt}\right) + \cos\theta\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt}\right)$$

Если хотимъ вычислять по этимъ выраженіямъ измѣненія элементовъ θ и i въ теченіи промежутка времени t, то вычислимъ по нимъ производныя $\frac{d\theta_1}{dt}$ и $\frac{di_1}{dt}$ при помощи элементовъ соотвѣтствующихъ срединѣ разсматриваемаго промежутка времени и полученныя величины умножимъ на t.

Чтобы вычислить измѣненіе эпохи въ теченіи извѣстнаго промежутка времени, обратимся къ выраженію (144). Мы условились принять

$$4\sin^2\left(\frac{i}{2}\right) = p^2 + q^2; \qquad 4\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) = p'^2 + q'^2$$

а потому упомянутое сейчасъ выраженіе приводится къ виду

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = P + e^2.Q + [e^2 + e'^2 - (p - p')^2 - (q - q')^2]\,R + ee'.S\cos(\pi - \pi')$$

въ концѣ времени t элементы e, e', π, π' и функціи p, q и т. д. имѣютъ величины

$$e + t.\delta e; \qquad e' + t.\delta e'; \qquad p + t\,\frac{dp}{dt} \text{ и т. д.}$$

а потому внося это въ предыдущее выраженіе и ограничиваясь членами содержащими первыя степени измѣненій δe, $\delta e'$ и т. д., найдемъ, выполнивъ интегрированіе

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \xi.t + \eta.t^2$$

гдѣ ε_0 есть значеніе элемента ε, соотвѣтствующее началу разсматриваемаго промежутка времени t. Легко убѣдиться, что

$$\eta = Q.e\delta e.\sin 1'' + R\left[e\delta e + e'\delta e' - (p-p')\left(\frac{dp}{dt} - \frac{dp'}{dt}\right) - (q-q')\left(\frac{dq}{dt} - \frac{dq'}{dt}\right)\right]\sin 1''$$
$$+ \frac{S}{2}\left[(e'\delta e + e\delta e')\cos(\pi - \pi') - (\delta\pi - \delta\pi')\,ee'\sin(\pi - \pi')\right]\sin 1''$$

но этотъ коэффиціентъ обыкновенно такъ малъ, что членъ $\eta.t^2$ въ теченіи многихъ столѣтій едва достигаетъ секунды дуги, а потому достаточно принять

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \xi.t$$

Эпоха входитъ между прочимъ въ выраженіе средней долготы планеты, именно $l = \varepsilon + nt$, слѣдовательно $l = \varepsilon_0 + (n + \xi)\,t$. Такимъ образомъ членъ $\xi . t$ можетъ быть отнесенъ къ среднему движенію планеты, сама же эпоха можетъ считаться тогда постоянною величиною относительно вѣковыхъ возмущеній. Замѣтимъ наконецъ, что для того чтобы получить среднее движеніе планеты соотвѣтствующее ея первоначальной орбитѣ, слѣдуетъ вычесть величину ξ изъ средняго движенія выведеннаго изъ наблюденій.

12. Посмотримъ теперь на основаніи какихъ соображеній могутъ быть вычисляемы періодическія неравенства планетъ.

Положеніе свѣтила въ пространствѣ вполнѣ опредѣляется тремя координатами: радіусомъ векторомъ, долготою и широтою. Эти три координаты суть функціи элементовъ и времени, а потому мы получимъ возмущенное значеніе этихъ координатъ, если внесемъ въ ихъ выраженія возмущенныя значенія элементовъ, соотвѣтствующія тому времени, для котораго хотимъ опредѣлить возмущенное положеніе свѣтила.

Мы знаемъ, что $r = a\,(1 - e . \cos u)$, гдѣ подъ u разумѣемъ эксцентрическую аномалію. Чтобы найти посредствомъ этого выраженія измѣненіе радіуса вектора соотвѣтствующее измѣненію элементовъ отъ возмущеній, будемъ дифференцировать приведенное выраженіе и при этомъ измѣненія различныхъ величинъ отъ возмущеній означимъ характеристикой δ. Тогда получимъ

$$\delta r = (1 - e . \cos u)\,\delta a + ae . \sin u . \delta u - a . \cos u . \delta e$$

Эксцентрическая аномалія сама зависитъ отъ элементовъ, а потому ея измѣненію т. е. δu представимъ въ зависимости отъ измѣненій этихъ послѣднихъ. Мы знаемъ, что

$$\zeta = u - e . \sin u$$

гдѣ подъ ζ разумѣемъ среднюю аномалію. Пусть g будетъ средняя долгота свѣтила, тогда $\zeta = g - \pi$; слѣдовательно

$$\delta u = \frac{\sin u . \delta e + \delta g - \delta\pi}{1 - e . \cos u}$$

посредствомъ этого измѣненіе радіуса вектора представится въ видѣ

$$\delta r = \frac{r}{a} \cdot \delta a - \frac{a\,(\cos u - e)}{1 - e . \cos u}\,\delta e + \frac{ae . \sin u}{1 - e . \cos u}\,(\delta g - \delta\pi)$$

а это посредствомъ выраженій (25) и (30), ч. 4 обращается въ

$$(147) \qquad \delta r = \frac{r}{a}\,\delta a - a \cos f . \delta e + \frac{ae}{\sqrt{1 - e^2}} \sin f\,[\delta g - \delta\pi]$$

чтобы имѣть выраженія δa, δe, $\delta\pi$ мы должны интегрировать уравненія (25) и интегралы, не содержащіе произвольныхъ постоянныхъ, представятъ собою искомыя измѣненія. Мы уже замѣтили, что вмѣсто полныхъ выраженій $\frac{de}{dt}$ и $\frac{d\pi}{dt}$ достаточно принять

$$\frac{de}{dt} = -\frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi} - \frac{ane}{2}\frac{dR}{d\varepsilon}; \qquad \frac{d\pi}{dt} = \frac{an}{e}\frac{dR}{de}$$

отсюда и по первому изъ выраженій (25) находимъ

$$\delta c = -\int \frac{ane}{2}\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt - \int \frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt$$

$$\delta\pi = \int \frac{an}{e}\frac{dR}{de}\cdot dt; \qquad \delta a = 2\int a^2 n\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt \tag{148}$$

остается найти форму измѣненія средней долготы. Такъ какъ $g = nt + \varepsilon$, то

$$\frac{dg}{dt} = t\frac{dn}{dt} + n + \frac{d\varepsilon}{dt}$$

но такъ какъ $n . a^{\frac{3}{2}} = K$, то

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt} \tag{149}$$

слѣдовательно

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}t\frac{da}{dt} + n + \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{150}$$

Здѣсь вмѣсто $\frac{d\varepsilon}{dt}$ должно быть внесено выраженіе этой производной, составленное по формѣ (143) при замѣнѣ функціи F полной пертурбаціонной функціей R. Замѣтимъ еще, что

$$\frac{dR}{da} = \left(\frac{dR}{da}\right) + \frac{dR}{dn}\frac{dn}{da}$$

гдѣ подъ $\left(\frac{dR}{da}\right)$ разумѣемъ производную функціи R, изятую относительно a входящаго въ R явно. Такъ какъ

$$\frac{dn}{da} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}$$

то предыдущее можно представить въ видѣ

$$\frac{dR}{da} = \left(\frac{dR}{da}\right) - \frac{3}{2}\frac{dR}{t.dn}\frac{nt}{a}$$

Замѣтимъ, что перемѣнныя nt и ε входятъ въ R не иначе какъ подъ знакомъ тригонометрическихъ функцій и при томъ всегда въ видѣ суммы $nt + \varepsilon$. Поэтому

$$\frac{dR}{t.dn} = \frac{dR}{d\varepsilon}$$

Слѣдовательно

$$\frac{dR}{da} = \left(\frac{dR}{da}\right) - \frac{3}{2}\frac{nt}{a}\frac{dR}{d\varepsilon}$$

Внося это въ выраженіе (143), найдемъ

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -2a^2 n\left(\frac{dR}{da}\right) + 3an^2.t\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{nae}{2}\frac{dR}{de}$$

Если въ выраженіи (150) поставимъ на мѣсто $\frac{da}{dt}$ форму взятую изъ уравненій (25), то посредствомъ предыдущаго производная $\frac{dy}{dt}$ приведется къ виду

$$\frac{dy}{dt} = n - 2a^2n\left(\frac{dR}{da}\right) + \frac{ane}{2}\frac{dR}{de}$$

Понятно, что

$$n = \int \frac{dn}{dt}dt + \lambda$$

гдѣ λ есть постоянная величина, введенная интегрированіемъ. Эта постоянная опредѣляется обыкновенно подъ тѣмъ условіемъ, чтобы въ выраженіяхъ неравенствъ средней долготы не содержалось членовъ пропорціональныхъ времени. Такимъ образомъ если неравенство средней долготы имѣетъ форму $at + b.n\lambda t + K$, гдѣ подъ K разумѣемъ сумму періодическихъ членовъ, а подъ a и b нѣкоторые постоянные коеффиціенты, то λ должно быть опредѣлено изъ уравненія $at + bn.\lambda t = 0$. По выраженію (149)

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt} = -3an^2\frac{dR}{d\varepsilon}$$

Слѣдовательно

$$n = -3\int an^2\frac{dR}{d\varepsilon}dt + \lambda$$

а потому

$$\frac{dy}{dt} = \lambda - 2a^2n\left(\frac{dR}{da}\right) + \frac{ane}{2}\frac{dR}{de} - 3\int an^2\frac{dR}{d\varepsilon}dt$$

Откуда заключаемъ, что

$$\delta y = \lambda.t - 2\int a^2n\left(\frac{dR}{da}\right)dt + \frac{1}{2}\int ane\frac{dR}{de}dt - 3\int\int an^2\frac{dR}{d\varepsilon}dt.dt$$

Внося это вмѣстѣ съ выраженіями (148) въ выраженіе (147), получаемъ

$$\frac{\delta r}{a} = 2\frac{r}{a^2}\int a^2n\frac{dR}{d\varepsilon}dt + \cos f\int\frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}dt - \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin f\int\frac{an}{e}\frac{dR}{de}dt$$

$$+\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\left[\lambda t - 3\int\int an^2\frac{dR}{d\varepsilon}dt.dt - 2\int a^2n\left(\frac{dR}{da}\right)dt\right]$$

Такъ какъ интегрированіе въ первомъ членѣ производится относительно времени входящаго явно, то первый членъ можно представить въ видѣ

$$2\frac{r}{a}\int an\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt$$

Кромѣ того мы имѣемъ въ виду ограничиться величинами втораго порядка относительно эксцентриситета, а потому на основаніи общихъ выраженій, найденныхъ въ n° 5, ч. 5, можемъ считать

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - e.\cos\zeta - \frac{e^2}{2}\cos 2\zeta$$

$$\cos f = -e + \left(1 - \frac{9}{8}e^2\right)\cos\zeta + e.\cos 2\zeta + \frac{9}{8}e^2.\cos 3\zeta$$

$$\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}} = \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right)\sin\zeta + e.\sin 2\zeta + \frac{9}{8}e^2.\sin 3\zeta$$

и тогда вѣрно включительно до членовъ втораго порядка имѣемъ

$$\begin{aligned}\frac{\delta r}{a} = &\left[2 + \frac{e^2}{2} - \frac{3e}{2}\cos\zeta - \frac{e^2}{2}\cos 2\zeta\right]\int an\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt\\ &- \left[e - \left(1 - \frac{9e^2}{8}\right)\cos\zeta - e.\cos 2\zeta - \frac{9e^2}{8}\cos 3\zeta\right]\int \frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt\\ &- \left[\left(1 - \frac{3e^2}{8}\right)\sin\zeta + e.\sin 2\zeta + \frac{9}{8}e^2.\sin 3\zeta\right]\int an\frac{dR}{de}\cdot dt\\ &+ \left[\left(e - \frac{3e^3}{8}\right)\sin\zeta + e^2.\sin 2\zeta + \frac{9e^3}{8}\sin 3\zeta\right]\delta g\end{aligned}$$

но такъ какъ

$$\frac{9}{8}e^2 = \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{4}e^2; \qquad \frac{3}{8}e^2 = \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{8}e^2$$

то предыдущее удобно представить въ видѣ

$$\begin{aligned}\frac{\delta r}{a} = &\left[2 + \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}e.\cos\zeta - \frac{e^2}{2}\cos 2\zeta\right]\int an\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt - e\int\frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt\\ &-\left(1 - \frac{3}{4}e^2\right)\left[\sin\zeta\int an\frac{dR}{de}\cdot dt - \cos\zeta\int\frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt\right]\\ &- e\left[\sin 2\zeta\int an\frac{dR}{de}\cdot dt - \cos 2\zeta\int\frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt\right]\\ &-\frac{9}{8}e^2\left[\sin 3\zeta\int an\frac{dR}{de}\cdot dt - \cos 3\zeta\int\frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt\right]\\ &-\frac{3}{8}e^2\left[\sin\zeta\int an\frac{dR}{de}\cdot dt + \cos\zeta\int\frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt\right]\\ &+\left[\left(e - \frac{3}{8}e^3\right)\sin\zeta + e^2.\sin 2\zeta + \frac{9}{8}e^3.\sin 3\zeta\right]\delta g\end{aligned} \qquad (151)$$

Опредѣлимъ теперь форму измѣненія истинной долготы въ орбитѣ. Если означимъ чрезъ v истинную долготу, чрезъ g среднюю долготу, чрезъ y уравненіе центра, то какъ извѣстно $v = g + y$. Но помня, что $\zeta = g - \pi$, изъ уравненій (245) и (249), ч. 4 имѣемъ

$$y = \left(2e - \frac{e^3}{4}\right)\sin(g-\pi) + \frac{5}{4}e^2.\sin 2(g-\pi) + \frac{13}{12}e^3.\sin 3(g-\pi)$$

откуда

$$\delta y = (\delta g - \delta\pi)\left[\left(2e - \frac{e^3}{4}\right)\cos\zeta + \frac{5}{2}e^2.\cos 2\zeta + \frac{13}{4}e^3.\cos 3\zeta\right]$$

$$+ \delta e\left[\left(2 - \frac{3e^2}{4}\right)\sin\zeta + \frac{5}{2}e.\sin 2\zeta + \frac{13}{4}e^2.\sin 3\zeta\right]$$

но такъ какъ $\delta v = \delta g + \delta y$, то при помощи этого и выраженій (148) составляемъ

$$\delta v = \delta g + \left[\left(2e - \frac{e^3}{4}\right)\cos\zeta + \frac{5}{2}e^2.\cos 2\zeta + \frac{13}{4}e^3.\cos 3\zeta\right]\left[\delta g - \int\frac{an}{e}\frac{dR}{de}\cdot dt\right]$$

$$-\left[\left(2 - \frac{3}{4}e^2\right)\sin\zeta + \frac{5}{2}e.\sin 2\zeta + \frac{13}{4}e^2.\sin 3\zeta\right]\left[\int\frac{ane}{2}\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt + \int\frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt\right]$$

но вмѣсто этого совершенно удовлетворительно принять

$$\delta v = \delta g + \left[\left(2e - \frac{e^3}{4}\right)\cos\zeta + \frac{5}{2}e^2.\cos 2\zeta + \frac{13}{4}e^3.\cos 3\zeta\right]\delta g$$

$$-\left[\left(2 - \frac{e^2}{4}\right)\cos\zeta + \frac{5}{2}e.\cos 2\zeta + \frac{13}{4}e^2.\cos 3\zeta\right]\int an\frac{dR}{de}\cdot dt$$

$$-\left[\left(2 - \frac{3}{4}e^2\right)\sin\zeta + \frac{5}{2}e.\sin 2\zeta + \frac{13}{4}e^2.\sin 3\zeta\right]\int\frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt$$

$$-\left[e.\sin\zeta + \frac{5e^2}{4}\sin 2\zeta\right]\int an\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt$$

или такъ какъ $\frac{e^2}{4} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}$ и $\frac{3e^2}{4} = \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4}$, то

$$\delta v = \delta g - \left(2 - \frac{e^2}{2}\right)\left[\sin\zeta \int \frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt + \cos\zeta \int an\frac{dR}{de}\cdot dt\right]$$

$$- \frac{5}{2}e\left[\sin 2\zeta \int \frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt + \cos 2\zeta \int an\frac{dR}{de}\cdot dt\right]$$

$$- \frac{13}{4}e^2\left[\sin 3\zeta \int \frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt + \cos 3\zeta \int an\frac{dR}{de}\cdot dt\right] \quad (152)$$

$$+ \frac{e^2}{4}\left[\sin\zeta \int \frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt - \cos\zeta \int an\frac{dR}{de}\cdot dt\right]$$

$$+ \left[\left(2e - \frac{e^3}{4}\right)\cos\zeta + \frac{5}{2}e^2.\cos 2\zeta + \frac{13}{4}e^3.\cos 3\zeta\right]\delta g$$

$$- \left[e.\sin\zeta + \frac{5e^2}{4}\sin 2\zeta\right]\int an\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt$$

Изъ этой суммы только два первые члена имѣютъ главное вліяніе на долготу планеты. Первый членъ, т. е. δg представляетъ возмущенія средней долготы, а остальная сумма заключаетъ въ себѣ неравенства уравненія центра.

Найдемъ наконецъ форму измѣненія отъ возмущеній широты свѣтила. Для этого изъ треугольника APp (фиг. 6) имѣемъ

$$\sin b = \sin i.\sin(v - \theta)$$

Положимъ $\sin b = s$ и вводя означенія (135), найдемъ

$$s = q.\sin v - p.\cos v$$

Слѣдовательно

$$\delta s = \sin v.\delta q - \cos v.\delta p + (q.\cos v + p.\sin v)\,\delta v$$

Но такъ какъ

$$\delta q = \int \frac{dq}{dt}\cdot dt; \qquad \delta p = \int \frac{dp}{dt}\cdot dt$$

то

$$\delta s = \sin v \int \frac{dq}{dt}\cdot dt - \cos v \int \frac{dp}{dt}\cdot dt + (q.\cos v + p.\sin v)\,\delta v$$

Но изъ уравненій (25) съ принятою степенью точности имѣемъ

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{an}{\sin i}\frac{dR}{di}; \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{an}{\sin i}\frac{dR}{d\theta} - an\left(\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\pi}\right)\operatorname{tang}\frac{i}{2}$$

а потому принимая во вниманіе уравненія (136), приводимъ предыдущее къ виду

$$\delta s = -\sin(v-\theta)\int \frac{an}{\sin i}\frac{dR}{d\theta}\cdot dt - \cos(v-\theta)\int an\frac{dR}{di}\cdot dt$$

(153)

$$+\sin i.\cos(v-\theta)\,\delta v - \sin(v-\theta)\operatorname{tang}\frac{i}{2}\int an\left(\frac{dR}{d\varepsilon}+\frac{dR}{d\pi}\right)\cdot dt$$

гдѣ δv должно быть вычислено по выраженіе (152).

Разсматривая выраженія для $\frac{\delta r}{a}$, δv и δs, мы видимъ, что вычисленіе ихъ приводится къ вычисленію интеграловъ

$$\int \frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt;\quad \int an\frac{dR}{de}\cdot dt;\quad \int ane\frac{dR}{de}\cdot dt;\quad \int \frac{an}{\sin i}\frac{dR}{d\theta}\cdot dt$$

$$\int an\frac{dR}{di}\cdot dt;\quad \int an\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt;\quad \int\int an^2\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt.dt;\quad \int a^2n\frac{dR}{da}\cdot dt$$

Такъ какъ всѣ эти интегралы берутся относительно времени входящаго явно, то первые пять интеграловъ могутъ быть представлены въ видѣ производныхъ отъ функціи

$$P = \int anR.dt$$

взятыхъ относительно элементовъ. Такимъ образомъ

$$\int \frac{an}{e}\frac{dR}{d\pi}\cdot dt = \frac{1}{e}\frac{dP}{d\pi};\quad \int an\frac{dR}{de}\cdot dt = \frac{dP}{de};\quad \int \frac{an}{\sin i}\frac{dR}{d\theta}\cdot dt = \frac{1}{\sin i}\frac{dP}{d\theta}$$

$$\int an\frac{dR}{di}\cdot dt = \frac{dP}{di};\quad \int ane\frac{dR}{de}\cdot dt = e\frac{dP}{de}$$

И такъ все приводится главнымъ образомъ къ вычисленію слѣдующихъ трехъ функцій:

$$P = \int anR.dt;\quad T = \int\int an^2\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt.dt;\quad U = \int a^2n\frac{dR}{da}\cdot dt$$

Что касается до $\int an\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt$, то очевидно, что

$$\int an\frac{dR}{d\varepsilon}\cdot dt = \frac{1}{n}\cdot\frac{dT}{dt}$$

Посмотримъ какимъ образомъ могутъ быть вычислены указанныя теперь три

функціи. Понятно, что выраженіе (122) можетъ быть представлено въ видѣ

$$R_1 = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} Q_k^{(h,p)} \cos\left[k(g-g') + pg + h\right]$$

Въ самомъ дѣлѣ, первые три члена выраженія (122) мы получимъ изъ этой общей формы, если сдѣлаемъ $h = 0$, $p = 0$ и будемъ считать

$$Q_k^{(0,0)} = \frac{\mu'}{2\sqrt{a^2+a'^2}}\left[A_k^{(1)} - \left\{\sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right\}\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + (e^2+e'^2)B_k\right]$$

Для составленія четвертаго члена примемъ $p = 1$, $h = -\pi$ и условимся считать

$$Q_k^{(1,-\pi)} = \frac{\mu'}{2\sqrt{a^2+a'^2}} C_k$$

Но такъ какъ $g = nt + \varepsilon$, $g' = n't + \varepsilon'$, то очевидно, что

$$P = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{anQ_k^{(h,p)}}{\left[k(n-n') + pn\right]} \sin\left[k(g-g') + pg + h\right] + \int anR_2 \,.\, dt$$

гдѣ подъ R_2 разумѣемъ выраженіе (123). Такъ какъ въ послѣднемъ членѣ интегралъ берется относительно времени входящаго явно, то развить этотъ членъ посредствомъ выраженія (123) не трудно. Въ самомъ дѣлѣ

$$\int anR_2\,.\,dt = \mu'\frac{a^3}{a'^2}n\left[\frac{3e}{2n}\sin(g'-\pi) + \frac{3}{2}\frac{ee'}{n'}\sin(2g-\pi-\pi') - \frac{2e'}{n-2n'}\sin(g-2g'+\pi') - \text{и т.д.}\right]$$

Опредѣлимъ теперь функцію T. Понятно, что

$$\frac{dR_1}{d\varepsilon} = -\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(k+p)\,Q_k^{(h,p)}\sin\left[k(g-g') + pg + h\right]$$

откуда

$$\int an^2\frac{dR_1}{d\varepsilon}\cdot dt = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{(k+p)\,an^2Q_k^{(h,p)}}{k(n-n') + pn}\cos\left[k(g-g') + pg + h\right]$$

а слѣдовательно

$$T = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{(k+p)\,an^2Q_k^{(h,p)}}{\left[k(n-n') + pn\right]^2}\sin\left[k(g-g') + pg + h\right] + \int\!\!\int an^2\frac{dR_2}{d\varepsilon}\cdot dt\,.\,dt$$

Послѣдній членъ выполняется легко.

Что касается наконецъ до функціи U, то понятно, что

$$U = \int a^2 n \frac{dR_1}{da} \cdot dt + \int a^2 n \frac{dR_2}{dt} \cdot dt$$

Но легко видѣть, что

$$a^2 n \frac{dR_2}{da} = anR_2$$

Слѣдовательно

$$U = \int a^2 n \frac{dR_1}{da} \cdot dt - \int anR_2 . dt$$

такъ какъ послѣдній членъ выполняется легко, то остается только составить производную $\frac{dR_1}{da}$. Мы прямо составимъ функцію $a^2 \frac{dR_1}{da}$. Такъ какъ эта производная берется относительно a входящаго явно, то составленіе упомянутой сейчасъ функціи приводится къ составленію функцій

$$a^2 \frac{d\left(\frac{A_k^{(1)}}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right)}{da}; \quad a^2 \frac{d\left(\frac{\alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right)}{da}; \quad a^2 \frac{d\left(\frac{B_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right)}{da} \quad \text{и т. д.}$$

Понятно, что

$$a^2 \frac{d\left[\frac{A_k^{(1)}}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = -\frac{A_k^{(1)} . a^3}{(a^2 + a'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{da}$$

Но такъ какъ

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{a'(a'^2 - a^2)}{(a^2 + a'^2)^2}$$

то

$$a^2 \frac{d\left[\frac{A_k^{(1)}}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[A_k^{(1)} \frac{a^2}{a^2 + a'^2} - \frac{(a'^2 - a^2)}{a^2 + a'^2} \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}\right]$$

полагая здѣсь

$$Y_k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[A_k^{(1)} \frac{a^2}{a^2 + a'^2} + \frac{a^2 - a'^2}{a^2 + a'^2} \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}\right]$$

имѣемъ

(154)
$$a^2 \frac{d\left[\frac{A_k^{(1)}}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = -Y_k$$

Замѣтимъ, что функція Y_k находится въ простой зависимости отъ X_k, именно

$$Y_k = \frac{X_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}$$

Далѣе, легко видѣть, что

$$a^2 \frac{d\left[\frac{\alpha}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}\right]}{da} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[\frac{a'^2 - 2a^2}{a^2 + a'^2}\, \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{a'^2 - a^2}{a^2 + a'^2}\, \alpha^2 \frac{d^2 A_k^{(1)}}{d\alpha^2}\right]$$

Пусть

$$Z_k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[\frac{2a^2 - a'^2}{a^2 + a'^2}\, \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{a^2 - a'^2}{a^2 + a'^2}\, \alpha^2 \frac{d^2 A_k^{(1)}}{d\alpha^2}\right]$$

тогда

$$a^2 \frac{d\left[\frac{\alpha}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}\right]}{da} = -Z_k \tag{155}$$

Дифференцируя коэффиціентъ третьяго члена функціи R_1, имѣемъ

$$\frac{d\left[\frac{B_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = \frac{1}{4\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[\frac{a'^2 - 2a^2 a'}{(a^2 + a'^2)^2} \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{a'(a'^2 - a^2)}{(a^2 + a'^2)^2}\, \alpha \frac{d^2 A_k^{(1)}}{d\alpha^2}\right]$$

$$- \frac{3k^2}{4\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[\frac{a'(a'^2 - a^2)}{(a^2 + a'^2)^2} \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - \frac{a}{a^2 + a'^2} A_k^{(1)}\right]$$

или

$$a^2 \frac{d\left[\frac{B_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = \frac{1}{4} \frac{a}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[\frac{a'^2 - 2a^2}{a^2 + a'^2}\, \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{a'^2 - a^2}{a^2 + a'^2}\, \alpha^2 \frac{d^2 A_k^{(1)}}{d\alpha^2}\right]$$

$$- \frac{3k^2 . a}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \left[\frac{a'^2 - a^2}{a^2 + a'^2}\, \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - \frac{a^2}{a^2 + a'^2} A_k^{(1)}\right]$$

или

$$a^2 \frac{d\left[\frac{B_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = -\frac{1}{4} Z_k + \frac{3}{4} k^2 . Y_k$$

Дифференцируя коэффиціентъ члена съ аргументомъ $k(g - g') + g - \pi$, имѣемъ

$$a^2 \frac{d\left[\frac{C_k}{\sqrt{a^2+a'^2}}\right]}{da} = \frac{2ka}{\sqrt{a^2+a'^2}}\left[\frac{aa'(a'^2-a^2)}{(a^2+a'^2)^2}\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - \frac{a^2}{a^2+a'^2}A_k^{(1)}\right]$$

$$(156) \qquad + \frac{a(2a^2-a'^2)(a'^2-a^2)}{(a^2+a'^2)}\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{(5aa'^2-a^3)a^2}{(a^2+a'^2)^{\frac{5}{2}}}\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}$$

$$+ \frac{a^2(2aa'^2-a^3)}{(a^2+a'^2)^{\frac{5}{2}}}A_k^{(1)} - \frac{a\alpha^2}{(a^2+a'^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{(a^2-a'^2)}{(a^2+a'^2)^2}\frac{d^2A_k^{(1)}}{d\alpha^2}$$

Уравненіе (79) при $s = 1$ даетъ

$$(a) \qquad \alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} = \frac{1}{2}\left(A_k^{(3)} - A_k^{(1)}\right)$$

взявъ отъ этого производную по α, получимъ

$$\alpha\frac{d^2A_k^{(1)}}{d\alpha^2} = \frac{1}{2}\frac{dA_k^{(3)}}{d\alpha} - \frac{3}{2}\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}$$

Слѣдовательно

$$(b) \qquad \alpha^2\frac{d^2A_k^{(1)}}{d\alpha^2} = \frac{\alpha}{2}\frac{dA_k^{(3)}}{d\alpha} - \frac{3}{2}\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}$$

То же уравненіе (79) при $s = 3$ даетъ

$$3A_k^{(5)} = 2\alpha\frac{dA_k^{(3)}}{d\alpha} - 3A_k^{(3)}$$

откуда

$$\alpha\frac{dA_k^{(3)}}{d\alpha} = \frac{3}{2}A_k^{(5)} - \frac{3}{2}A_k^{(3)}$$

Уравненіе же (81) при $s = 3$ и уравненіе (77) при $s = 1$ даютъ

$$A_k^{(5)} = \frac{(2k+3)A_k^{(3)} - 2\alpha(2k-1)A_{k+1}^{(1)}}{3(1-4\alpha^2)}; \qquad \alpha A_{k+1}^{(1)} = \alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - kA_k^{(1)}$$

Слѣдовательно

$$A_k^{(5)} = \frac{(2k+3)A_k^{(3)} - 2(2k-1)\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + 2(2k^2-k)A_k^{(1)}}{3(1-4\alpha^2)}$$

а потому

$$\alpha\frac{dA_k^{(3)}}{d\alpha} = \frac{k+6\alpha^2}{1-4\alpha^2}A_k^{(3)} - \frac{2k-1}{1-4\alpha^2}\alpha\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{2k^2-k}{1-4\alpha^2}A_k^{(1)}$$

Посредствомъ этого обращаемъ уравненіе (b) въ

$$\alpha^2\frac{d^2A_k^{(1)}}{d\alpha^2} = \frac{k+6\alpha^2}{2(1-4\alpha^2)}A_k^{(3)} - \frac{\alpha}{2}\left[\frac{2k-1}{1-4\alpha^2}+3\right]\frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{2k^2-k}{2(1-4\alpha^2)}A_k^{(1)}$$

Уравненіе (79) при $s = 1$ даетъ

$$A_k^{(3)} = 2\alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + A_k^{(1)}$$

поэтому

$$\alpha^2 \frac{d^2 A_k^{(1)}}{d\alpha^2} = \frac{12\alpha^2 - 1}{1 - 4\alpha^2}\, \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} + \frac{3\alpha^2 + k^2}{1 - 4\alpha^2}\, A_k^{(1)}$$

или

$$\frac{(a^2 - a'^2)^2}{(a^2 + a'^2)^2}\, \alpha^2 \frac{d^2 A_k^{(1)}}{d\alpha^2} = (3\alpha^2 + k^2)\, A_k^{(1)} + (12\alpha^2 - 1)\, \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}$$

Внося это въ уравненіе (156), послѣ легкихъ приведеній получимъ

$$a^2 \frac{d\left[\frac{C_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = -2kY_k - \frac{2a^3}{(a^2 + a'^2)^{\frac{3}{2}}}\, \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha} - \frac{a^3}{(a^2 + a'^2)^{\frac{3}{2}}}\, A_k^{(1)} - \frac{k^2 a}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\, A_k^{(1)}$$

а это посредствомъ уравненія (a) обращается въ

$$a^2 \frac{d\left[\frac{C_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = -2kY_k - \frac{a^3}{(a^2 + a'^2)^{\frac{3}{2}}}\, A_k^{(3)} - \frac{k^2 . a}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\, A_k^{(1)}$$

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$a^2 \frac{d\left[\frac{D_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = (2k + 1)\, Y_{k+1} + \frac{(k+1)^2\, a}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\, A_{k+1}^{(1)} + \frac{a^3}{(a^2 + a'^2)^{\frac{3}{2}}}\, A_{k+1}^{(3)}$$

$$a^2 \frac{d\left[\frac{E_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = -\frac{1}{2}(k + 1)(3k + 1)\, Y_{k+1} + \frac{Z_k}{2}$$

$$a^2 \frac{d\left[\frac{F_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\left[(k+1)^3 A_{k+1}^{(1)} + (k+1)\, \alpha \frac{dA_{k+1}^{(1)}}{d\alpha}\right] + \frac{(k+1)(5k+7)}{2}\, Y_{k+1} + \frac{Z_{k+1}}{2}$$

$$a^2 \frac{d\left[\frac{G_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\left[k^2 (k+1)\, A_k^{(1)} + (k+1)\, \alpha \frac{dA_k^{(1)}}{d\alpha}\right] - \frac{(k+1)(5k+4)}{4}\, Y_k - \frac{Z_k}{4}$$

$$a^2 \frac{d\left[\frac{H_k}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\right]}{da} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + a'^2}}\left[(k+1)(k+2)^2 A_{k+2}^{(1)} + (k+1)\, \alpha \frac{dA_{k+2}^{(1)}}{d\alpha}\right] - \frac{5}{4}(k+1)(k+2)\, Y_{k+2} - \frac{Z_{k+2}}{4}$$

Наконецъ производныя взятыя относительно a отъ четырехъ послѣднихъ членовъ функціи R_1 зависятъ отъ производной

$$\frac{d\left[\frac{\alpha}{\sqrt{a^2+a'^2}}A_{k+1}^{(3)}\right]}{da}$$

Изъ уравненія (77) при $s = 1$ находимъ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+a'^2}}A_{k+1}^{(3)} = \frac{a}{\sqrt{a^2+a'^2}}\frac{dA_k^{(1)}}{da} - \frac{k}{\sqrt{a^2+a'^2}}A_k^{(1)}$$

а отсюда, обращая вниманіе на уравненія (154) и (155), легко находимъ

$$a^2\frac{d\left[\frac{\alpha}{\sqrt{a^2+a'^2}}A_{k+1}^{(3)}\right]}{da} = kY_k - Z_k$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ теперь все необходимое для составленія функціи

$$\int a^2 n\frac{dR_1}{da}dt$$

послѣ чего легко уже образуется функція U, одна изъ тѣхъ трехъ, которыя необходимы для вычисленія возмущеній радіуса вектора, долготы и широты свѣтила по выраженіямъ (151), (152), (153).

13. Заключенія о прочности устройства солнечной системы, основанныя на интегрированіи уравненій (25) имѣютъ весьма важное значеніе въ небесной механикѣ, и потому мы считаемъ не лишнимъ въ концѣ этой главы возвратиться еще разъ къ вопросу объ этомъ предметѣ.

Дадимъ первому, второму и шестому изъ уравненій (25) болѣе простой видъ. Мы знаемъ, что

$$n = \frac{K\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{\nu}{a^3}}$$

гдѣ слѣдовательно $K\sqrt{\mu} = \sqrt{\nu}$. Посредствомъ этого первое изъ уравненій (25) приводится къ виду

$$\frac{da}{dt} = 2\sqrt{a.\nu}\frac{dR}{d\varepsilon}$$

или къ виду

$$(157)\qquad \frac{d\left(\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right)}{dt} = \frac{dR}{d\varepsilon}$$

Второму изъ уравненій (25) можно дать видъ

$$-\frac{1}{an\sqrt{1-e^2}}\,e\,\frac{de}{dt}=[\sqrt{1-e^2}-1]\frac{dR}{d\varepsilon}-\frac{dR}{d\pi}$$

Внося вмѣсто n и $\frac{dR}{d\varepsilon}$ ихъ предыдущія величины, легко приведемъ это уравненіе къ виду

$$\frac{dR}{d\pi}=[\sqrt{1-e^2}-1]\,\frac{d\left(\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right)}{dt}-\sqrt{\frac{a}{\nu}}\,\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{de}{dt}$$

что очевидно обращается въ

$$\frac{dR}{d\pi}=\frac{d\left[(\sqrt{1-e^2}-1)\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right]}{dt} \qquad (158)$$

Посредствомъ этого и предыдущаго выраженія $\frac{dR}{d\varepsilon}$ послѣднее изъ уравненій (25) легко приводится къ виду

$$\frac{dR}{d\theta}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{an}\sin i\cdot\frac{di}{dt}-\left[\frac{d\left(\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right)}{dt}+\frac{d\left\{(\sqrt{1-e^2}-1)\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right\}}{dt}\right]\sin^2\!\left(\frac{i}{2}\right)$$

или къ виду

$$-\frac{1}{2}\,\frac{dR}{d\theta}=\sqrt{\frac{a}{\nu}(1-e^2)}\,\frac{d\left[\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\right]}{dt}+\frac{d\left[\sqrt{\frac{a}{\nu}(1-e^2)}\right]}{dt}\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)$$

или наконецъ къ

$$-\frac{1}{2}\,\frac{dR}{d\theta}=\frac{d\left[\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\sqrt{\frac{a}{\nu}(1-e^2)}\right]}{dt} \qquad (159)$$

Уравненіями (157), (158) и (159) мы и будемъ пользоваться для доказательства теоремъ о прочности устройства солнечной системы.

Если разсматриваемъ только одну возмущающую планету, масса которой есть m_1, то пертурбаціонная функція имѣетъ видъ (8), ч. 4. Если же принимаемъ во вниманіе дѣйствіе n тѣлъ системы на разсматриваемую планету, то пертурбаціонная функція должна состоять изъ суммы выраженій подобныхъ выраженію (8). Такимъ образомъ для дѣйствія n планетъ въ уравненіяхъ (25) должно считать

$$R=\frac{1}{1+m_0}\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left[\frac{1}{\rho_i}-\frac{xx_i+yy_i+zz_i}{r_i^3}\right] \qquad (160)$$

гдѣ

$$\rho_i^2=(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2$$

Точно также разсматривая движеніе свѣтила m_1, мы должны считать

$$(161) \qquad R' = \frac{1}{1+m_1}\sum_{i=0}^{i=n} m_i\left[\frac{1}{\rho'_i} - \frac{xx_i + yy_i + zz_i}{r_i^3}\right]$$

гдѣ знакъ суммы распространяется на всѣ значенія i отъ 0 до n, исключая одного $n = 1$, которое соотвѣтствуетъ разсматриваемой планетѣ. При этомъ по нашему означенію x_0, y_0, z_0 суть x, y, z; тоже относится и къ r_0. Что касается до ρ_i', то

$$\rho_i' = \sqrt{(x_1 - x_i)^2 + (y_1 - y_i)^2 + (z_1 - z_i)^2}$$

Такимъ образомъ если разсматриваемъ дѣйствіе n планетъ на планету m_0, то для этого случая должны представить уравненіе (158) въ видѣ

$$(162) \qquad \frac{d\left[(\sqrt{1-e^2}-1)\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right]}{dt} = \frac{m_1}{\mu}\frac{dR_1}{d\pi} + \frac{m_2}{\mu}\frac{dR_2}{d\pi} + \cdots\cdots + \frac{m_n}{\mu}\frac{dR_n}{d\pi}$$

гдѣ $\mu = 1 + m_0$, а R_1, $R_2 \ldots\ldots R_n$ суть отдѣльные члены суммы (160), за исключеніемъ множителей $\frac{m_1}{\mu}$, $\frac{m_2}{\mu} \ldots\ldots \frac{m_n}{\mu}$; такъ что

$$R_1 = \frac{1}{\rho_1} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r'^3}; \qquad R_2 = \frac{1}{\rho_2} - \frac{xx_2 + yy_2 + zz_2}{r''^3} \quad \text{и т. д.}$$

Разсматривая дѣйствіе всѣхъ планетъ системы на планету m_1, мы можемъ представить уравненіе (158) въ видѣ

$$(163) \qquad \frac{d\left[(\sqrt{1-e'^2}-1)\sqrt{\frac{a'}{\nu'}}\right]}{dt} = \frac{m_0}{\mu_1}\frac{dR_0'}{d\pi'} + \frac{m_2}{\mu_1}\frac{dR_2'}{d\pi'} + \cdots\cdots + \frac{m_n}{\mu_1}\frac{dR_n'}{d\pi'}$$

гдѣ $\mu_1 = 1 + m_1$, а R_0', R_2', R_3' и т. д. суть отдѣльные члены суммы (161), такъ что

$$R_0' = \frac{1}{\rho_1'} - \frac{x_1x + y_1y + z_1z}{r^3}; \qquad R_2' = \frac{1}{\rho_2'} - \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r''^3} \quad \text{и т. д.}$$

Кромѣ того

$$\rho_1' = \rho_1; \qquad \rho_2' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad \text{и т. д.}$$

Для планеты m_2, находящейся подъ дѣйствіемъ всѣхъ остальныхъ планетъ системы, имѣемъ

$$(164) \qquad \frac{d\left[(\sqrt{1-e''^2}-1)\sqrt{\frac{a''}{\nu''}}\right]}{dt} = \frac{m_0}{\mu_2}\frac{dR_0''}{d\pi''} + \frac{m_1}{\mu_2}\frac{dR_1''}{d\pi''} + \frac{m_3}{\mu_2}\frac{dR_3''}{d\pi''} + \cdots$$

Умножимъ уравненіе (162) на $m_0\mu$, уравненіе (163) на $m_1\mu_1$, уравненіе (164) на $m_2\mu_2$ и т. д. и сложимъ всѣ эти уравненія, тогда найдомъ

$$\frac{m_0}{K}\frac{d\left[(\sqrt{1-e^2}-1)\sqrt{a\mu}\right]}{dt}+\frac{m_1}{K}\frac{d\left[(\sqrt{1-e'^2}-1)\sqrt{a'\mu_1}\right]}{dt}+\cdots\cdots=$$
$$m_0m_1\left[\frac{dR_1}{d\pi}+\frac{dR_0'}{d\pi'}\right]+m_0m_2\left[\frac{dR_2}{d\pi}+\frac{dR_0''}{d\pi''}\right]+\cdots\cdots\cdots \quad (165)$$

Посредствомъ подобныхъ же преобразованій по уравненію (159) составляемъ

$$2\frac{m_0}{K}\frac{d\left[\sqrt{a\mu(1-e^2)}.\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\right]}{dt}+2\frac{m_1}{K}\frac{d\left[\sqrt{a'\mu_1(1-e'^2)}.\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)\right]}{dt}+\cdots=$$
$$=-m_0m_1\left[\frac{dR_1}{d\theta}+\frac{dR_0'}{d\theta'}\right]-m_0m_2\left[\frac{dR_2}{d\theta}+\frac{dR_0''}{d\theta''}\right]+\cdots\cdots\cdots \quad (166)$$

Періодическими возмущеніями прочность устройства солнечной системы нарушена быть не можетъ, ибо по причинѣ этихъ возмущеній элементы орбиты измѣняются только въ извѣстныхъ предѣлахъ и если возрастаютъ въ данное время, то потомъ непремѣнно будутъ уменьшаться. Имѣя это въ виду, мы должны разсматривать только вѣковыя возмущенія, которыя представляются величинами пропорціональными времени и отъ которыхъ элементы могутъ измѣняться хотя весьма медленно, но тѣмъ не менѣе неограниченно. Такимъ образомъ въ предыдущихъ двухъ уравненіяхъ мы должны подъ R разумѣть ту часть пертурбаціонной функціи, которая не содержитъ времени явно, т. е. ту часть, которую мы для дѣйствія планеты m_1 на планету m_0 представили въ формѣ (124) и означили чрезъ F. Такимъ образомъ производныя $\frac{dR_1}{d\pi}$, $\frac{dR_0}{d\pi}$; $\frac{dR_1}{d\theta}$, $\frac{dR_0}{d\theta}$ и т. д., какъ показываетъ выраженіе (124), будутъ величинами по меньшей мѣрѣ втораго порядка относительно эксцентриситетовъ и наклоненій. Кромѣ того мы видимъ, что всѣ члены вторыхъ частей уравненій (165) и (166) имѣютъ множителей втораго порядка относительно возмущающихъ массъ, тогда какъ первыя части этихъ уравненій суть величины перваго порядка относительно возмущающихъ массъ, поэтому вторыя части двухъ упомянутыхъ уравненій по крайней ихъ малости могутъ быть приняты равными нулю. Послѣ такого допущенія, интегралы уравненій (165) и (166) представятся въ видѣ

$$m_0\sqrt{a\mu}\left[\sqrt{1-e^2}-1\right]+m_1\sqrt{a'\mu'}\left[\sqrt{1-e'^2}-1\right]+m_2\sqrt{a''\mu'}\left[\sqrt{1-e''^2}-1\right]+\cdots=C_1$$
$$2m_0\sqrt{a\mu(1-e^2)}.\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)+2m_1\sqrt{a'\mu'(1-e'^2)}.\sin^2\left(\frac{i'}{2}\right)+\cdots\cdots=C_2 \quad (167)$$

Если ограничимся величинами втораго порядка относительно эксцентриситетовъ, то первое изъ этихъ уравненій представится въ видѣ

$$m_0e^2\sqrt{a.\mu}+m_1e'^2\sqrt{a'\mu'}+m_2e''^2\sqrt{a''\mu''}+\cdots\cdots=C$$

Такъ какъ въ настоящее время эксцентриситеты всѣхъ планетныхъ орбитъ малы, то и величина C, представляющая сумму этихъ малыхъ членовъ, также мала; но такъ какъ C есть постоянная величина, то заключаемъ, что эта сумма навсегда останется малою; а слѣдовательно планетныя орбиты всегда будутъ имѣть форму близкую къ круговой. Кромѣ того мы видимъ, что всѣ члены имѣютъ одинакіе знаки, ибо всѣ

состоять изъ существенно положительныхъ производителей; это обстоятельство приводитъ насъ къ тому заключенію, что если эксцентриситеты и измѣняются, то перемѣны происходятъ только періодически, и въ то время какъ эксцентриситеты однѣхъ орбитъ возрастаютъ, эксцентриситеты другихъ необходимо должны уменьшаться, ибо въ противномъ случаѣ при одинакихъ знакахъ всѣхъ членовъ суммы, эта послѣдняя не могла бы сохранять постоянной величины. Такимъ образомъ мы видимъ, что солнечная система имѣетъ прочное устройство относительно эксцентриситетовъ орбитъ.

Ограничиваясь во второмъ изъ уравненій (167) величинами втораго порядка относительно наклоненій, имѣемъ

$$m_0 \sqrt{a\mu} . \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + m_1 \sqrt{a'\mu'} . \sin^2\left(\frac{i'}{2}\right) + \cdots\cdots = C'$$

Отсюда рядомъ соображеній подобныхъ предыдущимъ заключаемъ, что солнечная система имѣетъ прочное устройство относительно наклоненій орбитъ.

Итакъ мы имѣемъ точное доказательство прочности устройства солнечной системы относительно большихъ полуосей орбитъ; въ прочности же устройства системы относительно эксцентриситетовъ и наклоненій мы убѣждаемся на основаніи такихъ уравненій, которыя справедливы только до членовъ втораго порядка относительно массъ. Болѣе строгаго доказательства разсматриваемыхъ важныхъ теоремъ къ настоящее время мы не знаемъ.

IV.

Вычисленіе возмущеній по способу механической квадратуры.

14. Изложенный нами способъ вычисленія возмущеній основывается на аналитическомъ развитіи пертурбаціонной функціи въ рядъ по степенямъ эксцентриситетовъ и наклоненій. Мы уже говорили, что во многихъ случаяхъ такой рядъ не представляетъ достаточно быстрой сходимости. Кометы движутся въ орбитахъ по формѣ близкихъ къ параболамъ; эксцентриситеты путей этихъ свѣтилъ обыкновенно не много разнятся отъ единицы, а потому вычисленіе возмущеній основанное на упомянутомъ способѣ разложенія пертурбаціонной функціи не примѣнимо къ изслѣдованію кометныхъ движеній. Хотя П. А. Ганзенъ и показалъ нѣкоторые аналитическіе пріемы вычисленія кометныхъ возмущеній, но всѣ они весьма сложны и не могутъ считаться вполнѣ удовлетворяющими потребностямъ практики, по этому при рѣшеніи вопроса о вычисленіи возмущеній въ движеніи кометъ мы по необходимости должны пользоваться искуственнымъ пріемомъ, основаннымъ на вычисленіи опредѣленнаго интеграла по нѣсколькимъ даннымъ значеніямъ подъинтегральной функціи.

Примѣнимъ этотъ пріемъ интегрированія уравненій возмущеннаго движенія, извѣстный подъ именемъ способа механической квадратуры, къ вычисленію возмущенныхъ значеній прямолинейныхъ координатъ.

Легко видѣть, что въ уравненіяхъ (9), ч. 4 производныя пертурбаціонной функціи по координатамъ могутъ быть представлены въ формѣ

$$
\begin{aligned}
\frac{dR}{dx} &= \frac{m_1}{1+m_0}\left[\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right] \\
\frac{dR}{dy} &= \frac{m_1}{1+m_0}\left[\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right] \\
\frac{dR}{dz} &= \frac{m_1}{1+m_0}\left[\frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right]
\end{aligned}
\qquad (168)
$$

Предположимъ, что оскулирующіе элементы орбиты возмущеннаго свѣтила, соотвѣтствующіе опредѣленному времени t_0 извѣстны, предположимъ, что координаты свѣтила вычисленныя на основаніи этихъ элементовъ суть x_0, y_0, z_0. Во время $t = t_0 + dt$ свѣтило будетъ двигаться въ орбитѣ, элементы которой будутъ уже отличны отъ упомянутыхъ оскулирующихъ и координаты, вычисленныя на основаніи этихъ

новыхъ неизвѣстныхъ элементовъ будутъ также разниться отъ координатъ x_0, y_0, z_0. Предположимъ, что эти координаты, удовлетворяющія уравненіямъ возмущеннаго движенія, имѣютъ форму $x = x_0 + \delta x$, $y = y_0 + \delta y$, $z = z_0 + \delta z$, гдѣ δx, δy, δz суть очевидно обусловливающіяся возмущеніями измѣненія координатъ, происшедшія въ теченіи промежутка времени dt.

Внося эти значенія координатъ въ уравненія (9), ч. 4, получимъ

$$\frac{d^2(x_0 + \delta x)}{dt^2} + k^2(1 + m_0)\frac{x_0 + \delta x}{r^3} = k^2(1 + m_0)\frac{dR}{dx}$$

$$\frac{d^2(y_0 + \delta y)}{dt^2} + k^2(1 + m_0)\frac{y_0 + \delta y}{r^3} = k^2(1 + m_0)\frac{dR}{dy}$$

$$\frac{d^2(z_0 + \delta z)}{dt^2} + k^2(1 + m_0)\frac{z_0 + \delta z}{r^3} = k^2(1 + m_0)\frac{dR}{dz}$$

Координаты x_0, y_0, z_0 мы можемъ разсматривать какъ вычисленныя по системѣ элементовъ представляющихъ собою коническое сѣченіе соприкасающееся въ данное время t_0 съ дѣйствительно описываемой кривой, т. е. такое коническое сѣченіе, по которому стало бы двигаться свѣтило, если бы въ моментъ t_0 возмущающія силы перестали дѣйствовать; поэтому можемъ считать, что координаты x_0, y_0, z_0 удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ эллиптическаго движенія, т. е. уравненіямъ

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + k^2(1 + m_0)\frac{x_0}{r_0^3} = 0$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + k^2(1 + m_0)\frac{y_0}{r_0^3} = 0$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} + k^2(1 + m_0)\frac{z_0}{r_0^3} = 0$$

Вычитая эти уравненія изъ предыдущихъ, находимъ

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + k^2(1 + m_0)\left[\frac{x_0 + \delta x}{r^3} - \frac{x_0}{r_0^3}\right] = k^2(1 + m_0)\frac{dR}{dx}$$

$$\frac{d^2\delta y}{dt^2} + k^2(1 + m_0)\left[\frac{y_0 + \delta y}{r^3} - \frac{y_0}{r_0^3}\right] = k^2(1 + m_0)\frac{dR}{dy}$$

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} + k^2(1 + m_0)\left[\frac{z_0 + \delta z}{r^3} - \frac{z_0}{r_0^3}\right] = k^2(1 + m_0)\frac{dR}{dz}$$

Если $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$, то $r = r_0 + \delta r$; а слѣдовательно, ограничиваясь первою степенью величины δr, имѣемъ

$$\frac{x_0 + \delta x}{r^3} = r_0^{-3}\left[x_0 + \delta x\right]\left[1 - \frac{3\delta r}{r_0}\right]$$

если удержимъ въ этомъ выраженіи только величины перваго порядка относительно приращеній δr и δx, то легко найдемъ

$$\frac{x_0 + \delta x}{r^3} - \frac{x_0}{r_0^3} = \frac{1}{r_0^3}\left[\delta x - 3\frac{x_0}{r_0}\delta r\right]$$

поэтому уравненія, интегрированіемъ которыхъ должны быть опредѣлены измѣненія δx, δy, δz координатъ отъ возмущеній, могутъ быть представлены въ видѣ

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\delta x}{dt^2} &= k^2(1+m_0)\frac{dR}{dx} + \frac{k^2(1+m_0)}{r_0^3}\left[3\frac{x_0}{r_0}\delta r - \delta x\right] \\
\frac{d^2\delta y}{dt^2} &= k^2(1+m_0)\frac{dR}{dy} + \frac{k^2(1+m_0)}{r_0^3}\left[3\frac{y_0}{r_0}\delta r - \delta y\right] \qquad (169) \\
\frac{d^2\delta z}{dt^2} &= k^2(1+m_0)\frac{dR}{dz} + \frac{k^2(1+m_0)}{r_0^3}\left[3\frac{z_0}{r_0}\delta r - \delta z\right]
\end{aligned}$$

но такъ какъ

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x_0 + \delta x)^2 + (y_0 + \delta y)^2 + (z_0 + \delta z)^2$$

то ограничиваясь величинами перваго порядка относительно возмущеній, имѣемъ

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2(x_0\delta x + y_0\delta y + z_0\delta z)$$

или

$$r = r_0\left[1 + \frac{2}{r_0^2}(x_0\delta x + y_0\delta y + z_0\delta z)\right]^{\frac{1}{2}}$$

откуда заключаемъ, что можно принять

$$r - r_0 = \frac{x_0}{r_0}\delta x + \frac{y_0}{r_0}\delta y + \frac{z_0}{r_0}\delta z$$

но такъ какъ $r = r_0 + \delta r$, то

$$\delta r = \frac{x_0}{r_0}\delta x + \frac{y_0}{r_0}\delta y + \frac{z_0}{r_0}\delta z$$

Эта величина и должна быть внесена въ уравненія (169). Посмотримъ теперь какой составъ имѣютъ первые члены вторыхъ частей этихъ уравненій. Выраженія (168) показываютъ, что производныя пертурбаціонной функціи взятыя по координатамъ возмущеннаго свѣтила сами суть величины порядка возмущающихъ массъ, поэтому въ первомъ приближеніи рѣшенія вопроса достаточно поставить въ эти выраженія (168) вмѣсто искомыхъ x, y, z координаты x_0, y_0, z_0. Такимъ образомъ полагая

$$\begin{aligned}
m_1k^2\left[\frac{x'-x_0}{\rho_0^3} - \frac{x'}{r'^3}\right] &= X_0 \\
m_1k^2\left[\frac{y'-y_0}{\rho_0^3} - \frac{y'}{r'^3}\right] &= Y_0 \qquad (170) \\
m_1k^2\left[\frac{z'-z_0}{\rho_0^3} - \frac{z'}{r'^3}\right] &= Z_0
\end{aligned}$$

гдѣ $\rho_0^2 = (x'-x_0)^2 + (y'-y_0)^2 + (z'-z_0)^2$, можемъ представить уравненія (169) въ видѣ

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} = X_0 + \frac{k^2(1+m_0)}{r_0^3}\left[3\frac{x_0}{r_0}\delta r - \delta x\right]$$

(171)
$$\frac{d^2\delta y}{dt^2} = Y_0 + \frac{k^2(1+m_0)}{r_0^3}\left[3\frac{y_0}{r_0}\delta r - \delta y\right]$$

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = Z_0 + \frac{k^2(1+m_0)}{r_0^3}\left[3\frac{z_0}{r_0}\delta r - \delta z\right]$$

Такъ какъ послѣдніе члены заключаютъ въ себѣ неизвѣстныя величины δx, δy, δz, то вопросъ о вычисленіи измѣненій координатъ отъ возмущеній можетъ быть рѣшенъ только послѣдовательными приближеніями. Въ первомъ приближеніи величины неизвѣстныхъ δx, δy, δz должны быть опредѣлены изъ уравненій

(171*)
$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} = X_0; \qquad \frac{d^2\delta y}{dt^2} = Y_0; \qquad \frac{d^2\delta z}{dt^2} = Z_0$$

которыя мы предполагаемъ интегрировать по способу механической квадратуры. Этотъ пріемъ заключается въ вычисленіи величины опредѣленнаго интеграла по нѣсколькимъ даннымъ числовымъ величинамъ подъинтегральной функціи.

15. Если мы знаемъ систему оскулирующихъ элементовъ орбиты, то посредствомъ нея для опредѣленныхъ моментовъ времени всегда можемъ вычислить числовыя значенія, координатъ x_0, y_0, z_0, а посредствомъ таблицъ большихъ планетъ или посредствомъ такихъ астрономическихъ эфемеридъ какъ Berliner Astronomisches Jahrbuch можемъ вычислить для тѣхъ же моментовъ координаты x' y' z' возмущающаго свѣтила, слѣдовательно для избранныхъ моментовъ времени всегда можемъ вычислить числовыя значенія функцій X_0, Y_0, Z_0 по выраженіямъ (170). По этимъ величинамъ X_0, Y_0, Z_0 и требуется найти изъ уравненій (171_*) измѣненія координатъ δx, δy, δz, происшедшія въ теченіи извѣстнаго промежутка времени. Величины X_0, Y_0, Z_0 суть вообще функціи времени, такъ что

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} = f(t); \qquad \frac{d^2\delta y}{dt^2} = f_1(t); \qquad \frac{d^2\delta z}{dt^2} = f_2(t)$$

Слѣдовательно измѣненія координатъ въ теченіи опредѣленнаго промежутка времени $t_1 - t_0$ представляются въ видѣ

$$\delta x = \int dt \int f(t)\,.\,dt; \qquad \delta y = \int dt \int f_1(t)\,.\,dt \quad \text{и т. д.}$$

гдѣ интегралы берутся между предѣлами t_0 и t_1. И такъ задача приводится къ вычисленію этихъ двойныхъ интеграловъ по даннымъ частнымъ значеніямъ подъинтегральныхъ функцій $f(t)$, $f_1(t)$ и т. д. Для нашего случая

$$f(t) = m_1 k^2\left[\frac{x' - x_0}{\rho_0^3} - \frac{x'}{r'^3}\right]; \qquad f_1(t) = m_1 k^2\left[\frac{y' - y_0}{\rho_0^3} - \frac{y'}{r'^3}\right] \quad \text{и т. д.}$$

Предположимъ, что аргументы частныхъ значеній каждой изъ этихъ функцій составляютъ собою ариѳметическую прогрессію. Пусть разность ариѳметической прогрессіи, въ которой возрастаетъ перемѣнное t, есть $\Delta t = \omega$ и положимъ, что вообще

$$f(t) = f(a + n\omega)$$

гдѣ a есть слѣдовательно частное значеніе t соотвѣтствующее $n=0$. Если $t=a+n\omega$, то $dt=\omega\,.\,dn$, а потому

$$\int f(t)\,.\,dt=\omega\int f(a+n\omega)\,.\,dn$$

но по теоремѣ Тейлора

$$f(a+n\omega)=f(a)+n\omega\frac{df(a)}{da}+\frac{n^2\omega^2}{1\,.\,2}\frac{d^2f(a)}{da^2}+\cdots\cdots\cdots \tag{172}$$

Такимъ образомъ

$$\int f(a+n\omega)\,.\,dn=C+n\,.\,f(a)+\frac{n^2}{2}\omega\frac{df(a)}{da}+\frac{n^3}{2\,.\,3}\omega^2\frac{d^2f(a)}{da^2}+\cdots \tag{173}$$

Покажемъ возможность вычисленія производныхъ сюда входящихъ по даннымъ вопроса. Положимъ, что мы знаемъ значеніе функціи $f(a+n\omega)$ для нѣкоторыхъ частныхъ значеній n, именно для $n=-3,\ -2,\ -1,\ +1,\ +2,\ +3$; слѣдовательно знаемъ числовыя величины ряда функцій

$$f(a-3\omega);\quad f(a-2\omega);\quad f(a-\omega);\quad f(a);\quad f(a+\omega);\quad f(a+2\omega);\quad f(a+3\omega)$$

Вычитая каждую предыдущую функцію изъ послѣдующей, отмѣтимъ первыя разности знакомъ f^1, вторыя—знакомъ f^2, третьи—знакомъ f^3 и т. д., аргументы этихъ функцій всегда будемъ представлять въ видѣ ариеметической средины изъ аргументовъ вычитающихся функцій, такъ что по этому знакоположенію будемъ имѣть

$$f(a)-f(a-\omega)=f^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right)$$

$$f(a+\omega)-f(a)=f^1\left(a+\frac{\omega}{2}\right)$$

$$f^2\left(a+\frac{\omega}{2}\right)-f^2\left(a-\frac{\omega}{2}\right)=f^2(a)$$

и т. д.

И такъ если данъ рядъ функцій $f(a-3\omega)$, $f(a-2\omega)$, $f(a-\omega)$, $f(a)$, $f(a+\omega)$, $f(a+2\omega)$, $f(a+3\omega)$, то рядъ послѣдовательныхъ разностей этихъ функцій по нашему означенію долженъ быть представленъ въ видѣ

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l}
f(a-3\omega) & & & & & & \\
 & f^1\left(a-\frac{5}{2}\omega\right) & & & & & \\
f(a-2\omega) & & f^2(a-2\omega) & & & & \\
 & f^1\left(a-\frac{3}{2}\omega\right) & & f^3\left(a-\frac{3}{2}\omega\right) & & & \\
f(a-\omega) & & f^2(a-\omega) & & f^4(a-\omega) & & \\
 & f^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right) & & f^3\left(a-\frac{\omega}{2}\right) & & f^5\left(a-\frac{\omega}{2}\right) & \\
f(a) & & f^2(a) & & f^4(a) & & f^6(a) \\
 & f^1\left(a+\frac{\omega}{2}\right) & & f^3\left(a+\frac{\omega}{2}\right) & & f^5\left(a+\frac{\omega}{2}\right) & \\
f(a+\omega) & & f^2(a+\omega) & & f^4(a+\omega) & & \\
 & f^1\left(a+\frac{3}{2}\omega\right) & & f^3\left(a+\frac{3}{2}\omega\right) & & & \\
f(a+2\omega) & & f^2(a+2\omega) & & & & \\
 & f^1\left(a+\frac{5}{2}\omega\right) & & & & & \\
f(a+3\omega) & & & & & &
\end{array} \tag{A}$$

Положимъ кромѣ этого

$$(B)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[f^1\left(a+\frac{\omega}{2}\right)+f^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right)\right]=f^1(a)\\ &\frac{1}{2}\left[f^3\left(a+\frac{\omega}{2}\right)+f^3\left(a-\frac{\omega}{2}\right)\right]=f^3(a) \end{aligned}$$

и т. д.

Извѣстно, что для интерполированія по разностямъ расположеннымъ около горизонтальной строки, заключающей въ себѣ функціи $f(a)$, $f^2(a)$ и т. д., существуетъ выраженіе

$$f(a+n\omega)=f(a)+nf^1(a)+\frac{n^2}{1.2}f^2(a)+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f^3(a)$$
$$+\frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3.4}f^4(a)+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}f^5(a)+\cdots\cdots$$

располагая этотъ рядъ по степенямъ n, имѣемъ

$$\begin{aligned} f(a+n\omega)=f(a)&+n\left[f^1(a)-\frac{1}{6}f^3(a)+\frac{1}{30}f^5(a)-\cdots\cdots\right]\\ &+\frac{1}{2}n^2\left[f^2(a)-\frac{1}{12}f^4(a)+\frac{1}{90}f^6(a)-\cdots\cdots\right]\\ &+\frac{1}{6}n^3\left[f^3(a)-\frac{1}{4}f^5(a)+\frac{7}{120}f^7(a)-\cdots\cdots\right]\\ &+\frac{1}{24}n^4\left[f^4(a)-\frac{1}{6}f^6(a)+\cdots\cdots\right]\\ &+\frac{1}{120}n^5\left[f^5(a)-\frac{1}{3}f^7(a)+\cdots\cdots\right]\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Сравнивая это съ рядомъ (172), заключаемъ, что

$$\omega\frac{df(a)}{da}=f^1(a)-\frac{1}{6}f^3(a)+\frac{1}{30}f^5(a)-\cdots\cdots$$
$$\omega^2\frac{d^2f(a)}{da^2}=f^2(a)-\frac{1}{12}f^4(a)+\frac{1}{90}f^6(a)-\cdots\cdots$$
$$\omega^3\frac{d^3f(a)}{da^3}=f^3(a)-\frac{1}{4}f^5(a)+\frac{7}{120}f^7(a)-\cdots\cdots$$
$$\omega^4\frac{d^4f(a)}{da^4}=f^4(a)-\frac{1}{6}f^6(a)+\cdots\cdots$$

и т. д.

Поэтому выраженіе (173) можетъ быть представлено въ видѣ

$$\int f(a+n\omega)\,dn = C + n.f(a)$$

$$+\frac{1}{2}n^2\left[f^1(a)-\frac{1}{6}f^3(a)+\frac{1}{30}f^5(a)-\cdots\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{6}n^3\left[f^2(a)-\frac{1}{12}f^4(a)+\frac{1}{90}f^6(a)-\cdots\cdots\right] \qquad (174)$$

$$+\frac{1}{24}n^4\left[f^3(a)-\frac{1}{4}f^5(a)+\frac{7}{120}f^7(a)-\cdots\cdots\right]$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Здѣсь C есть постоянная введенная интегрированіемъ, она должна быть опредѣлена теперь согласно съ условіями вопроса. Наша главная задача заключается въ вычисленіи измѣненій δx, δy, δz по даннымъ частнымъ значеніямъ вторыхъ частей уравненій (171), или первоначально уравненій (171_*). Найденныя такимъ образомъ величины δx, δy, δz должны представлять собою измѣненія возмущеніями координатъ свѣтила въ теченіи извѣстнаго промежутка времени, слѣдовательно интегралы выраженій $\frac{d^2\delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta z}{dt^2}$ должны быть взяты между извѣстными предѣлами. Мы приняли $t=a+n\omega$, а потому

$$n=\frac{t-a}{\omega}$$

если будемъ брать интегралъ

$$\int f(t)\,dt$$

между предѣлами t' и t'', то очевидно для высшаго и низшаго предѣла по n будемъ имѣть

$$n''=\frac{t''-a}{\omega}; \qquad n'=\frac{t'-a}{\omega}$$

такимъ образомъ

$$\int_{t'}^{t''} f(t)\,dt = \omega\int_{n'}^{n''} f(a+n\omega).\,dn \qquad (174_*)$$

гдѣ подъ n' и n'' разумѣемъ предыдущія величины. Если выберемъ a такимъ образомъ, чтобы

$$a=\frac{t'+t''}{2}$$

то очевидно, что въ этомъ случаѣ $n''=-n'$ и если возмемъ интегралъ (174) между такими предѣлами, то очевидно, что въ выраженіи (174) исчезнутъ всѣ члены, умноженные на четныя степени n и результатъ получитъ простѣйшую форму. И такъ для упрощенія вывода, за начало, отъ котораго считаются аргументы, слѣдуетъ взять ариѳметическую средину изъ высшаго и низшаго предѣла интеграла. Постоянную C должно

опредѣлить при условіи, что интегралъ обращается въ нуль при низшемъ предѣлѣ, ибо оскулирующіе элементы могутъ быть приняты за возмущенные соотвѣтствующіе одному опредѣленному моменту, именно эпохѣ. И такъ для опредѣленія постоянной C имѣемъ уравненіе

$$(175) \qquad 0 = C + n' f(a) + \frac{n'^2}{2}\left[f^1(a) - \frac{1}{6}f^3(a) + \frac{1}{30}f^5(a) - \cdots\cdots\right] + \cdots\cdots$$

Мы видимъ возможность упростить интегралъ (174), принимая за аргументъ a средину промежутка времени заключающагося между предѣлами интеграла. Если бы при такомъ условіи мы стали считать за начальный аргументъ эпоху и за функціи этого аргумента значенія вторыхъ частей уравненій (171) или (171_*) вычисленныхъ по оскулирующимъ элементамъ для времени эпохи, но тогда пришлось бы выбирать предѣлы интеграла такъ, чтобы высшій предѣлъ слѣдовалъ за эпохой на такой же промежутокъ времени, на какой низшій предѣлъ предшествуетъ эпохѣ и тогда низшій предѣлъ несовпадалъ бы съ эпохой и условіе, которое мы поставили сейчасъ для опредѣленія постоянной не имѣло бы мѣста; кромѣ того тогда пришлось бы вычислять много частныхъ значеній разсматриваемыхъ функцій для моментовъ предшествующихъ эпохѣ. Чтобы избѣжать этихъ неудобствъ мы покажемъ сначала форму, служащую для вычисленія измѣненій координатъ, происходящихъ въ теченіи одного подраздѣленія всего періода $t'' - t'$; кромѣ того самыя эти подраздѣленія расположимъ такъ, чтобы эпоха совпадала съ половиной одного изъ нихъ; тогда если начальный аргументъ есть a, то низшій предѣлъ интеграла (выполняемаго по t) или эпоха представится въ видѣ $t' = a - \frac{\omega}{2}$, но такъ какъ низшій предѣлъ интегрированія по n есть $n' = \frac{t' - a}{\omega}$, то понятно, что при такомъ условіи $n' = -\frac{1}{2}$, а слѣдовательно $n'' = +\frac{1}{2}$. Условившись пока въ выборѣ такихъ предѣловъ интегрированія, вычислимъ рядъ функцій

$$f(a-3); \quad f(a-2); \quad f(a-1); \quad f(a); \quad f(a+1); \quad f(a+2) \quad \text{и т. д.}$$

гдѣ теперь подъ a разумѣемъ величину

$$a = t' + \frac{\omega}{2}$$

По этимъ функціямъ составимъ ряды разностей

$$f^1(a); \quad f^2(a); \quad f^3(a); \quad f^4(a)$$

собственно говоря, только $f^2(a)$, $f^4(a)$ и т. д. суть дѣйствительно разности, величины же $f^1(a)$, $f^3(a)$ и т. д извѣстнымъ образомъ зависятъ отъ разностей. По этимъ величинамъ $f^1(a)$, $f^2(a)$, и т. д. составимъ вторую часть выраженія (174), которое по смыслу вопроса должно быть подвергнуто вліянію извѣстныхъ предѣловъ. Теперь мы условились за предѣлы интегрированія по n считать $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$, а потому для этого случая выраженіе (174) даетъ

$$\int_{n=-\frac{1}{2}}^{n=+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = f(a) + \frac{1}{24}\left[f^2(a) - \frac{1}{2} f^4(a) + \frac{1}{90} f^6(a) - \cdots\cdots\right]$$
$$+ \frac{1}{1920}\left[f^4(a) - \frac{1}{6} f^6(a) + \cdots\cdots\right]$$
$$+ \frac{1}{322560}\left[f^6(a) - \cdots\cdots\right]$$
$$+ \cdots\cdots$$

или

$$\int_{n=-\frac{1}{2}}^{n=+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = f(a) + \frac{1}{24} f^2(a) - \frac{17}{5760} f^4(a) + \frac{367}{967680} f^6(a) - \cdots \quad (176)$$

суммою подобныхъ интеграловъ могутъ быть представлены тѣ интегралы, которые намъ предстоитъ взять между предѣлами t'' и t', ибо весь промежутокъ времени $t''-t'$ можетъ быть раздѣленъ на $i+1$ равныхъ промежутковъ ω, такъ что $t''-t'=\omega(i+1)$ и тогда предѣлы интегрированія по n, соотвѣтствующіе предѣламъ t'' и t', легко могутъ быть указаны. Въ самомъ дѣлѣ, если низшій предѣлъ интегрированія по n есть $-\frac{1}{2}$, то

$$\frac{t'-a}{\omega} = -\frac{1}{2}$$

а слѣдовательно высшій предѣлъ интегрированія по n будетъ

$$\frac{t''-a}{\omega} = i + \frac{1}{2}$$

ибо при этомъ $t''-t' = (i+1)\,\omega$, что мы и предполагаемъ. И такъ

$$\int_{t'}^{t''} f(t)\,dt = \omega \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,.\,dn$$

но понятно, что

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega).dn = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a+n\omega).dn + \int_{+\frac{1}{2}}^{+\frac{3}{2}} f(a+n\omega).dn + \cdots + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega).dn \quad (177)$$

такимъ образомъ рѣшеніе нашего вопроса приводится къ вычисленіе отдѣльныхъ членовъ этой конечной суммы. Мы нашли выраженіе для перваго члена ряда; посмотримъ какъ могутъ быть опредѣлены остальные.

Замѣтимъ, что

$$\int f(a+n\omega)\,dn = \int f[a+i\omega+(n-i)\,\omega]\,d\,(n-i)$$

если подъ i разумѣемъ какое либо постоянное число. Примѣняя сюда выраженіе (174) и полагая $n-i=k$, находимъ

$$\int f(a+i\omega+k\omega)\,dk = C+k.f(a+i\omega)+\frac{k^2}{2}\left[f^1(a+i\omega)-\frac{1}{6}f^3(a+i\omega)+\cdots\cdots\right]$$
$$+\frac{k^3}{6}\left[f^2(a+i\omega)-\frac{1}{12}f^4(a+i\omega)+\cdots\cdots\right]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

чтобы опять по возможности упростить форму интеграла, возмемъ его въ предѣлахъ по k отъ $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$, тогда

$$\int_{k=-\frac{1}{2}}^{k=\frac{1}{2}} f(a+i\omega+k\omega)\,dk = f(a+i\omega)+\frac{1}{24}f^2(a+i\omega)-\frac{17}{5760}f^4(a+i\omega)+\cdots\cdots$$

Если снова введемъ сюда перемѣнное n и замѣтимъ, что существуетъ тождество

$$\int_{n-i=-\frac{1}{2}}^{n-i=+\frac{1}{2}} f[a+i\omega+(n-i)\,\omega]\,dn = \int_{n=i-\frac{1}{2}}^{n=i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn$$

то будемъ имѣть

$$\int_{n=i-\frac{1}{2}}^{n=i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = f(a+i\omega)+\frac{1}{24}f^2(a+i\omega)-\frac{17}{5760}f^4(a+i\omega)+\cdots\cdots\cdots$$

Изъ этого общаго выраженія легко получаются интегралы составляющіе сумму (177), а слѣдовательно и нашъ искомый интегралъ. Въ самомъ дѣлѣ, полагая здѣсь послѣдовательно $i=1$, $i=2$ и т. д. и складывая полученные результаты съ выраженіемъ (176), получимъ по выраженію (177)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = [f(a)+f(a+\omega)+f(a+2\omega)+\cdots+f(a+i\omega)]$$
$$+\frac{1}{24}[f^2(a)+f^2(a+\omega)+f^2(a+2\omega)+\cdots+f^2(a+i\omega)]$$
$$-\frac{17}{5760}[f^4(a)+f^4(a+\omega)+f^4(a+2\omega)+\cdots+f^4(a+i\omega)]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Что можно представить въ видѣ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = \sum_{n=0}^{n=i} f(a+n\omega) + \frac{1}{24}\sum_{n=0}^{n=i} f^2(a+n\omega) - \frac{17}{5760}\sum_{n=0}^{n=i} f^4(a+n\omega) + \cdots$$

но разсматривая таблицу (A) разностей, легко убѣдимся, что

$$\sum_{n=0}^{n=i} f^2(a+n\omega) = f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] - f^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{n=i} f^4(a+n\omega) = f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] - f^3\left(a-\frac{\omega}{2}\right)$$

и т. д.

Если представимъ себѣ что передъ рядомъ функцій $f(a)$, $f(a+\omega)$, $f(a+2\omega)$.... находится еще рядъ функцій, для которыхъ эти начальныя служатъ разностями, то по нашему означенію будемъ имѣть

${}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)$	
	$f(a)$
${}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right)$	
	$f(a+\omega)$
${}^1f\left(a+\frac{3}{2}\omega\right)$	
	$f(a+2\omega)$
. . . .	
	. . . .
. . . .	
	$f(a+i\omega)$
${}^1f\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]$	

Слѣдовательно

$$\sum_{n=0}^{n=i} f(a+n\omega) = {}^1f\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] - {}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)$$

поэтому предыдущій интегралъ можно написать въ видѣ

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = {} & {}^1f\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] - {}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right) \\ & + \frac{1}{24}\left\{f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] - f^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right)\right\} \qquad (178) \\ & + \frac{17}{5760}\left\{f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] - f^3\left(a-\frac{\omega}{2}\right)\right\} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

такъ какъ первая изъ дополнительнаго ряда функцій, именно функція ${}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)$ совершенно произвольна, то будемъ ею располагать такъ, чтобы сумма функцій имѣющихъ аргументомъ $a-\frac{\omega}{2}$ сложенная съ этой произвольной функціей обращалась въ нуль, т. е. чтобы

$$(179)\qquad {}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)=-\frac{1}{24}f^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+\frac{17}{5760}f^3\left(a-\frac{\omega}{2}\right)-\frac{367}{967680}f^5\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+\cdots\cdots$$

тогда искомый интегралъ приведется къ виду

$$(180)\qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn=$$

$${}^1f\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+\frac{1}{24}f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]-\frac{17}{5760}f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+\cdots\cdots$$

не трудно также найти форму подобнаго интеграла, взятаго между предѣлами $-\frac{1}{2}$ и i. Для этого взявъ интегралъ (174) по n между предѣлами 0 и $\frac{1}{2}$, имѣемъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{8}f^1(a)+\frac{1}{48}f^2(a)-\frac{7}{384}f^3(a)-\cdots\cdots\cdots$$

По нашему означенію

$$f^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right)=f^1\left(a+\frac{\omega}{2}\right)-f^2(a)$$

$$f^3\left(a-\frac{\omega}{2}\right)=f^3\left(a+\frac{\omega}{2}\right)-f^4(a)$$

. . . .

Слѣдовательно по выраженіямъ (B) легко составить

$$(181)\qquad \begin{aligned} f^1(a)&=f^1\left(a+\frac{\omega}{2}\right)-\frac{1}{2}f^2(a)\\ f^3(a)&=f^3\left(a+\frac{\omega}{2}\right)-\frac{1}{2}f^4(a)\end{aligned}$$

. . . .

Внося это въ предыдущій интегралъ, получимъ

$$\int^{\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{8}f^1\left(a+\frac{1}{2}\omega\right)-\frac{1}{24}f^2(a)-\frac{7}{384}f^3\left(a+\frac{\omega}{2}\right)+\cdots$$

Подобнымъ же образомъ можетъ быть найденъ интегралъ

$$\int_{i}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn$$

Если i есть постоянная величина, то

$$\int f(a+n\omega)\,dn = \int f\left[a+i\omega+(n-i)\,\omega\right] d\,(n-i)$$

полагая здѣсь $n-i=k$ и примѣняя къ выполненію послѣдняго интеграла выраженіо (174), имѣемъ

$$\begin{aligned}\int f\left[a+i.\omega+k.\omega\right] dk = C &+ k\,f(a+i\omega)\\ &+\frac{k^2}{2}\left[f^1(a+i\omega)-\frac{1}{6}f^3(a+i\omega)+\cdots\cdots\right]\\ &+\frac{k^3}{6}\left[f^2(a+i\omega)-\frac{1}{12}f^4(a+i\omega)+\cdots\cdots\right]\\ &+\frac{k^4}{24}\left[f^3(a+i\omega)-\frac{1}{4}f^5(a+i\omega)+\cdots\cdots\right]\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Взявъ этотъ интегралъ по k въ предѣлахъ 0 и $\frac{1}{2}$, имѣемъ

$$\int_{k=0}^{k=\frac{1}{2}} f(a+i\omega+k\omega)\,dk = \frac{1}{2}f(a+i\omega)+\frac{1}{8}f^1(a+i\omega)+\frac{1}{48}f^2(a+i\omega)-\cdots$$

Такъ какъ $k=n-i$, то вводя снова перемѣнное n, имѣемъ

$$\int_{n=i}^{n=i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = \frac{1}{2}f(a+i\omega)+\frac{1}{8}f^1(a+i\omega)+\frac{1}{48}f^2(a+i\omega)-\cdots\cdots$$

Если подобно предыдущему замѣнимъ здѣсь символы $f^1(a+i\omega)$, $f^3(a+i\omega)$ и т. д. ихъ величинами, то найдемъ

$$\begin{aligned}\int_{i}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = \frac{1}{2}f(a+i\omega)+\frac{1}{8}f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]-\\ -\frac{1}{24}f^2(a+i\omega)-\frac{7}{384}f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+\cdots\cdots\end{aligned}$$

но искомый интегралъ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+n\omega)\,dn = \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn - \int_{i}^{i+\frac{1}{3}} f(a+n\omega)\,dn$$

интегралы, разность которыхъ здѣсь берется, намъ теперь извѣстны, а потому составляемъ

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+n\omega)\,dn = {}^{1}f\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] - \tfrac{1}{2}f(a+i\omega)$$
$$+\frac{1}{24}f^{1}\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] - \frac{1}{8}f^{1}\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]$$
$$-\frac{17}{5760}f^{3}\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] + \frac{1}{24}f^{2}(a+i\omega) + \cdots$$

Но по нашему означенію

$$f(a+i\omega) = {}^{1}f\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] - {}^{1}f\left[a+\left(i-\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]$$
$$f^{2}(a+i\omega) = f^{1}\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] - f^{1}\left[a+\left(i-\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Внося это въ предыдущее выраженіе, приводимъ его къ виду

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+n\omega)\,dn = \frac{1}{2}\left\{{}^{1}f\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] + {}^{1}f\left[a+\left(i-\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]\right\}$$
$$(182)\qquad -\frac{1}{24}\left\{f^{1}\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] + f^{1}\left[a+\left(i-\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]\right\}$$
$$+\frac{11}{1440}\left\{f^{3}\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] + f^{3}\left[a+\left(i-\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]\right\}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

И такъ предполагая, что періодъ $t'' - t'$ времени, для котораго хотимъ опредѣлить измѣненія координатъ отъ возмущеній, заключаетъ въ себѣ $i + \frac{1}{2}$ равныхъ промежутковъ ω, будемъ считать за предѣлы по t интеграла (174_*) величины $t' = a - \frac{\omega}{2}$ и $t'' = a + i\omega$, тогда предѣлами интеграла по n будутъ очевидно величины $-\frac{1}{2}$ и i. Но такъ какъ по выраженію (174_*)

$$\int\limits_{a-\frac{1}{2}}^{a+i\omega} f(t)\,.\,dt = \omega\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+n\omega)\,.\,dn$$

то мы получимъ искомую величину интеграла, если предыдущее выраженіе (182) умножимъ на ω.

Въ разсматриваемомъ случаѣ вычисленіе измѣненій координатъ зависитъ отъ выполненія двукратнаго интегрированія, а потому если мы имѣемъ выраженіе для функціи

$$\int_{t'}^{t''} f(t) \,.\, dt$$

то предстоитъ еще найти выраженіе для интеграла

$$\int\int f(t) \,.\, dt^2$$

взятаго между предѣлами t' и t''. Такъ какъ $t = a + n\omega$, то $dt = \omega \,.\, dn$, слѣдовательно

$$\int_{t'}^{t''}\int f(t)\, dt^2 = \omega^2 \int_{n'}^{n''}\int f(a + n\omega)\, dn^2$$

Чтобы выполнить указанныя здѣсь интегрированія, обратимся къ выраженію (174) и опредѣлимъ постоянную C подъ тѣмъ условіемъ, что интегралъ обращается въ нуль при низшемъ предѣлѣ перемѣннаго, т. е. что существуетъ выраженіе

$$C = -n'f(a) - \frac{1}{2} n'^2 \left[f^1(a) - \frac{1}{6} f^3(a) + \cdots\cdots \right]$$
$$- \frac{1}{6} n'^3 \left[f^2(a) - \frac{1}{12} f^4(a) + \cdots\cdots \right]$$
$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Вторую часть этого уравненія можно разсматривать какъ опредѣленный интегралъ вида

$$\int_{n'}^{0} f(a + n\omega)\, dn$$

и такъ

$$C = \int_{n'}^{0} f(a + n\omega)\, dn$$

Слѣдовательно выраженіе (174) можно представить въ формѣ

$$\int f(a + n\omega)\, dn = \int_{n'}^{0} f(a + n\omega)\, dn + n\, f(a)$$
$$+ \frac{n^2}{2} \left[f^1(a) - \frac{1}{6} f^3(a) + \cdots\cdots \right]$$
$$+ \frac{n^3}{6} \left[f^2(a) - \frac{1}{12} f^4(a) + \cdots\cdots \right]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

умноживъ это на dn и взявъ еще разъ интегралъ, получимъ

$$\int\int f(a+n\omega)\,dn^2 = C' + \int dn \int_{n'}^{0} f(a+n\omega)\,dn + \frac{n^2}{2} f(a)$$

$$+ \frac{n^3}{6}\left[f^1(a) - \frac{1}{6} f^2(a) + \cdots\cdots\right]$$

(183)
$$+ \frac{n^4}{24}\left[f^2(a) - \frac{1}{12} f^4(a) + \cdots\cdots\right]$$

$$+ \frac{n^5}{120}\left[f^3(a) - \frac{1}{4} f^5(a) + \cdots\cdots\right] + \cdots\cdots\cdots$$

Пусть предѣлами этого интеграла по n будутъ сначала $n' = -\frac{1}{2}$ и $n'' = +\frac{1}{2}$, тогда

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\int f(a+n\omega)\,dn^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+n\omega)\,dn + \frac{1}{24}\left[f^1(a) - \frac{1}{6} f^3(a) + \cdots\cdots\right]$$

$$+ \frac{1}{1920}\left[f^3(a) - \frac{1}{4} f^5(a) + \cdots\cdots\right] + \cdots$$

Чтобы имѣть выраженіе для перваго члена второй части этого уравненія, мы положимъ $i = 0$ въ выраженіи (182) и тогда найдемъ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+n\omega)\,dn = {}^1f(a) - \frac{1}{12} f^1(a) + \frac{11}{720} f^3(a) - \cdots\cdots\cdots$$

Внося это въ предыдущее выраженіе, легко получимъ

(184) $$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\int f(a+n\omega)\,dn^2 = {}^1f(a) - \frac{1}{24} f^1(a) + \frac{51}{5760} f^3(a) - \cdots\cdots$$

Подобнымъ же образомъ, если замѣнимъ сначала функцію $f(a+n\omega)$ чрезъ $f[a + i\omega + (n-i)\,\omega]$ и $(dn)^2$ чрезъ $[d\,(n-i)]^2$, положимъ $n - i = k$, возьмемъ интегралъ по k въ предѣлахъ $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$ и снова перейдемъ потомъ къ n, то получимъ

(185) $$\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}\int f(a+n\omega)\,dn^2 = {}^1f(a+i\omega) - \frac{1}{24} f^1(a+i\omega) + \frac{17}{1920} f^3(a+i\omega) - \cdots$$

Имѣя это, легко уже найти $\int_{-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}\int f(a+n\omega)\,dn^2$. Въ самомъ дѣлѣ

(186)
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}\int f(a+n\omega)\,dn^2 =$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\int f(a+n\omega)\,dn^2 + \int_{+\frac{1}{2}}^{+\frac{3}{2}}\int f(a+n\omega)\,dn^2 + \cdots\cdots + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}\int f(a+n\omega)\,dn^2$$

но всѣ интегралы этого конечнаго ряда получаются изъ послѣдняго по выраженію (185). Въ самомъ дѣлѣ, если сдѣлаемъ въ этомъ выраженіи $i = 1, 2, 3$ и т. д., то найдемъ

$$\int_{+\frac{1}{2}}^{+\frac{3}{2}}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 = {}^1f(a+\omega) - \frac{1}{24}f^1(a+\omega) + \frac{17}{1920}f^3(a+\omega) - \cdots\cdots$$

$$\int_{+\frac{3}{2}}^{+\frac{5}{2}}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 = {}^1f(a+2\omega) - \frac{1}{24}f^1(a+2\omega) + \frac{17}{1920}f^3(a+2\omega) - \cdots\cdots$$

. . . .

Если сложимъ всѣ эти выраженія съ выраженіемъ (184), то получимъ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+i+\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 = \sum_{n=0}^{n=i}{}^1f(a+n\omega) - \frac{1}{24}\sum_{n=0}^{n=i}f^1(a+n\omega) + \frac{17}{1920}\sum_{n=0}^{n=i}f^3(a+n\omega) - \cdots \quad (187)$$

гдѣ по нашему означенію

$$\begin{aligned} {}^1f(a) &= \frac{1}{2}\left[{}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right) + {}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)\right] \\ {}^1f(a+\omega) &= \frac{1}{2}\left[{}^1f\left(a+\frac{3\omega}{2}\right) + {}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right)\right] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}^1f(a+i\omega) &= \frac{1}{2}\left[{}^1f\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right) + {}^1f\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\omega\right)\right] \end{aligned} \quad (188)$$

Но функціи ${}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)$, ${}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right)$, ${}^1f\left(a+\frac{3\omega}{2}\right)$ и т. д. мы можемъ разсматривать какъ разности другихъ функцій, первая изъ которыхъ совершенно произвольна. Можемъ предположить, что существуетъ слѣдующій рядъ функцій и ихъ разностей

${}^2f(a-\omega)$	
	${}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)$
${}^2f(a)$	
	${}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right)$
${}^2f(a+\omega)$	
	. . . .
. . . .	
	. . . .
. . . .	
	. . . .
${}^2f[a+i.\omega]$	
	${}^1f\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]$
${}^2f[a+(i+1)\omega]$	

Слѣдовательно

$$^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)={}^2f(a)-{}^2f(a-\omega)$$

$$^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right)={}^2f(a+\omega)-{}^2f(a)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Внося это въ выраженія (188), находимъ

$$\begin{aligned}
^1f(a)&=\tfrac{1}{2}\left[{}^2f(a+\omega)-{}^2f(a-\omega)\right]\\
^1f(a+\omega)&=\tfrac{1}{2}\left[{}^2f(a+2\omega)-{}^2f(a)\right]\\
^1f(a+2\omega)&=\tfrac{1}{2}\left[{}^2f(a+3\omega)-{}^2f(a+\omega)\right]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
^1f(a+i\omega)&=\tfrac{1}{2}\left[{}^2f[a+(i+1)\omega]-f^2[a+(i-1)\omega]\right]
\end{aligned}$$

Если сложимъ эти выраженія, то получимъ

$$\sum_{n=0}^{n=i}{}^1f(a+n\omega)=\tfrac{1}{2}{}^2f[a+(i+1)\omega]+\tfrac{1}{2}{}^2f(a+i\omega)-\tfrac{1}{2}{}^2f(a)-\tfrac{1}{2}{}^2f(a-\omega)$$

Подобнымъ же образомъ легко убѣдимся, что

$$\sum_{n=0}^{n=i}f^1(a+n\omega)=\tfrac{1}{2}f\,[a+(i+1)\omega]+\tfrac{1}{2}f\,(a+i\omega)-\tfrac{1}{2}f\,(a)-\tfrac{1}{2}f\,(a-\omega)$$

$$\sum_{n=0}^{n=i}f^3(a+n\omega)=\tfrac{1}{2}f^2[a+(i+1)\omega]+\tfrac{1}{2}f^2(a+i\omega)-\tfrac{1}{2}f^2(a)-\tfrac{1}{2}f^2(a-\omega)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Внося это въ выраженіе (187), имѣемъ

$$\int\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}f(a+n\omega)\,dn^2=$$

$$\frac{1}{2}\left\{{}^2f[a+(i+1)\omega]+{}^2f(a+i\omega)-{}^2f(a)-{}^2f(a-\omega)\right\}$$

(189) $$-\frac{1}{48}\left\{f[a+(i+1)\omega]+f(a+i\omega)-f(a)-f(a-\omega)\right\}$$

$$+\frac{17}{3840}\left\{f^2[a+(i+1)\omega]+f^2(a+i\omega)-f^2(a)-f^2(a-\omega)\right\}$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Мы знаемъ, что

$$^2f(a) - {}^2f(a-\omega) = {}^1f\left(a - \frac{\omega}{2}\right)$$

$$f(a) - f(a-\omega) = f^1\left(a - \frac{\omega}{2}\right)$$

$$f^2(a) - f^2(a-\omega) = f^3\left(a - \frac{\omega}{2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Придавая къ обѣимъ частямъ перваго уравненія по $2\,^2f(a-\omega)$, втораго—по $2f(a)$, третьяго—по $2f^2(a)$ и т. д., получимъ

$$^2f(a) + {}^2f(a-\omega) = 2\,^2f(a-\omega) + {}^1f\left(a - \frac{\omega}{2}\right)$$

$$f(a) + f(a-\omega) = 2f(a) - f^1\left(a - \frac{\omega}{2}\right)$$

$$f^2(a) + f^2(a-\omega) = 2f^2(a) - f^3\left(a - \frac{\omega}{2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Слѣдовательно выраженіе (189) представляется въ видѣ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}\int f(a+n\omega)\,dn^2 = \frac{1}{2}\left\{{}^2f[a+(i+1)\omega] + {}^2f(a+i\omega) - 2\,^2f(a-\omega) - {}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)\right\}$$
$$- \frac{1}{48}\left\{f[a+(i+1)\omega] + f(a+i\omega) - 2f(a) + f^1\left(a - \frac{\omega}{2}\right)\right\}$$
$$+ \frac{17}{3840}\left\{f^2[a+(i+1)\omega] + f^2(a+i\omega) - 2f^2(a) + f^3\left(a - \frac{\omega}{2}\right)\right\}$$
$$- \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Такъ какъ функціи ${}^1f\left(a - \frac{\omega}{2}\right)$ и ${}^2f(a-\omega)$ совершенно произвольны, то выберемъ ихъ такъ, чтобы

$$\begin{aligned} {}^1f\left(a - \frac{\omega}{2}\right) &= -\frac{1}{24}f^1\left(a - \frac{\omega}{2}\right) + \frac{17}{5760}f^3\left(a - \frac{\omega}{2}\right) - \cdots\cdots \\ {}^2f(a-\omega) &= \frac{1}{24}f(a) - \frac{17}{5760}\left[2f^2(a) + f^2(a-\omega)\right] + \cdots \end{aligned} \tag{189$_a$}$$

тогда предыдущій интегралъ приметъ видъ

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}\int f(a+n\omega)\,dn^2 = &\frac{1}{2}\left\{{}^2f[a+(i+1)\omega] + {}^2f(a+i\omega)\right\} \\ &- \frac{1}{48}\left\{f[a+(i+1)\omega] + f(a+i\omega)\right\} \\ &+ \frac{17}{3840}\left\{f^2[a+(i+1)\omega] + f^2(a+i\omega)\right\} \\ &- \cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{190}$$

Подобно этому легко найти двойной интегралъ, взятый между предѣлами $-\frac{1}{2}$ и i. Взявъ интегралъ (183) въ предѣлахъ 0 и $\frac{1}{2}$, имѣемъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 = \frac{1}{2}\int_{n'}^{0} f(a+n\omega)\,dn + \frac{1}{8}f(a)$$
$$+\frac{1}{48}\left[f^2(a) - \frac{1}{12}f^4(a) + \cdots\cdots\right]$$
$$+\frac{1}{384}\left[f^3(a) - \frac{1}{4}f^5(a) + \cdots\cdots\right]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Такъ какъ мы предполагаемъ интегрировать въ предѣлахъ $-\frac{1}{2}$ и i, то подъ n' въ этомъ выраженіи должно разумѣть $-\frac{1}{2}$. Слѣдовательно для нашего случая

$$\int_{n'}^{0} f(a+n\omega)\,dn = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+n\omega)\,dn$$

Мы уже имѣли выраженіе для этого интеграла, а потому внося его величину въ предыдущую форму двойнаго интеграла, получимъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 = \frac{1}{2}\,{}^1f(a) + \frac{1}{8}f(a) - \frac{1}{48}f^1(a) + \frac{1}{384}f^3(a) + \cdots\cdots$$

Исключая отсюда символы $f^1(a)$, $f^3(a)$ и т. д. посредствомъ выраженій (181), имѣемъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 = \frac{1}{2}\,{}^1f(a) + \frac{1}{8}f(a) - \frac{1}{48}f^1\left(a+\frac{\omega}{2}\right) + \frac{5}{384}f^2(a)$$
$$+\frac{17}{3840}f^3\left(a+\frac{\omega}{2}\right) - \frac{37}{15360}f^4(a) + \cdots\cdots$$

но

$${}^1f(a) = \frac{1}{2}\left[{}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right) + {}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right)\right]$$

и кромѣ того по нашему означенію

$${}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right) = {}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right) - f(a)$$

Слѣдовательно

$${}^1f(a) = {}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right) - \frac{1}{2}f(a)$$

Внося это въ предыдущій интегралъ, имѣемъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 = \frac{1}{2}\,{}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right) - \frac{1}{8}f(a) - \frac{1}{48}f^1\left(a+\frac{\omega}{2}\right)$$
$$+\frac{5}{384}f^2(a) + \frac{17}{3840}f^3\left(a+\frac{\omega}{2}\right) - \frac{37}{15360}f^4(a) + \cdots\cdots$$

Мы уже видѣли, что измѣненіе обоихъ предѣловъ на величину i влечетъ за собою измѣненіе аргументовъ на величину $i\omega$, а потому заключаемъ, что

$$\begin{aligned}\int_i^{i+\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 = \frac{1}{2}\,{}^1f\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] - \frac{1}{8}\,f(a+i\omega)\\ -\frac{1}{48}\,f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+\frac{5}{384}\,f^2(a+i\omega)\\ +\frac{17}{3840}\,f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]-\frac{37}{15360}\,f^4(a+i\omega)\\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{191}$$

Понятно, что

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 - \int_{i}^{i+\frac{1}{2}}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2$$

Внося сюда вмѣсто интеграловъ второй части ихъ выраженія (190) и (191) и помня, что по нашему означенію

$$\begin{aligned}{}^1f\left[a+(i+\tfrac{1}{2})\,\omega\right] &= {}^2f\left[a+(i+1)\,\omega\right] - {}^2f(a+i\omega)\\ f^1\left[a+(i+\tfrac{1}{2})\,\omega\right] &= f\left[a+(i+1)\,\omega\right] - f(a+i\omega)\\ f^3\left[a+(i+\tfrac{1}{2})\,\omega\right] &= f^2\left[a+(i+1)\,\omega\right] - f^2(a+i\omega)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

легко выводимъ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 = {}^2f(a+i\omega)+\frac{1}{12}\,f(a+i\omega)-\frac{1}{240}\,f^2(a+i\omega)+\cdots \tag{192}$$

посредствомъ этого составляемъ искомый интегралъ по формѣ:

$$\int_{t'}^{t''}\!\!\int f(t)\,dt = \omega^2\int_{-\frac{1}{2}}^{i}\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 \tag{193}$$

16. И такъ зная числовыя величины производныхъ $\frac{d^2\delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta z}{dt^2}$ для какихъ либо равноотстоящихъ одинъ отъ другаго моментовъ времени, мы можемъ вычислить какъ производныя $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$ по выраженію (182), такъ и δx, δy, δz по выраженію (192). Эти величины δx, δy, δz представляютъ собою тѣ измѣненія координатъ, которыя будутъ произведены возмущеніями въ теченіи извѣстнаго промежутка времени.

Въ первомъ приближеніи мы интегрируемъ по способу механической квадратуры уравненія (171_*). Если приближенныя величины δx, δy, δz такимъ образомъ будутъ найдены, то онѣ могутъ служить основаніемъ втораго приближенія, въ которомъ бо-

гдѣ точныя значенія δx, δy, δz должны быть найдены посредствомъ интегрированія по способу механической квадратуры уравненій (169), и при этомъ производныя $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dR}{dz}$ должны быть вычислены по выраженіямъ (168); что касается до координатъ x, y, z, входящихъ въ эти выраженія, то онѣ во второмъ приближеніи представляются суммами $x_0 + \delta x$, $y_0 + \delta y$, $z_0 + \delta z$, а δr вычисляется по выраженію

$$\delta r = \frac{x_0}{r_0}\delta x + \frac{y_0}{r_0}\delta y + \frac{z_0}{r_0}\delta z$$

Въ теченіи большаго промежутка времени, координаты отъ возмущеній могутъ измѣниться такъ, что величины δx, δy, δz могутъ сдѣлаться весьма значительными. Поэтому для большаго промежутка времени оскулирующіе элементы не могутъ считаться постоянными; слѣдовательно нельзя вычислять для большаго промежутка времени вторыя части уравненій (171_*) или (169) при помощи одной и той же системы оскулирующихъ элементовъ. Тогда необходимо весь разсматриваемый промежутокъ времени, напр. время одного обращенія, раздѣлить на такія части, для которыхъ въ отдѣльности не могли бы накопиться большія измѣненія координатъ отъ возмущеній. Съ первоначальною системой оскулирующихъ элементовъ слѣдуетъ тогда вычислить возмущенія координатъ въ періодъ перваго подраздѣленія, а затѣмъ по найденнымъ уже возмущеннымъ значеніямъ координатъ слѣдуетъ составить для начала втораго подраздѣленія новую систему оскулирующихъ элементовъ, и такъ далѣе. Имѣя это въ виду, найдемъ выраженія, посредствомъ которыхъ по координатамъ и ихъ первымъ производнымъ могутъ быть вычисляемы элементы орбиты.

Мы знаемъ, что $C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = k\sqrt{p}$, а потому уравненія (14), ч. 4 могутъ быть представлены въ видѣ

$$(193)\qquad \begin{aligned} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= k\sqrt{p}\,.\cos i \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= -k\sqrt{p}\,.\sin i\,.\cos \theta \\ y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= k\sqrt{p}\,.\sin i\,.\sin \theta \end{aligned}$$

кромѣ того мы знаемъ, что

$$(194)\qquad \begin{aligned} x &= x_0 + \delta x & \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\delta x}{dt} \\ y &= y_0 + \delta y & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\delta y}{dt} \\ z &= z_0 + \delta z & \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_0}{dt} + \frac{d\delta z}{dt} \end{aligned}$$

Координаты x_0, y_0, z_0 вычисляются по первоначальной системѣ оскулирующихъ элементовъ, а δx, δy, δz и ихъ производныя получаются чрезъ интегрированіе извѣстныхъ уравненій по способу механической квадратуры, слѣдовательно если будемъ имѣть еще выраженія для вычисленія производныхъ $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$, то уравненіями (193) можемъ пользоваться для вычисленія элементовъ i, θ и функціи p.

Найдемъ выраженія для производныхъ $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$. Дифференцируя последнее изъ выраженій (135), ч. 4 относительно времени входящаго явно, находимъ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin u \,.\, \sin i + r \,.\, \cos u \,.\, \sin i \frac{du}{dt}$$

но принимая элементы за постоянныя величины, имѣемъ

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ke}{\sqrt{p}} \cdot \sin v; \qquad \frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2}$$

Замѣтимъ кромѣ того, что

$$u = v + \omega; \qquad r = \frac{p}{1 + e \,.\, \cos v}$$

а потому предыдущее легко приводится къ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{k}{\sqrt{p}} \sin i \,[e \,.\, \cos \omega + \cos u]$$

Подобнымъ же образомъ находимъ выраженія производныхъ $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$; такъ что

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\frac{k}{\sqrt{p}} \Big[(\sin u + e.\sin \omega) \cos \theta + (\cos u + e.\cos \omega) \sin \theta \cos i\Big] \\
\frac{dy}{dt} &= -\frac{k}{\sqrt{p}} \Big[(\sin u + e.\sin \omega) \sin \theta - (\cos u + e.\cos \omega) \cos \theta \cos i\Big] \qquad (195) \\
\frac{dz}{dt} &= \quad \frac{k}{\sqrt{p}} \Big[\cos u + e.\cos \omega\Big] \sin i
\end{aligned}$$

Если для вычисленія этихъ производныхъ будемъ пользоваться системой оскулирующихъ элементовъ, то получимъ числовыя значенія производныхъ $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$.

Возвышая уравненіе (195) въ квадратъ и складывая, найдемъ

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{p}\left[1 + 2e \,.\, \cos (u - \omega) + e^2\right]$$

Придавая и вычитая къ суммѣ заключенной въ скобки по единицѣ, имѣемъ

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{p}\left[2\,\{1 + e \,.\, \cos (u - \omega)\} - (1 - e^2)\right]$$

Но такъ какъ

$$p = a\,(1 - e^2); \qquad r = \frac{p}{1 + e \,.\, \cos (u - \omega)}$$

то

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = k^2\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]$$

откуда прямо имѣемъ

$$\frac{k^2}{a} = \frac{2k^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \tag{196}$$

Это уравненіе и служитъ для опредѣленія элемента a новой системы. По найденной величинѣ a извѣстнымъ образомъ опредѣлится среднее суточное движеніе μ. По вычисленнымъ значеніямъ p и a легко опредѣлится e изъ выраженія $p = a(1 - e^2)$. Наконецъ ω опредѣлится изъ уравненія

$$\frac{p}{r} - 1 = e \,.\, \cos(u - \omega) \tag{197}$$

По этому выраженію опредѣлится непосредственно разность $u - \omega$, но для вычисленія u мы будемъ пользоваться двумя первыми изъ уравненій (135), ч. 4, по которымъ составляемъ

$$\begin{aligned} r \,.\, \sin u &= -x \,.\, \sin\theta \,.\, \sec i + y \,.\, \cos\theta \,.\, \sec i \\ r \,.\, \cos u &= x \,.\, \cos\theta + y \,.\, \sin\theta \end{aligned} \tag{198}$$

Этихъ двухъ уравненій совершенно достаточно для опредѣленія u.

Имѣя e и разность $u - \omega$, вычислимъ изъ уравненія

$$\operatorname{tang}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{u-\omega}{2}$$

эксцентрическую аномалію E и за тѣмъ изъ уравненія $M = E - e \,.\, \sin E$ найдемъ среднюю аномалію новой оскулирующей эпохи. Такимъ образомъ будотъ вычислена новая система оскулирующихъ элементовъ.

17. Пояснимъ на частномъ примѣрѣ изложенную теорію вычисленія возмущеній по способу механической квадратуры. Вычислимъ тѣ измѣненія координатъ кометы Энке, которыя производитъ своимъ возмущающимъ дѣйствіемъ Юпитеръ въ теченіи промежутка времени отъ 1-го Марта 1875 года до 11-го Декабря того же года. Мы видѣли, что послѣднее прохожденіе кометы черезъ перигелій имѣло мѣсто около 13-го Апрѣля 1875 года и около этого времени геліоцентрическія координаты кометы измѣнялись весьма быстро. Имѣя это въ виду, для моментовъ близкихъ къ прохожденію черезъ перигелій мы вычислимъ значенія вторыхъ производныхъ координатъ для моментовъ отдѣльныхъ десятидневными промежутками, а затѣмъ эти же функціи будемъ вычислять для каждыхъ двадцати дней. По нашему условію средина одного изъ десятидневныхъ промежутковъ должна совпадать съ оскулирующей эпохой. За оскулирующіе элементы мы примемъ систему, найденную въ концѣ n° 48, ч. 4. Слѣдовательно оскулирующая эпоха въ нашемъ случаѣ есть 1875 г. Марта 1,0 ср. Грив. вр; такимъ образомъ за начало и конецъ одного изъ десятидневныхъ промежутковъ должны быть приняты Февраля 24.0 и Марта 6.0; послѣдній изъ этихъ моментовъ мы будемъ считать за начальный аргументъ и числовыя значенія производныхъ $\frac{d^2\delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta z}{dt^2}$ соотвѣтствующія этому моменту мы означимъ чрезъ $f(a)$. Чтобы имѣть достаточное число первыхъ и вторыхъ разностей, мы вычислимъ значенія упомянутыхъ производныхъ для нѣсколькихъ моментовъ предшествующихъ оскулирующей эпохѣ; такимъ образомъ числовыя значенія производныхъ будемъ вычислять для слѣдующихъ моментовъ: Февр. 4.0, Февр. 14.0, Февр. 24.0, Марта 6.0, Марта 16.0, Марта 26.0,

Апр. 5.0, Апр. 15.0, Апр. 25.0, Мая 5.0, Мая 15.0, Мая 25.0, Іюня 4.0, Іюня 14.0, Іюля 4.0, Іюля 24.0 Авг. 13.0, Сент. 2.0, Сент. 22.0, Октябр. 12.0, Ноябр. 1.0, Ноябр. 21.0, Дек. 11.0; кромѣ того чтобы при вычисленіи значеній $\delta\frac{dx}{dt}$, $\delta\frac{dy}{dt}$, $\delta\frac{dz}{dt}$ для 11 Декабря не имѣть надобности въ экстраполированіи нѣкоторыхъ функцій, мы вычислимъ значенія вторыхъ производныхъ для 31-го Декабря. Вычисленіе для всего разсматриваемаго промежутка времени будетъ основано на одной и той же выше упомянутой системѣ оскулирующихъ элементовъ.

Полагая въ выраженіяхъ (135), ч. 4

$$\cos\theta = a\,.\sin A; \qquad \sin\theta = b\,.\sin B; \quad A_0 = A + \omega; \quad C_0 = \omega$$
$$\cos i \sin\theta = a\,.\cos A; \quad \cos i \cos\theta = b\,.\cos B; \quad B_0 = B + \omega; \quad c = \sin i$$

Мы приведемъ ихъ къ виду

$$x = ar\,.\sin(A_0 + v)$$
$$y = br\,.\sin(B_0 + v)$$
$$z = cr\,.\sin(C_0 + v)$$

Слѣдовательно въ нашемъ случаѣ линейныя геліоцентрическія координаты кометы должны быть вычисляемы по выраженіямъ

$$x_0 = [9.997934]\,r\,.\sin(298^\circ\ 29'\ 23''.8 + v)$$
$$y_0 = [9.990670]\,r\,.\sin(157\ \ 42\ \ 31\ .0 + v)$$
$$z_0 = [9.356020]\,r\,.\sin(183\ \ 41\ \ 10\ .6 + v)$$

Вычисляя извѣстнымъ образомъ для разсматриваемыхъ моментовъ сначала r и v, а потомъ по приведеннымъ сейчасъ выраженіямъ и самыя координаты x_0, y_0, z_0, находимъ

		E			v			log r	log x_0	log y_0	log z_0
Февр.	4.0	295°	42'	1"	228°	54'	26"	0.14398	9.48075	9.78593	9.40000
	14.0	300	43	40	233	20	55	0.09636	9.24646	9.79959	9.37614
	24.0	306	24	3	239	0	17	0.03903	8.67755	9.80626	9.34373
Марта	6.0	312	58	20	246	36	5	9.96798	8.91403_n	9.80284	9.29777
	16.0	320	53	6	257	38	13	9.87652	9.31814_n	9.78238	9.22754
	26.0	331	0	10	275	43	32	9.75409	9.50199_n	9.72635	9.10422
Апр.	5.0	345	1	15	310	35	52	9.59838	9.56672_n	9.56650	8.80925
	15.0	3	58	45	13	51	36	9.52832	9.39492_n	8.68520	8.36360
	25.0	21	3	15	66	29	4	9.66270	8.59870	9.49665_n	8.99217_n
Мая	5.0	33	24	14	92	47	2	9.80769	9.52090	9.77268_n	9.16094_n
	15.0	42	29	33	107	21	35	9.91625	9.77002	9.90531_n	9.24229_n
	25.0	49	47	47	116	45	6	9.99850	9.91108	9.98786_n	9.29012_n
Іюня	4.0	55	57	59	123	26	47	0.06341	0.00702	0.04580_n	9.32101_n
	14.0	61	21	20	128	33	4	0.11645	0.07854	0.08939_n	9.34191_n
Іюля	4.0	70	33	20	136	0	8	0.19912	0.18094	0.15149_n	9.36601_n
	24.0	78	20	55	141	20	31	0.26169	0.25275	0.19396_n	9.37600_n
Авг.	13.0	85	12	5	145	28	5	0.31138	0.30689	0.22477_n	9.37729_n
Сент.	2.0	91	22	45	148	49	12	0.35216	0.34961	0.24785_n	9.37249_n
	22.0	97	2	49	151	38	27	0.38640	0.38433	0.26541_n	9.36301_n
Окт.	12.0	102	18	57	154	4	42	0.41565	0.41314	0.27885_n	9.34964_n
Ноябр.	1.0	107	15	53	156	13	43	0.44096	0.43742	0.28902_n	9.33280_n
	21.0	111	57	4	158	0	24	0.46308	0.45808	0.29657_n	9.31273_n
Дек.	11.0	116	25	8	159	54	31	0.48254	0.47579	0.30192_n	9.28947_n
	31.0	120	42	7	161	31	9	0.49976	0.49103	0.30538_n	9.26292_n

Здѣсь подъ E мы разумѣемъ эксцентрическую аномалію кометы. Перейдемъ теперь къ вычисленію для тѣхъ же моментовъ геліоцентрическихъ координатъ Юпитера; приведемъ для этого данныя въ Nautical Almanac геліоцентрическія долготы къ среднему равноденствію начала 1875 года. Означая геліоцентрическую долготу Юпитера чрезъ l, широту чрезъ b, радіусъ векторъ Юпитера чрезъ r' и помня, что

$$x' = r' . \cos b . \cos l$$

$$y' = r' . \cos b . \sin l$$

$$z' = r' . \sin b$$

для нашего случая имѣемъ

		l			b			$\log r$	$\log x'$	$\log y'$	$\log z'$
Февр.	4	201°	21′	34″	+1°	16′	50″	0.73666	0.70565_n	0.29791_n	9.08595
	14	202	6	55	1	16	37	0.73662	0.70332_n	0.31224_n	9.08463
	24	202	52	15	1	16	23	0.73658	0.70091_n	0.32603_n	9.08327
Марта	6	203	37	35	1	16	8	0.73653	0.69840_n	0.33932_n	9.08180
	16	204	22	57	1	15	52	0.73648	0.69580_n	0.35214_n	9.08017
	26	205	8	20	1	15	35	0.73642	0.69310_n	0.36452_n	9.07854
Апр.	5	205	53	44	1	15	17	0.73636	0.69031_n	0.37647_n	9.07675
	15	206	39	7	1	14	59	0.73629	0.68740_n	0.38802_n	9.07495
	25	207	24	32	1	14	40	0.73623	0.68442_n	0.39921_n	9.07305
Мая	5	208	9	58	1	14	20	0.73615	0.68131_n	0.41002_n	9.07103
	15	208	55	25	1	13	59	0.73609	0.67813_n	0.42051_n	9.06892
	25	209	40	54	1	13	37	0.73600	0.67482_n	0.43067_n	9.06667
Іюня	4	210	26	21	1	13	15	0.73592	0.67141_n	0.44051_n	9.06442
	14	211	11	52	1	12	52	0.73583	0.66789_n	0.45005_n	9.06205
Іюля	4	212	42	53	1	12	3	0.73564	0.66053_n	0.46830_n	9.05697
	24	214	14	1	1	11	12	0.73544	0.65272_n	0.48552_n	9.05162
Авг.	13	215	45	15	1	10	17	0.73523	0.64444_n	0.50178_n	9.04578
Сент.	2	217	16	33	1	9	19	0.73501	0.63569_n	0.51714_n	9.03954
	22	218	47	56	1	8	19	0.73476	0.62640_n	0.53165_n	9.03298
Окт.	12	220	19	27	1	7	15	0.73450	0.61660_n	0.54540_n	9.02589
Ноябр.	1	221	51	5	1	6	8	0.73423	0.60623_n	0.55840_n	9.01835
	21	223	22	49	1	4	59	0.73394	0.59528_n	0.57071_n	9.01044
Дек.	11	224	54	40	1	3	46	0.73361	0.58373_n	0.58238_n	9.00190
	31	226	26	39	+1	2	31	0.73333	0.57152_n	0.59342_n	8.99303

Посредствомъ найденныхъ значеній координатъ $x, y, z; x', y', z'$ предстоитъ вычислить взаимное разстояніе ϱ возмущеннаго и возмущающаго свѣтила по выраженію

$$\varrho^2 = (x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (z_0 - z')^2$$

Затѣмъ по выраженіямъ (170) останется вычислить функціи X_0, Y_0, Z_0, т. е. первыя приближенныя величины производныхъ $\frac{d^2\delta x}{dt^2}, \frac{d^2\delta y}{dt^2}, \frac{d^2\delta z}{dt^2}$; для выполненія интегрированія, какъ показываетъ выраженіе (193) эти функціи должны быть умножены на ω^2. Въ нашемъ случаѣ для первыхъ четырнадцати аргументовъ множитель $\omega = 10$ и для остальныхъ $\omega = 20$, ибо первые аргументы отдѣлены десятидневными промежутками, а послѣдніе двадцатидневными. Мы примемъ массу Юпитера равною

$$m_1 = \frac{1}{1047{,}879}$$

а потому представляя число $m_1 k^2 . \omega^2$ въ единицахъ седьмаго десятичнаго знака, находимъ, что для первыхъ четырнадцати аргументовъ $\log m_1 k^2 . \omega^2 = 2.45085$, а для послѣднихъ $\log m_1 k^2 . \omega^2 = 3.05291$. И такъ

		$\log \rho^2$	$\omega^2 X_0$	$\omega^2 Y_0$	$\omega^2 Z_0$
Февр.	4	1.55270	+ 1.720	+ 0.021	− 0.383
	14	1.53817	+ 1.522	− 0.159	− 0.373
	24	1.52276	+ 1.308	− 0.358	− 0.357
Март.	6	1.50621	+ 1.069	− 0.575	− 0.331
	16	1.48817	+ 0.787	− 0.801	− 0.290
	26	1.46846	+ 0.431	− 1.005	− 0.222
Апр.	5	1.44869	− 0.041	− 1.058	− 0.104
	15	1.44056	− 0.510	− 0.593	+ 0.069
	25	1.44492	− 0.767	+ 0.166	+ 0.209
Мая	5	1.48181	− 0.290	+ 1.147	+ 0.238
	15	1.50653	+ 0.018	+ 1.764	+ 0.248
	25	1.52901	+ 0.308	+ 2.240	+ 0.244
Іюня	4	1.54909	+ 0.561	+ 2.620	+ 0.233
	14	1.56700	+ 0.777	+ 2.933	+ 0.220
Іюля	4	1.59731	+ 4.445	+ 13.711	+ 0.772
	24	1.62175	+ 5.356	+ 15.245	+ 0.670
Авг.	13	1.64149	+ 5.939	+ 16.501	+ 0.580
Сент.	2	1.65750	+ 6.269	+ 17.572	+ 0.501
	22	1.67038	+ 6.392	+ 18.506	+ 0.432
Окт.	12	1.68063	+ 6.350	+ 19.339	+ 0.372
Ноябр.	1	1.68858	+ 6.165	+ 20.086	+ 0.319
	21	1.69458	+ 5.862	+ 20.762	+ 0.272
Дек.	11	1.69881	+ 5.454	+ 21.374	+ 0.229
	31	1.70146	+ 4.952	+ 21.926	+ 0.191

На основаніи этихъ значеній функцій $\omega^2 X_0$, $\omega^2 Y_0$, $\omega^2 Z_0$ опредѣлимъ первыя приближенныя величины измѣненій δx, δy, δz для разсматриваемыхъ моментовъ; для этого будемъ руководствоваться выше приведенными теоретическими соображеніями. Что будемъ говорить о вычисленіи измѣненій δx, то будетъ относиться и къ вычисленію величинъ δy, δz, имѣя это въ виду, прослѣдимъ съ подробностями только вычисленіе величинъ δx. Разсмотримъ сначала аргументы отдѣленные десятидневными промежутками. По нашимъ означеніямъ имѣемъ:

1	$f(a-3\omega)=+1.720$		
		$f^1(a-\frac{5}{2}\omega)=-0.198$	
2	$f(a-2\omega)=+1.522$		$f^2(a-2\omega)=-0.016$
		$f^1(a-\frac{3}{2}\omega)=-0.214$	
3	$f(a-\omega)=+1.308$		$f^2(a-\omega)=-0.025$
		$f^1(a-\frac{\omega}{2})=-0.239$	
4	$f(a)=+1.069$		$f^2(a)=-0.043$
		$f^1(a+\frac{\omega}{2})=-0.282$	
5	$f(a+\omega)=+0.787$		$f^2(a+\omega)=-0.074$
		$f^1(a+\frac{3}{2}\omega)=-0.356$	
6	$f(a+2\omega)=+0.431$		$f^2(a+2\omega)=-0.116$
		$f^1(a+\frac{5}{2}\omega)=-0.472$	
7	$f(a+3\omega)=-0.041$		$f^2(a+3\omega)=+0.003$
		$f^1(a+\frac{7}{2}\omega)=-0.469$	
8	$f(a+4\omega)=-0.510$		$f^2(a+4\omega)=+0.212$
		$f^1(a+\frac{9}{2}\omega)=-0.257$	
9	$f(a+5\omega)=-0.767$		$f^2(a+5\omega)=+0.734$
		$f^1(a+\frac{11}{2}\omega)=+0.477$	
10	$f(a+6\omega)=-0.290$		$f^2(a+6\omega)=-0.169$
		$f^1(a+\frac{13}{2}\omega)=+0.308$	
11	$f(a+7\omega)=+0.018$		$f^2(a+7\omega)=-0.018$
		$f^1(a+\frac{15}{2}\omega)=+0.290$	
12	$f(a+8\omega)=+0.308$		$f^2(a+8\omega)=-0.037$
		$f^1(a+\frac{17}{2}\omega)=+0.253$	
13	$f(a+9\omega)=+0.561$		$f^2(a+9\omega)=-0.037$
		$f^1(a+\frac{19}{2}\omega)=+0.216$	
14	$f(a+10\omega)=+0.777$		

Мы ограничиваемся здѣсь вторыми разностями, ибо и онѣ будутъ имѣть уже малое вліяніе на результатъ. Такъ какъ δx должно быть опредѣлено по формѣ (192), то для каждаго разсматриваемаго момента предстоитъ вычислить ${}^2f(a+i\omega)$, рядъ этихъ функцій находится въ извѣстной зависимости отъ ряда функцій ${}^1f(a+i\omega)$. Мы составимъ оба эти ряда, если только опредѣлимъ ${}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)$ и ${}^2f(a-\omega)$. Для этой послѣдней цѣли обратимся къ выраженіямъ (189_*). Въ нашемъ случаѣ достаточно принять

$$ {}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)=-\frac{1}{24}f^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right);\qquad {}^2f(a-\omega)=\frac{1}{24}f(a) $$

ибо всѣ дальнѣйшіе члены рядовъ (189_*) въ разсматриваемомъ случаѣ по своей малости могутъ быть отвергнуты. Мы имѣемъ

$$ f^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right)=-0.239;\qquad f(a)=+1.069 $$

Слѣдовательно

$$ {}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)=+0.010;\qquad {}^2f(a-\omega)=+0.044 $$

Такъ какъ вообще

$$ {}^1f[a+(i+\tfrac{1}{2})\,\omega]=f(a+i\omega)+{}^1f[a+(i-\tfrac{1}{2})\,\omega] $$

то въ нашемъ случаѣ

$$ {}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right)=f(a)+{}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)=+1.079 $$

$$ {}^1f\left(a+\frac{3\omega}{2}\right)=f(a+\omega)+{}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right)=+1.866 $$

$$ {}^1f\left(a+\frac{5\omega}{2}\right)=f(a+2\omega)+{}^1f\left(a+\frac{3}{2}\omega\right)=+2.297 $$

. . . .

Для ряда функцій ${}^2f(a+i\omega)$ имѣемъ подобно этому общее выраженіе

$$ {}^2f[a+(i+1)\,\omega]={}^1f[a+(i+\tfrac{1}{2}\,\omega)]+{}^2f(a+i\omega) $$

а потому въ нашемъ случаѣ

$$ {}^2f(a)={}^1f\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+{}^2f(a-\omega)=+0.054 $$

$$ {}^2f(a+\omega)={}^1f\left(a+\frac{\omega}{2}\right)+{}^2f(a)=+1.133 $$

$$ {}^2f(a+2\omega)={}^1f\left(a+\frac{3}{2}\omega\right)+{}^2f(a+\omega)=+2.999 $$

. . . .

Какъ скоро рядъ функцій $^2f(a+i\omega)$ составленъ, то для вычисленія δx по выраженію (193) и (192) стоитъ только къ $^2f(a+i\omega)$ придать двѣнадцатую часть функціи $f(a+i\omega)$ и вычесть двѣсти сороковую часть соотвѣтствующей второй разности, но по большей части эта послѣдняя поправка такъ мала, что можетъ быть опущена безъ ущерба точности. И такъ если напр. для четвертаго аргумента $^2f(a)=+0.054$, $f(a)=+1.069$ и $f^2(a)=-0.043$, то очевидно, что для разсматриваемаго момента $\delta x=+0.143$ и т. д. Такимъ образомъ составляются слѣдующіе ряды

			δx
		$^1f(a+\frac{7}{2}\omega)=-4.540$	
1	$^2f(a-3\omega)=+4.162$	$^1f(a+\frac{5}{2}\omega)=-2.820$	$+4.31$
2	$^2f(a-2\omega)=+1.342$	$^1f(a-\frac{3}{2}\omega)=-1.298$	$+1.47$
3	$^2f(a-\omega)=+0.044$	$^1f(a-\frac{\omega}{2})=+0.010$	$+0.15$
4	$^2f(a)=+0.054$	$^1f(a+\frac{\omega}{2})=+1.079$	$+0.14$
5	$^2f(a+\omega)=+1.133$	$^1f(a+\frac{3\omega}{2})=+1.866$	$+1.20$
6	$^2f(a+2\omega)=+2.999$	$^1f(a+\frac{5\omega}{2})=+2.297$	$+3.04$
7	$^2f(a+3\omega)=+5.296$	$^1f(a+\frac{7\omega}{2})=+2.256$	$+5.29$
8	$^2f(a+4\omega)=+7.552$	$^1f(a+\frac{9\omega}{2})=+1.746$	$+7.51$
9	$^2f(a+5\omega)=+9.298$	$^1f(a+\frac{11\omega}{2})=+0.979$	$+9.23$
10	$^2f(a+6\omega)=+10.277$	$^1f(a+\frac{13\omega}{2})=+0.689$	$+10.25$
11	$^2f(a+7\omega)=+10.966$	$^1f(a+\frac{15\omega}{2})=+0.707$	$+10.97$
12	$^2f(a+8\omega)=+11.673$	$^1f(a+\frac{17\omega}{2})=+1.015$	$+11.70$
13	$^2f(a+9\omega)=+12.688$	$^1f(a+\frac{19}{2}\omega)=+1.576$	$+12.74$
14	$^2f(a+10\omega)=+14.264$	$^1f(a+\frac{21}{2}\omega)=+2.353$	$+14.33$

Посмотримъ какимъ образомъ могутъ быть вычислены значенія δx для остальныхъ аргументовъ, отдѣленныхъ между собою двадцатидневными промежутками. Одна изъ функцій $^2f(a+i\omega)$ для этого ряда не можетъ быть найдена тѣмъ же путемъ какъ прежде, ибо постоянныя величины введенныя интегрированіемъ должны сохранять свое прежнее значеніе и для этого ряда. Возмемъ изъ прежнихъ аргументовъ нѣсколько послѣднихъ отдѣленныхъ между собою двадцатидневными промежутками. Возмемъ аргументы 10-й, 12-й и 14-й, тогда они будутъ составлять непрерывный рядъ съ остальными аргументами начиная съ 15-го. Но въ аргументѣ 10-мъ, 12-мъ и 14-мъ множитель $\omega=10$, а въ остальныхъ $\omega=20$, слѣдовательно чтобы привести къ одинаковому множителю мы должны умножить имѣющіеся аргументы 10-й, 12-й и 14-й на 4 ибо ω^2 для перваго ряда въ четверо менѣе чѣмъ ω^2 во второмъ ряду; и такъ 10-й, 12-й, и 14-й, аргументъ будутъ теперь -1.160; $+1.232$; $+3.109$, слѣдовательно мы имѣемъ

10	$f(a+11\omega) = -1.160$	$f^1(a+\frac{23}{2}\omega) = +2.392$	
12	$f(a+12\omega) = +1.232$	$f^1(a+\frac{25}{2}\omega) = +1.877$	$f^2(a+12\omega) = -0.515$
14	$f(a+13\omega) = +3.109$	$f^1(a+\frac{27}{2}\omega) = +1.336$	$f^2(a+13\omega) = -0.541$
15	$f(a+14\omega) = +4.445$	$f^1(a+\frac{29}{2}\omega) = +0.911$	$f^2(a+14\omega) = -0.425$
16	$f(a+15\omega) = +5.356$	$f^1(a+\frac{31}{2}\omega) = +0.583$	$f^2(a+15\omega) = -0.328$
17	$f(a+16\omega) = +5.939$	$f^1(a+\frac{33}{2}\omega) = +0.330$	$f^2(a+16\omega) = -0.253$
18	$f(a+17\omega) = +6.269$	$f^1(a+\frac{35}{2}\omega) = +0.123$	$f^2(a+17\omega) = -0.207$
19	$f(a+18\omega) = +6.392$	$f^1(a+\frac{37}{2}\omega) = -0.042$	$f^2(a+18\omega) = -0.165$
20	$f(a+19\omega) = +6.350$	$f^1(a+\frac{39}{2}\omega) = -0.187$	$f^2(a+19\omega) = -0.143$
21	$f(a+20\omega) = +6.165$	$f^1(a+\frac{41}{2}\omega) = -0.303$	$f^2(a+20\omega) = -0.118$
22	$f(a+21\omega) = +5.862$	$f^1(a+\frac{43}{2}\omega) = -0.408$	$f^2(a+21\omega) = -0.105$
23	$f(a+22\omega) = +5.454$	$f^1(a+\frac{45}{2}\omega) = -0.502$	$f^2(a+22\omega) = -0.094$
24	$f(a+23\omega) = +4.952$		

Кромѣ этого мы знаемъ уже величины δx, соотвѣтствующія 10-му, 12-му и 14-му аргументу, а потому, принимая во вниманіе соотношеніе (192)

$$\delta x = {}^2f(a+i\omega) + \frac{1}{12} f(a+i\omega) - \frac{1}{240} f^2(a+i\omega) + \dots\dots$$

можемъ изъ него для упомянутыхъ аргументовъ вычислить ${}^2f(a+i\omega)$. Въ самомъ дѣлѣ для 12-го аргумента

$$\delta x = +11.698; \qquad f(a+12\omega) = +1.232; \qquad f^2(a+12\omega) = -0.515$$

а потому

$${}^2f(a+12\omega) = +11.593$$

подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$${}^2f(a+13\omega) = +14.068$$

Слѣдовательно

$${}^1f\left(a+\frac{25}{2}\omega\right) = +2.475$$

а зная одну изъ функцій ${}^1f[a+(i+\frac{1}{2})\omega]$, можемъ составить цѣлый рядъ ихъ. Именно придавая ${}^1f[a+(i+\frac{1}{2})\omega]$ къ $f[a+(i+1)\omega]$, получимъ ${}^1f[a+(i+\frac{3}{2})\omega]$. Посредствомъ ряда функцій ${}^1f[a+(i+\frac{1}{2})\omega]$, зная одну изъ функцій ${}^2f(a+i\omega)$, составимъ извѣстнымъ образомъ цѣлый рядъ этихъ послѣднихъ; наконецъ имѣя всѣ эти ряды, по выраженію (192) опредѣлимъ значенія δx, соотвѣтствующія моментамъ отдѣленнымъ двадцатидневными промежутками. Такимъ образомъ мы нашли

			δx
10	${}^2f(a+11\omega)=+\ 10{,}355$		$+\ 10{,}25$
		${}^1f(a+\frac{23}{2}\omega)=+\ 1.238$	
12	${}^2f(a+12\omega)=+\ 11.593$		$+\ 11.70$
		${}^1f(a+\frac{25}{2}\omega)=+\ 2.475$	
14	${}^2f(a+13\omega)=+\ 14.068$		$+\ 14.33$
		${}^1f(a+\frac{27}{2}\omega)=+\ 5{,}584$	
15	${}^2f(a+14\omega)=+\ 19{,}652$		$+\ 20.02$
		${}^1f(a+\frac{29}{2}\omega)=+\ 10.029$	
16	${}^2f(a+15\omega)=+\ 29.681$		$+\ 30.13$
		${}^1f(a+\frac{31}{2}\omega)=+\ 15{,}385$	
17	${}^2f(a+16\omega)=+\ 45{,}066$		$+\ 45{,}56$
		${}^1f(a+\frac{33}{2}\omega)=+\ 21.324$	
18	${}^2f(a+17\omega)=+\ 66{,}390$		$+\ 66.91$
		${}^1f(a+\frac{35}{2}\omega)=+\ 27.593$	
19	${}^2f(a+18\omega)=+\ 93.983$		$+\ 94.59$
		${}^1f(a+\frac{37}{2}\omega)=+\ 33.985$	
20	${}^2f(a+19\omega)=+\ 127{,}968$		$+\ 128{,}50$
		${}^1f(a+\frac{39}{2}\omega)=+\ 40.335$	
21	${}^2f(a+20\omega)=+\ 168{,}303$		$+\ 168{,}82$
		${}^1f(a+\frac{41}{2}\omega)=+\ 46.500$	
22	${}^2f(a+21\omega)=+\ 214{,}803$		$+\ 215{,}29$
		${}^1f(a+\frac{43}{2}\omega)=+\ 52{,}362$	
23	${}^2f(a+22\omega)=+\ 267.165$		$+\ 267{,}62$
		${}^1f(a+\frac{45}{2}\omega)=+\ 57.816$	
24	${}^2f(a+23\omega)=+\ 324{,}981$		$+\ 325.39$

Остается опредѣлить для разсматриваемыхъ моментовъ $\delta.\frac{dx}{dt}$. Для этого мы должны пользоваться выраженіемъ (182). Такъ какъ всѣ входящія въ него функціи теперь извѣстны, то вычисленіе не представляетъ трудности. Такъ напримѣръ если хотимъ опредѣлить $\delta\frac{dx}{dt}$ для втораго аргумента, т. е. для 14 Февраля, то, какъ показываетъ выраженіе (182), мы должны изъ ариѳметической средины функцій ${}^1f(a-\frac{5}{2}\omega)$ и ${}^1f(a-\frac{3}{2}\omega)$ вычесть одну двѣнадцатую ариѳметической средины функцій $f^1(a-\frac{5}{2}\omega)$ и $f^1(a-\frac{3}{2}\omega)$. Но такъ какъ подъ $f(a+i\omega)$ мы разумѣли $\omega^2 X_0$, то такимъ образомъ найдемъ не $\delta\frac{dx}{dt}$, но $\omega.\delta\frac{dx}{dt}$. Для втораго аргумента

$$\frac{1}{2}\left[{}^1f(a-\tfrac{5}{2}\omega)+{}^1f(a-\tfrac{3}{2}\omega)\right]=-2{,}059$$

$$\frac{1}{24}\left[f^1(a-\tfrac{5}{2}\omega)+f^1(a-\tfrac{3}{2}\omega)\right]=-0.017$$

Слѣдовательно

$$\omega.\delta\frac{dx}{dt}=-2{,}047$$

И такъ пользуясь выраженіемъ (182), въ нашемъ случаѣ имѣемъ

		$10.\delta\frac{dx}{dt}$			$20{,}\delta\frac{dx}{dt}$
Февр.	14	-2.04	Іюня	14	$+\ 3{,}90$
	24	-0.64	Іюля	4	$+\ 7.71$
Март.	6	$+0.57$		25	$+13.65$
	16	$+1.50$	Авг.	13	$+18.32$
	26	$+2.12$	Сент.	2	$+24.44$
Апр.	5	$+2.32$		22	$+30.79$
	15	$+2.03$	Окт.	12	$+37.17$
	25	$+1.35$	Ноябр.	1	$+43.44$
Мая	5	$+0.80$		21	$+49{,}46$
	15	$+0.67$	Дек.	11	$+55{,}12$
	25	$+0{,}84$			
Іюня	4	$+1{,}28$			

Совершенно подобно этому по найденнымъ выше значеніямъ функцій $\omega^2 Y_0$ и $\omega^2 Z_0$ получаемъ

		δy	$10.\delta\frac{dy}{dt}$	δz	$10.\delta\frac{dz}{dt}$
Февр.	4	− 0.92	—	− 1.13	—
	14	− 0.40	+ 0.46	− 0.40	+ 0.54
	24	− 0.05	+ 0.21	− 0,04	+ 0.18
Мар.	6	− 0.06	− 0.26	− 0.04	− 0,17
	16	− 0.65	− 0.95	− 0.37	− 0.48
	26	− 2.03	− 1.86	− 0.99	− 0.74
Апр.	5	− 4.41	− 2.92	− 1.82	− 0.81
	15	− 7.80	− 3.76	− 2.76	− 0.93
	25	− 11.76	− 4.01	− 3,62	− 0.78
Мая	5	− 15.53	− 3.35	− 4.29	− 0.55
	15	− 18.19	− 1.87	− 4.72	− 0,31
	25	− 19.10	+ 0.14	− 4.91	− 0.06
Іюня	4	− 17.77	+ 2.58	− 4.85	+ 0.18
		δy	$20.\delta\frac{dy}{dt}$	δz	$20.\delta\frac{dz}{dt}$
Іюня	14	− 13.83	+ 10.71	− 4.56	+ 0.81
Іюля	4	+ 3.10	+ 23.48	− 3.33	+ 1,63
	24	+ 33.71	+ 37.99	− 1 32	+ 2,35
Авг.	13	+ 79.54	+ 53.88	+ 1.35	+ 2,98
Сент.	2	+ 141.86	+ 70.93	+ 4.60	+ 3.52
	22	+ 221.74	+ 88,98	+ 8.36	+ 3.98
Окт.	12	+ 320.12	+ 107.91	+ 12,55	+ 4.38
Ноябр.	1	+ 437.83	+ 127.63	+ 17.11	+ 4.73
	21	+ 575.61	+ 148.06	+ 21.99	+ 5,02
Дек.	11	+ 734.16	+ 169.13	+ 27.14	+ 5.27
	31	+ 014.07	—	+ 32.52	—

Найденныя величины δx, δy, δz вычислены на основаніи грубо-приближенныхъ выраженій (170), а потому слѣдовало бы, не приступая къ вычисленію измѣненій $\delta\frac{dx}{dt}$, $\delta\frac{dy}{dt}$, $\delta\frac{dz}{dt}$, по приближенно извѣстнымъ величинамъ δx, δy, δz вычислить вторыя производныя $\frac{d^2\delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta z}{dt^2}$ по выраженіямъ (171) и снова приложить способъ механической квадратуры къ опредѣленію по этимъ новымъ значеніямъ упомянутыхъ производныхъ болѣе точныхъ величинъ δx, δy, δz, и вмѣстѣ съ этимъ во второмъ только приближеніи вычислить измѣненія $\delta\frac{dx}{dt}$, $\delta\frac{dy}{dt}$, $\delta\frac{dz}{dt}$, но изложенное выше мы считаемъ совершенно достаточнымъ для поясненія интегрированія уравненій возмущеннаго движенія по способу механической квадратуры, а потому новыхъ приближеній въ рѣшеніи вопроса дѣлать не будемъ. Итакъ возмущенныя значенія координатъ и ихъ производныхъ, соотвѣтствующія 11 Дек. 0^h ср. Гр. вр., должны быть вычислены по выраженіямъ

$$x = x_0 + 267.62 \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + 2.76$$

$$y = y_0 + 734.16 \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + 8.46$$

$$z = z_0 + 27.14 \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + 0.26$$

гдѣ x_0, y_0, z_0, $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ вычисляются посредствомъ первоначальной системы оскулирующихъ элементовъ, а ихъ поправки, зависящія отъ возмущеній, представлены въ единицахъ седьмаго десятичнаго знака.

По найденнымъ такимъ образомъ величинамъ x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ можетъ быть вычислена новая система элементовъ для оскулирующей эпохи 1875 г. Дек. 11.0 срд. Гр. вр.

18. Изложенный способъ вычисленія возмущеній прямолинейныхъ координатъ предложенъ профессоромъ Энке. Другой, едвали не болѣе употребительный въ настоящее время пріемъ вычисленія возмущеній, основанный также на способѣ механической квадратуры, данъ П. А. Гансеномъ. Этотъ пріемъ относится къ вычисленію возмущеній средней долготы или средней аномаліи, радіуса вектора и широты свѣтила надъ нѣкоторой постоянной плоскостію.

Возмущенія, происходящія въ движеніи свѣтила, мы можемъ раздѣлить на двѣ группы; можемъ принимать, что одною частію возмущающей силы измѣняется положеніе свѣтила въ орбитѣ, а другою измѣняется *положеніе* самой орбиты. Мы можемъ опредѣлить возмущенное положеніе свѣтила въ непрерывно измѣняющей свое положеніе орбитѣ радіусомъ векторомъ и угломъ этого радіуса вектора съ нѣкоторой постоянной прямой, проведенной въ подвижной орбитѣ; кромѣ того чтобы знать вполнѣ положеніе возмущеннаго свѣтила, необходимо умѣть опредѣлять для всякаго времени положеніе возмущенной орбиты, или, что все равно, положеніе мгновенной орбиты относительно нѣкоторой постоянной плоскости, за которую можемъ считать мгновенную орбиту, соотвѣтствующую опредѣленному моменту t_0.

Мы сказали, что положеніе свѣтила въ мгновенной орбитѣ опредѣляется между прочимъ угломъ, который составляетъ радіусъ векторъ съ нѣкоторой постоянной прямой, проведенной въ плоскости орбиты. За такую прямую нельзя считать линію абсидъ, ибо она измѣняетъ свое положеніе отъ возмущеній, также и отъ той же причины подвижна линія узловъ. Допустимъ, что положеніе разсматриваемой постоянной линіи опредѣляется перемѣннымъ угломъ σ, считаемымъ по направленію движенія отъ упомянутой постоянной прямой до восходящаго узла мгновенной орбиты надъ эклиптикой. Если бы орбита не измѣняла своего положенія и постоянная прямая находилась бы въ ней на такомъ угловомъ разстояніи отъ узла, въ какомъ точка весенняго равноденствія находится отъ того же узла по эклиптикѣ, то мы имѣли бы $\sigma = \theta$, предполагая, что θ есть долгота восходящаго узла орбиты. Орбита отъ возмущеній измѣняетъ свое положеніе, имѣя это въ виду, означимъ чрезъ χ уголъ между постоянною прямою и частію большой полуоси направленной въ перигелій, тогда $\chi = \omega + \sigma$, если ω есть разстояніе перигелія отъ узла. Если бы положеніе орбиты не измѣнялось, то тогда имѣли бы $\chi = \pi$, гдѣ π есть долгота перигелія. Если означимъ чрезъ u аргументъ широты и чрезъ v истинную аномалію въ мгновенной орбитѣ, то для этой послѣдней $u = v + \chi - \sigma$. Разсматривая оскулирующіе элементы какъ систему соотвѣтствующую мгновенной орбитѣ опредѣленнаго момента t_0, имѣемъ $\chi_0 = \omega_0 + \theta_0$. Если назовемъ чрезъ λ истинную долготу въ мгновенной орбитѣ, то $\lambda = v + \pi = v + \omega + \theta$; но кромѣ того $\chi = \omega + \sigma$, слѣдовательно $\lambda = v + \chi - (\sigma - \theta)$. Легко видѣть, что въ долготу, представленную такимъ образомъ, включается и та

часть возмущеній этой координаты, которая обусловливается измѣненіемъ положенія мгновенной орбиты, т. е. измѣненіемъ не только положенія перигелія и узла, но также и наклоненія мгновенной орбиты къ эклиптикѣ или къ другой какой либо основной плоскости *).

Если знаемъ возмущенныя значенія элементовъ M, e и μ, то изъ уравненія

$$E - e \,.\, \sin E = M + \mu (t - t_0)$$

для всякаго t можемъ опредѣлить возмущенное значеніе эксцентрической аномаліи E. Съ нею при помощи возмущенныхъ значеній a и e можемъ найти r и v, соотвѣтствующія возмущенному движенію, изъ уравненій

$$r \,.\, \cos v = a \,.\, \cos E - ae$$
$$r \,.\, \sin v = a \,.\, \sqrt{1 - e^2} \,.\, \sin E$$

и наконецъ при помощи v возмущенная истинная долгота λ опредѣлится изъ уравненія $\lambda = v + \chi - (\sigma - \theta)$, если кромѣ того будутъ найдены величины χ и σ, которыми опредѣляется положеніе мгновенной орбиты.

Но кромѣ этого способа полнаго опредѣленія возмущеннаго положенія свѣтила можно представить себѣ еще другой пріемъ рѣшенія того же вопроса. Можно отдѣлить опредѣленіе возмущеній, обусловливающихся дѣйствіемъ составляющихъ возмущающей силы въ плоскости орбиты, отъ опредѣленія возмущеній зависящихъ отъ дѣйствія составляющей перпендикулярной къ плоскости мгновенной орбиты.

Итакъ разсмотримъ сначала только двѣ составляющія возмущающей силы дѣйствующія въ плоскости орбиты. Назовемъ долготу въ орбитѣ измѣненную дѣйствіемъ только этихъ силъ чрезъ λ_1, тогда $\lambda_1 = v + \chi$, ибо разность $\theta - \sigma$ заключаетъ въ себѣ ту часть возмущеній истинной долготы, которая зависитъ отъ измѣненія наклоненія орбиты и положенія узла, а въ χ включена часть возмущеній долготы обусловливающаяся движеніемъ перигелія. Кромѣ этого раздѣленія поставимъ вычисленіе возмущеннаго положенія въ зависимость не отъ системы перемѣнныхъ элементовъ a, e, μ, π, но отъ нѣкоторой системы постоянныхъ, напр. оскулирующихъ элементовъ a_0, e_0, μ_0, π_0, соотвѣтствующихъ тому положенію мгновенной орбиты, которое она имѣла во время t_0; при этомъ первую часть вопроса объ опредѣленіи возмущеній поставимъ въ такой формѣ: будемъ искать такую поправку δM средней аномаліи, при помощи которой и системы постоянныхъ элементовъ a_0, e_0, M_0, μ_0 для всякаго времени t опредѣлялась бы изъ уравненія

$$E_1 - e_0 \,.\, \sin E_1 = M_0 + \mu_0 (t - t_0) + \delta M$$

эксцентрическая аномалія E_1, имѣющая то свойство, что величина v_1 вычисленная при помощи ея изъ уравненій

$$r_1 \,.\, \cos v_1 = a_0 \,.\, \cos E_1 - a_0 e_0$$
$$r_1 \,.\, \sin v_1 = a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \,.\, \sin E_1$$

давала бы въ связи съ постояннымъ элементомъ π_0 или χ_0 возмущенное значеніе долготы въ орбитѣ по формѣ $\lambda_1 = v_1 + \chi_0 = v_1 + \pi_0$. Слѣдовательно δM должно быть опредѣлено при томъ условіи, чтобы уравненія $\lambda_1 = v + \chi$ и $\lambda_1 = v_1 + \pi_0$ были тождественны.

---

*) См. *М. Хандриковъ.* Общая теорія возмущеній, стр. 90 и 91, n° 10.

Понятно, что величина r_1, вычисленная въ связи съ v_1, будетъ разниться отъ возмущеннаго значенія радіуса вектора r, а потому опредѣлимъ еще такую величину ν, которая въ связи съ величиною r_1 давала бы возмущенное значеніе r по уравненію

$$r = r_1 (1 + \nu)$$

И такъ величинами δM и ν представляется дѣйствіе составляющихъ возмущающей силы расположенныхъ въ плоскости орбиты. Найдемъ уравненія, которыя могли бы служить для опредѣленія величинъ δM и ν.

Назовемъ чрезъ x и y прямолинейныя координаты возмущеннаго свѣтила. Возмущенный радіусъ векторъ пусть будетъ r. Предположимъ, что ось x выбрана такимъ образомъ, что радіусъ векторъ r составляетъ съ ней въ извѣстный моментъ t уголъ v_1. Тогда въ плоскости мгновенной орбиты положеніе свѣтила для времени t опредѣлится координатами

$$x = r \,.\cos v_1 \,; \qquad y = r \,.\sin v_1$$

Назовемъ составляющія возмущающей силы по разсматриваемымъ осямъ x и y чрезъ X и Y. Тогда дифференціальныя уравненія движенія свѣтила въ плоскости орбиты, какъ извѣстно, будутъ имѣть форму

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^3}\,x = X; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^3}\,y = Y \tag{199}$$

Умножимъ второе изъ этихъ уравненій на x, а первое на y и вычтемъ второе произведеніе изъ перваго, тогда послѣ интегрированія полученной разности найдемъ

$$x\frac{dy}{dt} \quad y\frac{dx}{dt} = \int (x\,.Y - y\,.X)\,dt + C$$

гдѣ C есть постоянная введенная интегрированіемъ. Но понятно, что

$$\frac{dx}{dt} = \cos v_1 \frac{dr}{dt} - r \sin v_1 \frac{dv_1}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin v_1 \frac{dr}{dt} + r \cos v_1 \frac{dv_1}{dt}$$

откуда легко находимъ

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{dv_1}{dt}$$

Слѣдовательно предыдущій интегралъ принимаетъ видъ

$$r^2\frac{dv_1}{dt} = \int (Y\,.x - X\,.y)\,dt + C$$

Предположимъ, что возмущающая сила разложена на три составляющія, одна изъ этихъ послѣднихъ пусть будетъ направлена по радіусу вектору, другая—по направленію перпендикулярному къ радіусу вектору въ плоскости орбиты и третья—по направленію перпендикулярному къ плоскости мгновенной орбиты. Означимъ чрезъ S

вторую изъ этихъ составляющихъ. Такъ какъ радіусъ векторъ составляетъ съ осью x уголъ v_1, то

$$\cos(S, x) = \cos(90^\circ + v_1) = -\sin v_1; \qquad \cos(S, y) = \sin(90^\circ + v_1) = \cos v_1$$

Слѣдовательно

$$X = -S.\sin v_1; \qquad Y = S.\cos v_1$$

а потому

$$Yx - Xy = r.S$$

Посредствомъ этого предыдущій интегралъ обращается въ

$$r^2 \frac{dv_1}{dt} = \int rS.dt + C$$

Такъ представляется удвоенная элементарная площадь сектора, описанная радіусомъ векторомъ въ плоскости орбиты. Если назовемъ чрезъ v_0 уголъ, который составляетъ во время t_0 радіусъ векторъ съ осью x (гдѣ подъ t_0 разумѣемъ оскулирующую эпоху), то, какъ мы знаемъ

$$r_0^2 \frac{dv_0}{dt} = k\sqrt{p_0(1+m)}$$

Слѣдовательно

$$r^2 \frac{dv_1}{dt} = k\sqrt{p_0(1+m)} + \int rS.dt \tag{200}$$

Умножимъ уравненія (199) первое на x, второе на y и сложимъ произведенія, найдемъ

$$\frac{1}{r}\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{k^2(1+m)}{r^2} = \frac{x}{r}X + \frac{y}{r}Y \tag{201}$$

Легко видѣть, что

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} = r\frac{d^2r}{dt^2} - r^2\frac{dv_1}{dt}$$

кромѣ того, если назовемъ чрезъ R составляющую возмущающей силы направленную по радіусу вектору, то понятно, что

$$R = \frac{x}{r}X + \frac{y}{r}Y$$

а потому уравненіе (201) приводится къ виду

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^2} = R \tag{202}$$

Уравненія (200) и (201) должны существовать совмѣстно съ уравненіями

$$
\begin{aligned}
E_1 - e_0 \,.\, \sin E_1 &= M_0 + \mu_0 (t - t_0) + \delta M \\
r_1 \,.\, \cos v_1 &= a_0 \cos E_1 - a_0 e_0 \\
r_1 \,.\, \sin v_1 &= a_0 \sqrt{1 - e^2} \,.\, \sin E_1 \\
\lambda_1 = v_1 + \chi_0 \,; &\qquad r = r_1 (1 + \nu)
\end{aligned}
\tag{203}
$$

Будемъ дифференцировать эти уравненія, принимая за постоянныя величины одни только оскулирующіе элементы. Тогда получимъ

$$
\begin{aligned}
&[1 - e_0 \cos E_1] \frac{dE_1}{dt} = \mu_0 + \frac{d\delta M}{dt} \\
&\cos v_1 \frac{dr_1}{dt} - r_1 \sin v_1 \frac{dv_1}{dt} = - a_0 \sin E_1 \frac{dE_1}{dt} \\
&\sin v_1 \frac{dr_1}{dt} + r_1 \cos v_1 \frac{dv_1}{dt} = a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \,.\, \cos E_1 \frac{dE_1}{dt} \\
&\frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{dv_1}{dt}
\end{aligned}
\tag{204}
$$

опредѣляя по второму и третьему изъ этихъ уравненій производную $\frac{dr_1}{dt}$, имѣемъ

$$
r_1 \frac{dr_1}{dt} = [a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \,.\, r_1 \sin v_1 \cos E_1 - a_0 r_1 \cos v_1 \sin E_1] \frac{dE_1}{dt}
$$

Внесемъ сюда вмѣсто $r_1 \sin v_1$ и $r_1 \cos v_1$ ихъ величины изъ уравненій (203), а вмѣсто $\frac{dE_1}{dt}$ его величину взятую изъ уравненій (204), тогда послѣ простыхъ сокращеній получимъ

$$
r_1 \frac{dr_1}{dt} = a_0^2 e_0 \left[\mu_0 + \frac{d\delta M}{dt}\right] \sin E_1
$$

но $a_0 (1 - e_0^2) = p_0$, и потому $r_1 \sin v_1 = \sqrt{a_0 p_0} \sin E_1$, слѣдовательно

$$
\frac{dr_1}{dt} = \frac{a_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p_0}} \mu_0 e_0 \left[1 + \frac{1}{\mu_0} \frac{d\delta M}{dt}\right] \sin v_1 \,.
$$

Мы знаемъ, что

$$
a_0^{\frac{3}{2}} \,.\, \mu_0 = k \sqrt{1 + m}
$$

поэтому

$$
\frac{dr_1}{dt} = \frac{k \sqrt{1 + m}}{\sqrt{p_0}} \left[1 + \frac{1}{\mu_0} \frac{d\delta M}{dt}\right] e_0 \sin v_1 \tag{205}
$$

Исключая между вторымъ и третьимъ изъ уравненій (204) производную $\frac{dr_1}{dt}$, находимъ

$$
r_1^2 \frac{dv_1}{dt} = k \sqrt{p_0 (1 + m)} \left[1 + \frac{1}{\mu_0} \frac{d\delta M}{dt}\right] \tag{206}
$$

но мы приняли $r = r_1(1+\nu)$, поэтому

$$(206_*) \qquad r^2 \frac{dv_1}{dt} = k\sqrt{p_0(1+m)}\left[1 + \frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right](1+\nu)^2$$

Такъ какъ уравненія (200), (202) и (203) существуютъ совмѣстно, то внося сюда вмѣсто $r^2 \frac{dv_1}{dt}$ его величину взятую изъ уравненія (200), легко находимъ

$$(207) \qquad \frac{d\delta M}{dt} = \mu_0\left[\frac{1}{(1+\nu)^2} - 1\right] + \frac{\mu_0}{(1+\nu)^2}\frac{1}{k\sqrt{p_0(1+m)}}\int rS.dt$$

интегрируя это, получимъ δM, т. е. измѣненіе средней аномаліи отъ возмущеній.

Составимъ теперь уравненіе для опредѣленія ν. Два послѣдовательныя дифференцированія уравненія $r = r_1(1+\nu)$ даютъ

$$(208) \qquad \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= (1+\nu)\frac{dr_1}{dt} + r_1\frac{d\nu}{dt}, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= (1+\nu)\frac{d^2r_1}{dt^2} + 2\frac{dr_1}{dt}\cdot\frac{d\nu}{dt} + r_1\frac{d^2\nu}{dt^2} \end{aligned}$$

Дифференцируя уравненіе (205), находимъ

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p_0}}e_0\left[1 + \frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]\cos v_1\frac{dv_1}{dt} + \frac{k\sqrt{1+m}}{\mu_0\sqrt{p_0}}e_0.\sin v_1\frac{d^2\delta M}{dt^2}$$

Внося сюда вмѣсто $\frac{dv_1}{dt}$ его величину изъ выраженія (206), имѣемъ

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} = \frac{k^2(1+m)}{r_1^{\,2}}\left[1 + \frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]^2 e_0\cos v_1 + \frac{k\sqrt{1+m}\,e_0\sin v_1}{\mu_0\sqrt{p_0}}\frac{d^2\delta M}{dt^2}$$

Внося эту величину вмѣстѣ съ величиною $\frac{dr_1}{dt}$ взятою изъ уравненія (205) во второе изъ уравненій (208), имѣемъ

$$(209) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= r_1\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)(1+\nu)}{r_1^{\,2}}\left[1 + \frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]^2 e_0\cos v_1 \\ &+ \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p_0}}\left[\frac{1+\nu}{\mu_0}\frac{d^2\delta M}{dt^2} + 2\frac{d\nu}{dt} + \frac{2}{\mu_0}\frac{d\nu}{dt}\cdot\frac{d\delta M}{dt}\right]e_0\sin v_1 \end{aligned}$$

Дифференцируя уравненіе (207) еще разъ по t, находимъ

$$\frac{(1+\nu)}{\mu_0}\frac{d^2\delta M}{dt^2} + 2\frac{d\nu}{dt}\left[\frac{1}{(1+\nu)^2} + \frac{1}{k(1+\nu)^2\sqrt{p_0(1+m)}}\int rS.dt\right] = \frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{rS}{k\sqrt{p_0(1+m)}}$$

Придавая и вычитая къ суммѣ заключенной въ скобкѣ по единицѣ и обращая вниманіе на уравненіе (207), отсюда легко находимъ

$$\frac{1+\nu}{\mu_0}\frac{d^2\delta M}{dt^2} + 2\frac{d\nu}{dt} + \frac{2}{\mu_0}\frac{d\nu}{dt}\cdot\frac{d\delta M}{dt} = \frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{r.S}{k\sqrt{p_0(1+m)}}$$

и слѣдовательно уравненіе (209) приводится къ виду

$$\frac{d^2r}{dt^2}=r_1\frac{d^2\nu}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{(1+\nu)}{r_1^2}\left[1+\frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]^2 e_0\cos v_1+\frac{e_0\sin v_1}{p_0(1+\nu)}Sr \qquad (210)$$

Возвышая уравненіе (206) въ квадратъ, имѣемъ

$$r_1\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2=\frac{k^2.p_0(1+m)}{r_1^3}\left[1+\frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]^2$$

Но мы знаемъ, что

$$r_1=\frac{r}{1+\nu};\qquad \frac{p_0}{r_1}=1+e_0\cos v_1$$

а потому предыдущее дастъ

$$r\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2=\frac{k^2(1+m)}{r_1^2}(1+\nu)\left[1+\frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]^2$$
$$+\frac{k^2(1+m)\,e_0\cos v_1}{r_1^2}(1+\nu)\left[1+\frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]^2$$

Внося эту величину $r\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2$ вмѣстѣ съ величиною $\frac{d^2r}{dt^2}$, представленною въ видѣ (210) въ уравненіе (202), имѣемъ

$$\frac{d^2\nu}{dt^2}=\frac{1+\nu}{r}R+\frac{k^2}{r^3}(1+m)(1+\nu)^4\left[1+\frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]^2$$
$$-\frac{e_0\sin v_1}{p_0}S-\frac{k^2}{r^3}(1+m)(1+\nu)$$

Но изъ уравненія (207) находимъ

$$(1+\nu)^2\left[1+\frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]=1+\frac{1}{k\sqrt{p_0(1+m)}}\int Sr.dt$$

Возвышая это въ квадратъ и внося въ предыдущее уравненіе, получаемъ

$$\frac{d^2\nu}{dt^2}=\frac{R}{r_1}+\frac{2k\sqrt{1+m}}{r^3.\sqrt{p_0}}\int Sr.dt-\frac{e_0\sin v_1}{p_0}S$$
$$-\frac{k^2(1+m)}{r^3}\left[\nu-\left\{\frac{1}{k\sqrt{p_0(1+m)}}\int rS.dt\right\}^2\right] \qquad (211)$$

интегрированіемъ этого уравненія опредѣляется величина ν.

19. Посмотримъ наконецъ какимъ образомъ можетъ быть опредѣлено положеніе мгновенной орбиты въ пространствѣ. Для этого мы должны имѣть въ виду дѣйствіе составляющей возмущающей силы перпендикулярной къ плоскости возмущенной орбиты. Означимъ чрезъ x_1, y_1, z_1 координаты свѣтила относительно такой системы осей, за

основную плоскость которой принята плоскость эклиптики. Пусть x и y будутъ координаты свѣтила относительно осей расположенныхъ въ плоскости мгновенной орбиты и измѣняющихъ свое положеніе вмѣстѣ съ ней. Пусть α и β будутъ косинусы угловъ, которые оси x и y составляютъ съ осью z_1. Тогда

$$z_1 = \alpha . x + \beta . y$$

Если бы положеніе мгновенной орбиты не измѣнялось, то α и β были бы постоянныя величины, въ дѣйствительности же эти косинусы должны быть разсматриваемы какъ функціи времени. Такимъ образомъ въ выраженіе z_1 время входитъ двояко: явно въ зависимости отъ координатъ x и y и кромѣ того въ зависимости отъ α и β, которыя суть функціи времени по причинѣ дѣйствія возмущающей силы. Такимъ образомъ производная $\frac{dz_1}{dt}$ состоитъ изъ двухъ частей и можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{dz_1}{dt} = \left(\frac{dz_1}{dt}\right) + \left[\frac{dz_1}{dt}\right]$$

гдѣ первый членъ происходитъ отъ измѣненія времени входящаго явно, второй—отъ измѣненія α и β. Но такъ какъ всѣ возмущенія мы опредѣляемъ подъ тѣмъ условіемъ, чтобы не только всякая функція координатъ, но также и всякая функція ихъ первыхъ производныхъ сохраняла свою форму въ обоихъ родахъ движенія, то это условіе удовлетворится, если совмѣстно существуютъ уравненія

$$\frac{dz_1}{dt} = \left(\frac{dz_1}{dt}\right); \qquad \left[\frac{dz_1}{dt}\right] = 0$$

понятно, что

$$\left(\frac{dz_1}{dt}\right) = \alpha . \frac{dx}{dt} + \beta . \frac{dy}{dt}; \qquad \left[\frac{dz_1}{dt}\right] = x . \frac{d\alpha}{dt} + y . \frac{d\beta}{dt}$$

что касается второй производной, то очевидно, что

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{dy}{dt} + \alpha . \frac{d^2x}{dt^2} + \beta . \frac{d^2y}{dt^2} \tag{212}$$

Назовемъ чрезъ X, Y, Z, проложенія возмущающей силы на оси x, y, z, гдѣ Z есть слѣдовательно составляющая перпендикулярная къ плоскости мгновенной орбиты. Назовемъ проложенія тойже возмущающей силы на оси x_1, y_1, z, чрезъ X_1, Y_1, Z_1 и уголъ наклоненія мгновенной орбиты къ основной плоскости означимъ чрезъ i, тогда очевидно

$$Z_1 = \alpha . X + \beta . Y + Z . \cos i$$

Координаты x и y удовлетворяютъ уравненіямъ (199), а потому внося въ предыдущее уравненіе величины составляющихъ X и Y, взятыя изъ уравненій (199), и замѣтивъ, что $z_1 = \alpha . x + \beta . y$, имѣемъ

$$Z_1 = \alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^3} z_1 + Z . \cos i \tag{213}$$

Уравненія движенія относительно осей x_1, y_1, z_1 имѣютъ, какъ извѣстно, форму

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x_1}{r^3} &= X_1 \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y_1}{r^3} &= Y_1 \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z_1}{r^3} &= Z_1 \end{aligned} \tag{214}$$

При помощи послѣдняго изъ этихъ уравненій предыдущее приводится къ виду

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = \alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{d^2y}{dt^2} + Z.\cos i$$

Сравнивая это съ уравненіемъ (212), заключаемъ, что

$$\frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} = Z.\cos i \tag{215}$$

Исключая изъ уравненія (212_*) составляющую Z_1 посредствомъ третьяго изъ уравненій (214), имѣемъ

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{z_1}{r^3} + Z.\cos i + \alpha.X + \beta.Y \tag{216}$$

Предположимъ, что z_0, α_0 и β_0 суть тѣ величины, въ которыя обращаются z_1, α и β при $Z=0$, тогда предыдущее уравненіе дастъ

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{z_0}{r^3} + \alpha_0.X + \beta_0.Y \tag{217}$$

Мы оставили здѣсь r безъ измѣненія на томъ основаніи, что составляющая Z, дѣйствуя перпендикулярно къ плоскости мгновенной орбиты, измѣняетъ только положеніе этой послѣдней и не вліяетъ на измѣненіе r, который измѣняется только съ измѣненіемъ размѣровъ орбиты. Мы говоримъ здѣсь только о перемѣнахъ обусловливающихся возмущеніями. И такъ если означимъ чрезъ δz_1, $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ части измѣненій величинъ z_1, α и β, зависящія отъ дѣйствія составляющей перпендикулярной къ плоскости мгновенной орбиты, то

$$z_1 = z_0 + \delta z; \qquad \alpha = \alpha_0 + \delta\alpha; \qquad \beta = \beta_0 + \delta\beta$$

Внося это въ уравненіе (216) и вычитая потомъ уравненіе (217), имѣемъ

$$\frac{d^2\delta z_1}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{\delta z_1}{r^3} + X.\delta\alpha + Y.\delta\beta + Z.\cos i \tag{218}$$

Такъ какъ измѣненіе δz_1 зависитъ исключительно отъ измѣненія плоскости орбиты, то въ уравненіяхъ

$$z_1 = \alpha.x + \beta.y; \qquad \left(\frac{dz_1}{dt}\right) = \alpha\frac{dx}{dt} + \beta\frac{dy}{dt}$$

при дифференцированіи относительно характеристики δ величины x, y, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$

должны быть разсматриваемы какъ постоянныя и тогда

$$(219)\qquad \delta z_1 = x.\delta\alpha + y.\delta\beta; \qquad \frac{d\delta z_1}{dt} = \frac{dx}{dt}\delta\alpha + \frac{dy}{dt}\delta\beta$$

Исключая изъ этихъ уравненій величину $\delta\beta$, имѣемъ

$$\delta\alpha\left[x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right] = \frac{dy}{dt}\delta z_1 - y\frac{d\delta z_1}{dt}$$

Коеффиціентъ при $\delta\alpha$ есть удвоенная площадь сектора описаннаго радіусомъ векторомъ, а потому

$$(220)\qquad \delta\alpha = \frac{1}{k\sqrt{p(1+m)}}\left[\frac{dy}{dt}\cdot\delta z_1 - y\frac{d\delta z_1}{dt}\right]$$

Исключая изъ уравненій (219) величину $\delta\alpha$, подобнымъ же образомъ находимъ

$$(221)\qquad \delta\beta = \frac{1}{k\sqrt{p(1+m)}}\left[x\frac{d\delta z_1}{dt} - \frac{dx}{dt}\cdot\delta z_1\right]$$

Подставляя эти величины $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ въ уравненіе (218), получаемъ

$$(222)\ \frac{d^2\delta z_1}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{\delta z_1}{r^3} + \frac{1}{k\sqrt{p(1+m)}}\left[\left(X\frac{dy}{dt} - Y\frac{dx}{dt}\right)\delta z_1 + (Yx - Xy)\frac{d\delta z_1}{dt}\right] + Z\cos i$$

Мы видѣли, что

$$(223)\qquad S = \frac{x}{r}Y - \frac{y}{r}X; \qquad R = \frac{x}{r}X + \frac{y}{r}Y$$

откуда

$$X = \frac{x}{r}R - \frac{y}{r}S; \qquad Y = \frac{y}{r}R + \frac{x}{r}S$$

Изъ этихъ уравненій, помножая первое на $\frac{dy}{dt}$ и вычитая изъ произведенія второе умноженное на $\frac{dx}{dt}$, имѣемъ

$$X\frac{dy}{dt} - Y\frac{dx}{dt} = \frac{R}{r}k\sqrt{p(1+m)} - S\frac{dr}{dt}$$

при помощи этого и перваго изъ уравненій (223) приводимъ уравненіе (222) къ виду

$$(224)\qquad \frac{d^2\delta z_1}{dt} = -\frac{k^2(1+m)}{r^3}\delta z_1 + Z.\cos i + \left[\frac{R}{r} - \frac{S}{k\sqrt{p(1+m)}}\frac{dr}{dt}\right]\delta z_1 + \frac{Sr}{k\sqrt{p(1+m)}}\frac{d\delta z_1}{dt}$$

Внося въ первое изъ уравненій (208) вмѣсто $\frac{dr_1}{dt}$ его величину взятую изъ уравненія (205), находимъ

$$(224_*)\qquad \frac{dr}{dt} = (1+\nu)\frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p_0}}\left[1 + \frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]e_0\sin v_1 + r_1\frac{d\nu}{dt}$$

исключая отсюда $\frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}$ съ помощію уравненія (206), имѣемъ

$$\frac{dr}{dt}=(1+\nu)\,r_1^{\,2}\,\frac{dv_1}{dt}\frac{e_0}{p_0}\sin v_1+r_1\frac{d\nu}{dt}$$

но такъ какъ $r_1^{\,2}(1+\nu)^2=r^2$, то

$$\frac{dr}{dt}=\frac{e_0\sin v_1}{p_0(1+\nu)}\,r^2\frac{dv_1}{dt}+r_1\frac{d\nu}{dt}$$

но

$$\frac{dv_1}{dt}=\frac{k\sqrt{p\,(1+m)}}{r^2}$$

гдѣ подъ p и r разумѣемъ возмущенныя значенія этихъ функцій; поэтому

$$\frac{dr}{dt}=\frac{k\sqrt{p\,(1+m)}\,e_0\sin v_1}{p_0(1+\nu)}+r_1\frac{d\nu}{dt}$$

подставляя эту величину въ уравненіе (224), имѣемъ

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta z_1}{dt^2}&=-\frac{k^2(1+m)}{r^3}\,\delta z_1+Z\,.\cos i+\left[\frac{R}{r_1}-\frac{e_0\sin v_1}{p_0}\,S\right]\frac{\delta z_1}{1+\nu}\\&\quad+\frac{rS}{k\sqrt{p\,(1+m)}}\left[\frac{d\delta z_1}{dt}-\frac{\delta z_1}{1+\nu}\frac{d\nu}{dt}\right]\end{aligned}\qquad(225)$$

изъ этого уравненія интегрированіемъ по способу механической квадратуры и должно быть опредѣлено измѣненіе δz_1.

И такъ уравненіями (207), (211) и (225) вполнѣ рѣшается вопросъ о вычисленіи возмущеннаго положенія свѣтила. Но примѣнить эти уравненія къ вычисленію возмущеній можно только послѣдовательными приближеніями. Прежде всего, отвергая члены втораго порядка относительно возмущеній, приведемъ упомянутыя уравненія къ виду

$$\frac{d\delta M}{dt}=\frac{\mu_0}{k\sqrt{p_0(1+m)}}\int r_0S\,.\,dt-2\mu_0\nu$$

$$\frac{d^2\nu}{dt^2}=\frac{R}{r_0}+\frac{2k\sqrt{1+m}}{r_0^{\,3}\sqrt{p_0}}\int r_0S\,.\,dt-\frac{e_0\sin v_0}{p_0}\,S-\frac{k^2(1+m)}{r_0^{\,3}}\,\nu\qquad(226)$$

$$\frac{d^2\delta z_1}{dt^2}=Z\,.\cos i_0-\frac{k^2(1+m)}{r_0^{\,3}}\,\delta z_1$$

гдѣ подъ r_0 разумѣемъ величину радіуса вектора, вычисленную посредствомъ оскулирующихъ элементовъ. Но и эти уравненія не могутъ быть примѣнены непосредственно. Сначала отвергая въ двухъ послѣднихъ уравненіяхъ послѣдніе члены, по остальному вычислимъ ν и δz_1, потомъ принимая во вниманіе послѣдніе члены, изъ тѣхъ же

уравненій найдемъ болѣе точныя значенія для ν и δz_1. Имѣя эти послѣднія, по первому уравненію вычислимъ наконецъ δM.

20. Для вычисленія δM, ν и δz, необходимо имѣть выраженія составляющихъ R, S и Z возмущающей силы.

Въ выраженіяхъ (199) мы подразумѣваемъ подъ X и Y функціи слѣдующаго вида

$$X = m'k^2 \left[\frac{x' - x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right]$$

$$Y = m'k^2 \left[\frac{y' - y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right]$$

и подобно этому

$$Z = m'k^2 \left[\frac{z' - z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right]$$

Но такъ какъ составляющія R, S и Z мы будемъ вычислять по данной системѣ оскулирующихъ элементовъ и за плоскость xy принимаемъ орбиту, представляемую этой системой оскулирующихъ элементовъ, то необходимо должны считать $z = 0$ и тогда

$$(227) \qquad Z = m'k^2 \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right] z'; \quad \rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z'^2$$

Если положимъ

$$h = \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}$$

то понятно, что функціи X и Y могутъ быть представлены въ видѣ

$$X = k^2m' \left[x'.h - \frac{x}{\rho^3}\right]; \qquad Y = k^2m' \left[y'.h - \frac{y}{\rho^3}\right]$$

Но такъ какъ

$$S = \frac{x}{r} Y - \frac{y}{r} X; \qquad R = \frac{x}{r} X + \frac{y}{r} Y$$

то

$$(228) \qquad S = k^2m' \frac{h}{r} [xy' - yx']; \qquad R = k^2m' \left[\frac{h}{r} (xx' + yy') - \frac{r}{\rho^3}\right]$$

Такъ какъ величины составляющихъ S и R возмущающей силы не зависятъ отъ расположенія осей x и y въ плоскости оскулирующей орбиты, то составляя выраженія для R и S, мы можемъ оси x дать какое угодно направленіе въ упомянутой сейчасъ плоскости. Проведемъ ось x чрезъ восходящій узелъ оскулирующей орбиты надъ эклиптикой. Пусть уголъ, который составляетъ радіусъ векторъ съ осью x будетъ w, тогда $x = r.\cos w$; $y = r.\sin w$, гдѣ $w = \omega_0 + v_0$; если подъ r_0, v_0 разумѣемъ радіусъ векторъ и истинную аномалію возмущеннаго свѣтила вычисленныя по оскулирующимъ элементамъ, а подъ ω_0 разстоянію перигелія отъ узла оскулирующей орбиты.

Подъ x', y', z' мы разумѣемъ теперь координаты возмущающаго свѣтила, отнесенныя къ такой системѣ осей, за основную плоскость которой принята плоскость оскулирующей орбиты. Чтобы опредѣлить эти координаты, означимъ чрезъ i' и θ' наклоненіе къ эклиптикѣ и долготу восходящаго узла надъ эклиптикой орбиты возмущающаго свѣтила. Пусть J будетъ наклоненіе орбиты возмущающаго свѣтила къ орбитѣ возмущеннаго свѣтила соотвѣтствующей времени t_0. Пусть N будетъ долгота узла орбиты возмущающаго свѣтила на плоскости оскулирующей орбиты, долгота считаемая отъ точки пересѣченія этой послѣдней плоскости съ эклиптикой. Пусть N' будетъ угловое разстояніе восходящаго узла орбиты возмущающаго свѣтила надъ эклиптикой и восходящаго узла той же орбиты надъ оскулирующей орбитой. Изъ сферическаго треугольника заключающагося между точками пересѣченія обѣихъ орбитъ съ эклиптикой и точкой взаимнаго пересѣченія обѣихъ орбитъ, имѣемъ

$$\begin{aligned}
\sin\frac{J}{2}\sin\frac{N+N'}{2} &= \sin\frac{\theta'-\theta_0}{2}\sin\frac{i'+i_0}{2}\\
\sin\frac{J}{2}\cos\frac{N+N'}{2} &= \cos\frac{\theta'-\theta_0}{2}\sin\frac{i'-i_0}{2}\\
\cos\frac{J}{2}\sin\frac{N-N'}{2} &= \sin\frac{\theta'-\theta_0}{2}\cos\frac{i'+i_0}{2}\\
\cos\frac{J}{2}\cos\frac{N-N'}{2} &= \cos\frac{\theta'-\theta_0}{2}\cos\frac{i'-i_0}{2}
\end{aligned}\tag{229}$$

Изъ этихъ уравненій опредѣлятся J, N и N'.

Предположимъ, что на фиг. 6 дуга OO' представляетъ орбиту возмущающаго свѣтила и въ P находится это свѣтило. Пусть дуга EQ представляетъ оскулирующую орбиту возмущаемаго свѣтила, пусть въ ν находится восходящій узелъ этой орбиты надъ эклиптикой. Теперь предполагается, что чрезъ точку ν проходитъ ось x. Проведемъ чрезъ P большой кругъ перпендикулярный къ оскулирующей орбитѣ и положимъ $p\nu = w'$, $Pp = \beta'$. Такимъ образомъ w' будетъ долгота возмущающаго свѣтила, считаемая отъ узла оскулирующей орбиты на эклиптикѣ, а β' широта возмущающаго свѣтила относительно основной плоскости. Пусть $AP = u'$ и такъ какъ $A\nu = N$, то сторонами треугольника APp будутъ $AP = u'$; $Pp = \beta'$; $pA = w' - N$ и противъ стороны Pp лежитъ уголъ J. Изъ этого треугольника имѣемъ

$$\begin{aligned}
\cos u' &= \cos\beta'\cos(w'-N)\\
\sin u'\cos J &= \cos\beta'\sin(w'-N)\\
\sin u'\sin J &= \sin\beta'
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}(w'-N) &= \operatorname{tang} u'.\cos J\\
\operatorname{tang}\beta' &= \sin(w'-N)\operatorname{tang} J
\end{aligned}\tag{230}$$

Если u' извѣстно, то эти два уравненія могутъ служить для опредѣленія w' и β'. Что касается u', то эту величину легко опредѣлить. Назовемъ чрезъ f' истинную аномалію возмущающаго свѣтила, чрезъ ω' разстояніе перигелія отъ узла орбиты возмущающаго свѣтила, тогда аргументъ широты этого послѣдняго представится въ видѣ суммы $\omega' + f'$ и легко видѣть, что $u' = \omega' + f' - N'$. Зная u', можемъ считать

w' и β' извѣстными, а по этимъ послѣднимъ координаты x', y', z' опредѣлятся изъ уравненій

$$x' = r' . \cos\beta' . \cos w'$$
$$y' = r' . \cos\beta' . \sin w'$$
$$z' = r' . \sin\beta'$$

При помощи этихъ выраженій и выраженій $x = r_0 . \cos w$, $y = r_0 . \sin w$, выраженія (227) и (228) легко приводятся къ виду

$$(231) \qquad \begin{aligned} S &= m'k^2 . hr' . \cos\beta' \sin(w' - w) \\ R &= m'k^2 \left[hr' . \cos\beta' \cos(w' - w) - \frac{z_0}{\rho^3} \right] \\ Z &= m'k^2 . hr' . \sin\beta' \end{aligned}$$

Этими выраженіями мы и должны пользоваться для вычисленія составляющихъ S, R и Z. Что касается до ρ, то понятно, что оно опредѣлится изъ выраженія

$$\rho^2 = r'^2 + r_0^2 + 2r'r_0 \cos\beta' . \cos(w' - w)$$

21. Въ теченіи большаго промежутка времени, для котораго иногда приходится вычислять возмущенія, члены втораго порядка относительно возмущеній, опущенные въ первомъ приближеніи могутъ значительно возрасти. Чтобы не вводить ихъ въ вычисленіе, можно большой промежутокъ времени разбить на два или на три сравнительно малыхъ и въ каждомъ изъ этихъ подраздѣленій слѣдуетъ вычислять возмущенія на основаніи новой системы оскулирующихъ элементовъ, вычисленной для начала послѣдующаго подраздѣленія по возмущеніямъ координатъ найденнымъ въ предыдущемъ подраздѣленіи. И такъ вопросъ, который предстоитъ теперь намъ рѣшить, будетъ заключаться въ опредѣленіи новой системы оскулирующихъ элементовъ по данной первоначальной системѣ и извѣстнымъ значеніямъ δM, ν, δz_1 и производнымъ $\frac{d\delta M}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$ и $\frac{d\delta z_1}{dt}$.

Мы считаемъ

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{k\sqrt{p(1+m)}}{r^2}$$

сравнивая это съ выраженіемъ (206_*), имѣемъ

$$(232) \qquad p = p_0 (1 + \nu)^4 \left[1 + \frac{1}{\mu_0} \frac{d\delta M}{dt} \right]^2$$

выраженіе, посредствомъ котораго можетъ быть вычислено p.

Для возмущенной орбиты мы имѣемъ

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} e . \sin v$$

Сравнивая это съ выраженіемъ (224_*), имѣемъ

$$\sqrt{p_0} . e . \sin v = \sqrt{p} . e_0 . \sin v_1 \left[1 + \frac{1}{\mu_0} \frac{d\delta M}{dt} \right] (1 + \nu) + \frac{r_1 \sqrt{pp_0}}{k\sqrt{1+m}} \frac{d\nu}{dt}$$

исключая въ первомъ членѣ второй части величину $\sqrt{p}$ посредствомъ уравненія (232), находимъ

$$e \cdot \sin v = e_0 \cdot \sin v_1 \left[1 + \frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]^2 (1+\nu)^3 + \frac{r_1 \sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\frac{d\nu}{dt} \qquad (233)$$

но по соотношенію между r и r_1 имѣемъ

$$\frac{p}{1+e \cdot \cos v} = \frac{p_0(1+\nu)}{1+e_0 \cdot \cos v_1}$$

опредѣляя отсюда $e \cdot \cos v$ и внося вмѣсто p его величину изъ уравненія (232), находимъ

$$e \cdot \cos v = (1 + e_0 \cdot \cos v_1)\left[1 + \frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]^2 (1+\nu)^3 - 1 \qquad (234)$$

положимъ для краткости

$$\alpha' = \left[1 + \frac{1}{\mu_0}\frac{d\delta M}{dt}\right]^2 (1+\nu)^3 - 1\,; \qquad \beta' = \frac{r_1\sqrt{p}}{k\sqrt{1+m}}\frac{d\nu}{dt} \qquad (235)$$

тогда уравненія (233) и (235) примутъ видъ

$$\begin{aligned} e \cdot \cos v &= e_0 \cdot \sin v_1 + \alpha' e_0 \cdot \sin v_1 + \beta' \\ e \cdot \cos v &= e_0 \cdot \cos v_1 + \alpha' e_0 \cdot \cos v_1 + \alpha' \end{aligned} \qquad (236)$$

гдѣ α и β суть величины порядка возмущеній.

Придавая и вычитая во второй части втораго изъ уравненій (203) по $a_0 e_0^2 \cos E_1$ и помня, что $p_0 = a_0(1 - e_0^2)$; $r_1 = a_0(1 - e_0 \cdot \cos E_1)$, легко находимъ

$$r_1 \cos v_1 = p_0 \cos E_1 - e_0 r_1$$

принимая это во вниманіе, по уравненіямъ (236) легко составляемъ

$$\begin{aligned} e \cdot \cos(v_1 - v) &= \alpha' \cdot \sin v_1 - \beta' \cdot \cos v_1 \\ e \cdot \sin(v_1 - v) &= e_0 + \frac{\alpha' p_0}{r_1}\cos E_1 + \beta' \cdot \sin v_1 \end{aligned} \qquad (237)$$

по этимъ уравненіямъ легко вычисляемъ e_1 $(v_1 - v)$ и v. Но такъ какъ $e = \sin\varphi$, то $a = p\sec^2\varphi$, вмѣстѣ съ этимъ имѣемъ

$$\mu = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}\,; \qquad \operatorname{tang}\frac{E}{2} = \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{v}{2}\,; \qquad M = E - e\sin E$$

уравненія, которыя всѣ вмѣстѣ даютъ возможность опредѣлить φ, a, μ и M. Остается показать выраженія, по которымъ вычисляются элементы θ, i и π или ω.

Пусть EQ (фиг. 10) будетъ эклиптика, пусть aP' представляетъ оскулирующую орбиту возмущеннаго свѣтила для начальной эпохи. Пусть $a'P$ будетъ оскулирующая орбита того же свѣтила, но для времени t, т. е. для того времени, для котораго вычисляемъ новую систему оскулирующихъ элементовъ. Пусть въ K будетъ находиться узелъ одной изъ этихъ орбитъ на другой. Пусть eO будетъ орбита воз-

щающаго свѣтила. Тогда если въ ν находится точка весенняго равноденствія, то $\nu a = \theta_0$; $\nu a' = \theta$, гдѣ $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$. Пусть $ao = N$, $a'o = N'$, $aoc = J$, $aK = \psi_0$; $a'K = \psi$, гдѣ $\psi = \psi_0 + \Delta\psi$. Кромѣ того по принятому означенію $Kac = i_0$, $Ka'c = i$; пусть наконецъ $aKa' = \eta$, тогда изъ треугольника $aa'c$, имѣемъ

$$\sin i . \sin \Delta\theta = \sin \eta . \sin \psi_0$$
$$\sin i . \cos \Delta\theta = \cos \eta . \sin i_0 + \cos i_0 . \sin \eta . \cos \psi_0$$
$$\cos i = \cos \eta . \cos i_0 - \sin i_0 . \sin \eta . \cos \psi_0$$

Пусть

(238)
$$\begin{aligned} \sin \eta . \cos \psi_0 &= \cos q . \sin Q \\ \cos \eta &= \cos q . \cos Q \\ \sin \eta . \sin \psi_0 &= \sin q \end{aligned}$$

тогда предыдущее приводится къ виду

(239)
$$\begin{aligned} \sin i . \sin \Delta\theta &= \sin q \\ \sin i . \cos \Delta\theta &= \cos q . \sin (i_0 + Q) \\ \cos i &= \cos q . \cos (i_0 + Q) \end{aligned}$$

Если будемъ знать ψ_0 и η, то по нимъ изъ уравненій (238) опредѣлятся q и Q, а при помощи этихъ послѣднихъ по уравненіямъ (239) опредѣлятся искомыя i и $\Delta\theta$. И такъ посмотримъ прежде всего какимъ образомъ могутъ быть вычислены ψ_0 и η. Пусть $OK = \varkappa$; $PO = l$. Понятно, что $l = \omega_0 + v_1 - N$ и такъ какъ v_1 опредѣляется извѣстнымъ образомъ по δM, а N вычисляется по уравненіямъ (229), то l можемъ считать теперь извѣстной величиной. Принимая это, изъ треугольника $PP'K$, въ которомъ PP' есть перпендикуляръ, опущенный изъ возмущеннаго положенія свѣтила на оскулирующую орбиту времени t_0, имѣемъ

$$\operatorname{tang} \eta . \sin (l - \varkappa) = \operatorname{tang} (PP')$$

Назовемъ чрезъ ρ проложеніе возмущеннаго радіуса вектора на орбиту времени t_0. Тогда понятно, что

$$r^2 = \rho^2 + \delta z_1^{\,2}; \qquad r = \rho + \frac{1}{2}\frac{\delta z_1^{\,2}}{\rho} + \cdots\cdots$$

И такъ мы видимъ, что ρ отличается отъ r только величиною втораго порядка относительно возмущеній. Кромѣ того понятно, что

$$\operatorname{tang} PP' = \frac{\delta z_1}{\rho}$$

Слѣдовательно

(250)
$$\operatorname{tang} \eta . \sin (l - \varkappa) = \frac{\delta z_1}{\rho}$$

Разсматривая здѣсь η и $\varkappa$ какъ постоянныя величины, имѣемъ

$$\operatorname{tang} \eta . \cos (l - \varkappa) \frac{dl}{dt} = \frac{\rho \dfrac{d\delta z_1}{dt} - \delta z_1 \dfrac{d\rho}{dt}}{\rho^2}$$

Но такъ какъ

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dv_1}{dt}$$

то можемъ принять

$$\operatorname{tang} \eta \,.\, \cos(l - \varkappa) = \frac{r \frac{d\delta z_1}{dt} - \delta z_1 \frac{dr}{dt}}{r^2 \frac{dv_1}{dt}} \tag{241}$$

Знаменатель этого выраженія вычисляется по формѣ (206$_*$), а $\frac{dr}{dt}$ по формѣ (208), въ которой производная $\frac{dr_1}{dt}$ представляется выраженіемъ (205). И такъ уравненія (240) и (241) совершенно достаточны для опредѣленія η и $l - \varkappa$, а слѣдовательно и $\varkappa$, но какъ скоро $\varkappa$ найдено, то ψ_0 можемъ считать извѣстной, ибо понятно, что $\psi_0 = \varkappa + N$. Такимъ образомъ мы имѣемъ все необходимое для вычисленія i и $\Delta\theta$ по уравненіямъ (239). Остается опредѣлить ω. Если положимъ $KP = u$, то изъ треугольника KPP' имѣемъ

$$\operatorname{tang} u = \operatorname{tang}(l - \varkappa) \sec \eta$$

вмѣсто этого для вычисленія u можемъ пользоваться выраженіемъ

$$u = l - \varkappa + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin 2(l - \varkappa) + \cdots\cdots \tag{242}$$

Кромѣ того такъ какъ $a'K = \psi_0 + \Delta\psi$, то примѣняя къ рѣшенію треугольника $aa'K$ одно изъ уравненій Гаусса, имѣемъ

$$\sin\frac{\Delta\psi}{2}\cos\frac{\eta}{2} = -\cos\frac{i + i_0}{2}\sin\frac{\Delta\theta}{2} \tag{243}$$

ибо $aa' = \Delta\theta$. Какъ скоро $\Delta\psi$ и u вычислены по этимъ уравненіямъ, то не трудно найти ω, въ самомъ дѣлѣ, полагая $a'P = U$, имѣемъ

$$U = u + Ka' = u + \psi_0 + \Delta\psi = u + N + \varkappa + \Delta\psi.$$

Но $U = \omega + v$, откуда слѣдовательно искомое

$$\omega = u + N + \varkappa + \Delta\psi - v \tag{244}$$

Что касается до v, то эта величина считается извѣстною, ибо по уравненіямъ (237) мы можемъ вычислить разность $v_1 - v$. Такимъ образомъ мы видимъ возможность опредѣлить новую систему оскулирующихъ элементовъ.

V.

Возмущенія вращательнаго движенія земли около оси. Механическая теорія прецессіи и нутаціи.

22. Въ сферической астрономіи мы указали па причины измѣняющія положеніе экватора, а слѣдовательно и земной оси относительно эклиптики извѣстнаго времени, принимаемой за постоянную плоскость. Въ этой послѣдней главѣ предлагаемаго астрономическаго трактата намъ предстоитъ привести теоретическія соображенія, на основаніи которыхъ могутъ быть изучаемы упомянутыя перемѣщенія экватора и вычисляемы прецессія равноденственныхъ точекъ и нутація земной оси.

Движеніе твердаго тѣла можетъ слагаться изъ двухъ: изъ поступательнаго движенія этого тѣла и его вращенія около извѣстной точки. Чтобы изслѣдовать вращательное движеніе, можно разсматривать точку, около которой происходитъ вращеніе, какъ неподвижную въ пространствѣ, приложивъ къ каждому элементу тѣла новую ускорительную силу равную и противуположную той, которая дѣйствуетъ на точку принимаемую за центръ вращенія. Если вращеніе происходитъ около центра тяжести, то мы можемъ разсматривать это движеніе какъ происходящее около неподвижной точки, не вводя новыхъ ускорительныхъ силъ. Этотъ случай мы и будемъ имѣть въ виду, изучая возмущенія вращательнаго движенія земли.

Когда тѣло вращается около точки, то внутри его во всякій моментъ существуетъ прямая неподвижная въ тѣлѣ и пространствѣ. Эта прямая называется *мгновенной осью вращенія*. Отъ одного момента до другаго положеніе мгновенной оси измѣняется какъ въ тѣлѣ такъ и въ пространствѣ. Она движется такимъ образомъ, что описываетъ коническую поверхность, неизмѣняемо соединенную съ вращающимся тѣломъ, въ то время какъ ось этой поверхности описываетъ другую коническую поверхность неподвижную въ пространствѣ. Такимъ образомъ первый конусъ безъ скольженія движется по второму и образующая, по которой въ данный моментъ касается первая поверхность ко второй, служитъ мгновенною осью вращенія тѣла для разсматриваемаго момента.

При рѣшеніи вопроса о движеніи земли около ея центра тяжести пары силъ производящія вращеніе, мы будемъ изображать прямыми пропорціональными моментамъ и перпендикулярными къ плоскостямъ этихъ паръ.

Какъ тѣла возмущающія вращательное движеніе земли мы разсмотримъ Солнце и Луну; при этомъ примемъ ихъ за сферы дѣйствующія на землю такъ, какъ бы вся масса каждаго изъ этихъ тѣлъ была сосредоточена въ центрѣ тяжести каждаго изъ нихъ.

Представимъ себѣ прямоугольную систему координатъ, оси которой совпадаютъ съ главными осями инерціи земли относительно ея центра тяжести. Назовемъ чрезъ x', y', z' координаты какой либо точки земли относительно такихъ осей. Массу этой матеріальной точки означимъ чрезъ dm'. Координаты одной изъ притягивающихъ точекъ, возмущающихъ вращательное движеніе земли, отнесенныя къ той же системѣ осей пусть будутъ x, y, z. Разстояніе этой точки отъ начала координатъ, т. е. отъ центра тяжести земли пусть будетъ r. Назовемъ чрезъ r' растояніе возмущающей массы отъ матеріальной точки dm'. Произведеніе массы, возмущающаго вращеніе земли тѣла, на постоянную величину, представляющую собою притяженіе единицы массы на единицѣ разстоянія, пусть будетъ m. Пусть X, Y, Z будутъ составляющія возмущающей силы по осямъ координатъ. Предполагая, что эта сила дѣйствуетъ по закону Ньютона, очевидно будемъ имѣть

$$X = m\int\frac{x-x'}{r'^3}\,dm'; \qquad Y = m\int\frac{y-y'}{r'^3}\,dm'; \qquad Z = m\int\frac{z-z'}{r'^3}\,dm'$$

гдѣ интегралы распространяются на весь объемъ земли и такъ какъ $dm' = \rho . dx' . dy' . dz'$, то эти интегралы суть тройные и берутся относительно координатъ x', y', z'. Подъ ρ мы разумѣемъ плотность земли, или точнѣе, плотность въ той точкѣ, координаты которой суть x', y', z'.

Принимая центръ тяжести земли за неподвижную точку, мы должны вмѣсто этихъ составляющихъ силъ разсматривать пары отъ нихъ происходящія. Если назовемъ чрезъ L, M, N моменты этихъ паръ, производящихъ вращенія около осей координатъ, то извѣстно, что

$$L = y . Z - z . Y; \qquad M = z . X - x . Z; \qquad N = x . Y - y . X$$

или внося сюда вмѣсто X, Y, Z ихъ величины, получимъ

$$L = mz\int\frac{y'}{r'^3}\,dm' - my\int\frac{z'}{r'^3}\,dm'$$

$$M = mx\int\frac{z'}{r'^3}\,dm' - mz\int\frac{x'}{r'^3}\,dm'$$

$$N = my\int\frac{x'}{r'^3}\,dm' - mx\int\frac{y'}{r'^3}\,dm'$$

но

$$r'^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

и такъ какъ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то легко видѣть, что

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3}\left[1 - \frac{2}{r^2}(xx' + yy' + zz') + \frac{1}{r^2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)\right]^{-\frac{3}{2}}$$

отношенія $\frac{x'}{r}$, $\frac{y'}{r}$, $\frac{z'}{r}$ суть всегда малыя величины, тогда какъ $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ могутъ быть близки къ единицѣ, а потому ограничиваясь первыми степенями упомянутыхъ малыхъ дробей, будемъ имѣть

$$\frac{1}{r'^3}=\frac{1}{r^3}\left[1+\frac{3}{r^2}(xx'+yy'+zz')\right]$$

Преобразуемъ посредствомъ этого одинъ изъ предыдущихъ моментовъ. Внося напр. это въ выраженіе L, получимъ

$$L=\frac{m}{r^3}\left[z\int y'dm'-y\int z'dm'\right]+\frac{3m}{r^5}\left[z^2\int y'z'dm'-y^2\int y'z'dm'\right]$$
$$+\frac{3m}{r^5}\left[xz\int x'y'.dm'-xy\int x'z'.dm'+yz\int y'^2.dm'-yz\int z'^2.dm'\right]$$

Но такъ какъ мы приняли за начало координатъ центръ тяжести земли, то по свойству центра тяжести

$$\int x'.dm'=0;\qquad \int y'.dm'=0;\qquad \int z'.dm'=0$$

За оси координатъ мы приняли главныя оси инерціи, а по свойству этихъ осей

$$\int x'y'.dm'=0;\qquad \int x'z'.dm'=0;\qquad \int y'z'.dm'=0$$

Слѣдовательно

$$L=3m\frac{yz}{r^5}\int(y'^2-z'^2)\,dm'$$

Если назовемъ чрезъ A, B, C три главные момента инерціи земнаго сфероида относительно осей x, y, z, то, какъ извѣстно изъ механики

$$A=\int(y'^2+z'^2).dm';\qquad B=\int(x'^2+z'^2).dm';\qquad C=\int(y'^2+x'^2).dm'$$

Изъ этихъ выраженій легко выводимъ

$$\int x'^2.dm'=\frac{B+C-A}{2};\quad \int y'^2.dm'=\frac{A+C-B}{2};\quad \int z'^2.dm'=\frac{A+B-C}{2}$$

а потому предыдущее выраженіе момента пары L приводится къ виду

$$L=\frac{3m}{r^5}(C-B)\,yz$$

Совершенно подобнымъ же образомъ находимъ

$$M=\frac{3m}{r^5}(A-C)\,x.z;\qquad N=\frac{3m}{r^5}(B-A)\,x.y$$

Такъ какъ астрономическія широты мѣстъ земной поверхности, выводимыя изъ наблюденій, оказываются совершенно постоянными величинами, то отсюда заключаемъ, что вращеніе земнаго сфероида происходитъ около оси совершенно неподвижной внутри этого тѣла, или, что все равно, относительно точекъ земной поверхности. Градусныя

измѣренія производимыя на поверхности земли приводитъ насъ къ заключенію, что фигура земли мало отлична отъ фигуры сферы и эксцентриситетъ земнаго меридіана весьма не великъ, наконецъ предположеніе, что элементы массы земнаго сфероида, расположенные на одинаковомъ разстояніи отъ центра земли, имѣютъ одинакую плотность, весьма вѣроятно. Принимая все это во вниманіе, можемъ заключить, что главные моменты инерціи земли мало отличны по величинѣ одинъ отъ другаго, а слѣдовательно ихъ разности равно какъ и моменты L, M, N имѣютъ малую величину. Но если бы при неподвижности оси земнаго сфероида внутри этого тѣла, моменты L, M, N въ точности были равны нулю, тогда ось вращенія была бы главною осью инерціи; при незначительныхъ же величинахъ моментовъ L, M, N мы съ большимъ приближеніемъ къ истинѣ можемъ допустить, что вращеніе земли происходитъ около главной оси инерціи.

Земля ограничена поверхностью вращенія и если допустимъ, что существуетъ упомянутое выше распредѣленіе массъ, то должны принять, что моменты относительно двухъ главныхъ осей инерціи, расположенныхъ въ плоскости экватора, между собою равны. Мы примемъ плоскость экватора за плоскость xy, а поэтому $A = B$. Земной сфероидъ сжатъ у полюсовъ и расширенъ подъ экваторомъ и меньшая ось эллипсоида есть ось вращенія, поэтому $C > A$. Обращая на это вниманіе, заключаемъ, что

$$L = \frac{3m}{r^5}(C - A)\, y . z; \qquad M = -\frac{3m}{r^5}(C - A)\, x . z; \qquad N = 0 \qquad (245)$$

Мы приняли плоскость экватора за плоскость xy. Проведемъ ось x черезъ точку весенняго равноденствія. Такъ какъ земля есть тѣло вращенія, то оси x и y расположенныя въ плоскости экватора и перпендикулярныя между собой будутъ главными осями инерціи.

Пары представленныя моментами L и M, дѣйствуя въ теченіи безконечно малаго времени dt, сообщаютъ землѣ двѣ безконечно малыя угловыя скорости около осей x и y. Происходящія отъ этого количества движенія представятся произведеніями $L.dt$ и $M.dt$. И такъ количества движенія, которыя имѣетъ земля въ концѣ момента dt, разсматриваемыя какъ силы и перенесенныя въ начало координатъ произведутъ три пары вращающія систему около осей x, y, z. Двѣ первыя изъ этихъ паръ имѣютъ моменты $L.dt$ и $M.dt$, третья есть пара тѣхъ количествъ движенія, которыя имѣетъ земля въ началѣ разсматриваемаго момента. Если означимъ чрезъ G моментъ этой третей пары и назовемъ чрезъ ρ угловую скорость земли около ея оси вращенія, то какъ извѣстно изъ механики

$$\rho = \frac{G}{C}$$

Три пары, о которыхъ мы теперь говоримъ, слагаются въ одну. Если представимъ моментъ каждой пары прямою отложенною по оси пары и пропорціональною этому моменту, то составная пара, о которой мы теперь говоримъ, представится по величинѣ и направленію діагональю прямоугольнаго паралепипеда построеннаго на линіяхъ $L.dt$ $M.dt$ и G отложенныхъ по осямъ x, y, z. Два первыя ребра этого паралепипеда, т. е. $L.dt$ и $M.dt$ безконечно малы въ сравненіи съ третьимъ, а потому діагональ паралепипеда будетъ составлять безконечно малый уголъ съ третьимъ ребромъ и мало

будетъ отличаться отъ него по длинѣ. Направленіемъ этой діагонали опредѣлится направленіе оси вращенія земли въ концѣ момента dt. Притяженіе Солнца и Луны, оказываемое этими свѣтилами на земной сфероидъ, измѣняетъ слѣдовательно въ каждый моментъ положеніе въ пространствѣ оси вращенія земли, не измѣняя при этомъ скорости вращенія около этой оси.

Мы разсмотримъ перемѣщеніе оси производимое каждой возмущающей силой отдѣльно. Алгебраическую сумму этихъ перемѣщеній будемъ считать за перемѣщеніе производимое совмѣстнымъ дѣйствіемъ всѣхъ возмущающихъ силъ.

23. Разсмотримъ сначала возмущающее дѣйствіе солнца на земной сфероидъ. Назовемъ чрезъ a большую полуось земной орбиты, чрезъ e ея эксцентриситетъ, чрезъ n среднее суточное движеніе земли по орбитѣ, или суточное измѣненіе средней долготы солнца, чрезъ l геоцентрическую долготу солнца, чрезъ μ массу земли выраженную въ единицахъ массы солнца и замѣтимъ, что

$$\frac{\sqrt{m(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}=n \tag{246}$$

гдѣ $m(1+\mu)=k^2M\left(1+\frac{m_0}{M}\right)$, если подъ k^2 разумѣемъ Гауссову постоянную величину, подъ M массу солнца и подъ m_0 массу земли; пусть наконецъ ω будетъ долгота перигелія земной орбиты, тогда

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos(l-\omega)};\qquad r^2\frac{dl}{dt}=na^2\sqrt{1-e^2}$$

откуда легко находимъ

$$\frac{m}{r^3}=\frac{m[1+e.\cos(l-\omega)]^3}{a^3(1-e^2)^3};\qquad dt=\frac{r^2.dl}{na^2.\sqrt{1-e^2}}$$

Принимая во вниманіе выраженіе (246), изъ этихъ двухъ составляемъ

$$\frac{m}{r^3}dt=\frac{n[1+e.\cos(l-\omega)]}{(1+\mu)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}dl$$

Посредствомъ этого уравненія и уравненій (245) составляемъ

$$\begin{aligned} L.dt &= \frac{3n(C-A)}{(1+\mu)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{yz}{r^2}[1+e.\cos(l-\omega)]\,dl \\ M.dt &= -\frac{3n(C-A)}{(1+\mu)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{xz}{r^2}[1+e.\cos(l-\omega)]\,dl \end{aligned} \tag{247}$$

Въ этихъ выраженіяхъ x, y, z суть координаты центра возмущающаго свѣтила, т. е. солнца и r разстояніе земли отъ солнца. Означимъ чрезъ ϵ наклоненіе эклиптики къ экватору, тогда подобно уравненіямъ (134), ч. 4 будемъ имѣть для упомянутаго выше расположенія осей координатъ

$$x = r \,.\, \cos l$$
$$y = r \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \sin l$$
$$z = r \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \sin l$$

Посредствомъ этого легко составляемъ

$$\frac{yz}{r^2} = \frac{\sin \varepsilon \ \cos \varepsilon}{2} (1 - \cos 2l); \quad \frac{xz}{r^2} = \frac{\sin \varepsilon}{2} \sin 2l \tag{248}$$

Имѣя это, разсмотримъ дѣйствіе пары G сначала совмѣстно съ дѣйствіемъ возмущающей пары L. Предположимъ, что разсматриваемая система осей координатъ пересѣкается со сферой, описанной произвольнымъ радіусомъ около центра O земли (фиг. 12) въ точкахъ x, y, z. Пусть плоскость экватора, соотвѣтствующая времени t, пересѣкается съ той же сферой по большому кругу xQy. Пересѣченіе эклиптики съ той же сферой пусть представляется дугою fxE большаго круга. Отложимъ на оси z линію $oa = G$ и на оси x линію $ob = L.dt$; построивъ на линіяхъ ao и ob параллелограммъ, діагональю его co опредѣлимъ положеніе земной оси въ концѣ времени $t + dt$. Такимъ образомъ отъ дѣйствія возмущающей пары L ось земли изъ положенія ao переходитъ въ положеніе co, составляющее съ первымъ элементарный уголъ $Coa = dv$. Отъ такаго перемѣщенія оси, экваторъ, не измѣнивъ своего наклоненія къ эклиптикѣ (ибо уголъ Eoy не измѣнился и линія oy сохраняетъ свое положеніе), приметъ положеніе $fdQ'y$. Отъ этого перемѣщенія линія пересѣченія экватора съ эклиптикой приметъ положеніе of и такимъ образомъ отклонится отъ первоначальнаго положенія на элементарный уголъ $xof = d\psi$. Что касается до угла xod, то онъ равенъ dv. И такъ въ элементарномъ треугольникѣ fxd, прямоугольномъ при d, части суть: $fx = d\psi$, $xd = dv$; уголъ $xfd = \varepsilon$. Изъ этого треугольника имѣемъ

$$dv = d\psi \,.\, \sin \varepsilon$$

Но изъ треугольника CaO, въ которомъ $Ca = L.dt$, находимъ

$$L.dt = G \,.\, \mathrm{tang}\,(dv)$$

вмѣсто этого можемъ принять

$$dv = \frac{L.dt}{G}$$

Слѣдовательно

$$d\psi = \frac{L.dt}{G.\sin \varepsilon} = \frac{L.dt}{\rho C.\sin \varepsilon}$$

Внося сюда вмѣсто $L.dt$ его величину изъ выраженія (247), а вмѣсто yz—изъ выраженія (248), получимъ

$$d\psi = H \,.\, \cos \varepsilon \,(1 - \cos 2l)\,[1 + e \,.\, \cos (l - \omega)]\, dl$$

гдѣ для краткости положено

$$H = \frac{3}{2\,(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}\,(1 + \mu)} \cdot \frac{n}{\rho} \cdot \frac{C - A}{C}$$

примемъ за эпоху, отъ которой считается время, весеннее равноденствіе извѣстнаго года. Пусть ψ будетъ тотъ уголъ, на который равноденственная линія отступила по эклиптикѣ въ теченіи промежутка времени, протекшаго отъ эпохи до разсматриваемаго момента. Этотъ уголъ мы получимъ, интегрируя предыдущее дифференціальное уравненіе. Хотя ε есть перемѣнная величина, но, какъ показываютъ наблюденія *), ея измѣненія столь медленны, что при этомъ интегрированіи мы можемъ считать ее за постоянную, или, по крайней мѣрѣ, совершенно удовлетворительно поставить вмѣсто ε среднее изъ тѣхъ значеній, которыя имѣютъ эта величина въ теченіи разсматриваемаго промежутка времени. Означимъ эту среднюю величину чрезъ ε'. Извѣстно, что эксцентриситетъ земной орбиты весьма малъ, а потому безъ чувствительной погрѣшности можно пренебречь періодическимъ членомъ, содержащимъ множителя e; при такихъ допущеніяхъ предыдущее дифференціальное уравненіе по интегрированіи дастъ

$$\psi = H \,.\, \cos \varepsilon' \left[l - \frac{\sin 2l}{2} \right]$$

Выраженію (A), ч. 4 стр. 191, при сдѣланныхъ означеніяхъ можно дать видъ

$$l = nt + F(L)$$

гдѣ подъ $F(L)$ разумѣемъ сумму періодическихъ членовъ зависящихъ отъ средней долготы. Принимая это во вниманіе, приведемъ предыдущее выраженіе къ виду

$$\psi = nt \,.\, H \,.\, \cos \varepsilon' + H \,.\, F(L) \cos \varepsilon' - \frac{H}{2} \cos \varepsilon' \,.\, \sin 2l$$

но второй членъ малъ и, отвергая его, можемъ считать

(249) $$\psi = nt \,.\, H \,.\, \cos \varepsilon' - \frac{H}{2} \cos \varepsilon' \,.\, \sin 2l$$

Этотъ уголъ ψ называется *солнечной прецессіей* и, какъ видимъ, онъ состоитъ главнымъ образомъ изъ двухъ частей: одна меньшая есть періодическая и періодъ измѣненія ея обнимаетъ собою, какъ видно, шесть мѣсяцевъ, другая болѣе значительная часть измѣняется пропорціонально времени и называется *средней солнечной прецессіей.*

Разсмотримъ теперь дѣйствіе пары M, имѣя въ виду возмущенія производимыя только Солнцемъ. Отложимъ по оси y длину $ho = M \,.\, dt$ и построимъ на этой линіи ho (фиг. 12) и на линіи $Oa = G$ параллелограммъ, діагональю его опредѣлимъ направленіе оси ok составной пары. Съ этой линіей ok совпадала бы въ концѣ времени $t + dt$ земная ось, если бы дѣйствовала одна только изъ возмущающихъ паръ, именно M. Такимъ образомъ мы видимъ, что отъ дѣйствія этой возмущающей пары ось земли вращается около оси x на уголъ $aok = d\varepsilon$ и чрезъ это очевидно измѣняется наклоненіе эклиптики къ экватору, равноденственная же линія, около которой какъ оси происходитъ вращеніе земной оси, отъ дѣйствія этой пары M не измѣняетъ своего положенія.

Изъ треугольника ako, въ которомъ $ak = M \,.\, dt$ и уголъ $aok = d\varepsilon$ имѣемъ

$$M \,.\, dt = G \,.\, \operatorname{tang} (d\varepsilon)$$

*) См. ч. III, nº 25, стр. 447.

или

$$d\varepsilon = \frac{M \, . \, dt}{G}$$

что посредствомъ выраженій (247) и (248) приводится къ виду

$$d\varepsilon = - H \, . \sin \varepsilon \, . \sin 2l \, [1 + e \, . \cos (l - \omega)] \, dl$$

при тѣхъ же ограниченіяхъ какъ выше отсюда получаемъ

$$\varepsilon = \varepsilon' + \frac{H}{2} \sin \varepsilon \, . \cos 2l \tag{250}$$

гдѣ ε' должно быть разсматриваемо какъ постоянная величина введенная интегрированіемъ. Получающаяся отсюда разность $\varepsilon - \varepsilon'$ называется солнечной нутаціей земной оси и, какъ видно, есть періодическая функція долготы Солнца съ періодомъ шести мѣсяцевъ.

24. Разсмотримъ теперь возмущенія производимыя во вращательномъ движеніи земли парами L и M и обусловливающіяся дѣйствіемъ Луны на земной сфероидъ. Если отмѣтимъ значками поставленными внизу буквъ величины относящіяся къ Лунѣ и ея движенію, то примѣняя выраженія (247) къ вычисленію дѣйствія Луны, будемъ имѣть

$$\begin{aligned} L_1 \, . \, dt &= \frac{3n_1 \, (C - A)}{(1 + \mu_1)(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{y_1 z_1}{r_1^2} [1 + e_1 \, . \cos (l_1 - \omega_1)] \, dl_1 \\ M_1 \, . \, dt &= - \frac{3n_1 \, (C - A)}{(1 + \mu_1)(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{x_1 z_1}{r_1^2} [1 + e_1 \, . \cos (l_1 - \omega_1)] \, dl_1 \end{aligned} \tag{251}$$

гдѣ μ_1 есть отношеніе массы земли къ массѣ Луны, r_1 разстояніе луны отъ начала координатъ; x_1, y_1, z_1 суть координаты Луны, отнесенныя къ принятой системѣ осей координатъ. Для вычисленія этихъ координатъ назовемъ чрезъ i наклоненіе лунной орбиты къ эклиптикѣ, чрезъ θ долготу восходящаго узла лунной орбиты на эклиптикѣ, чрезъ l_1 долготу луны въ орбитѣ, тогда аргументъ широты луны будетъ очевидно $l_1 - \theta$. Представимъ себѣ систему осей координатъ, начало которыхъ находится въ центрѣ земли, ось x направлена по линіи пересѣченія эклиптики съ экваторомъ, за плоскость xy этой системы примемъ плоскость эклиптики и ось z направимъ въ полюсъ эклиптики. Назовемъ координаты Луны отнесенныя къ такой системѣ осей чрезъ x_1', y_1', z_1', тогда, какъ показываютъ уравненія (135), ч. 4

$$\begin{aligned} x_1' &= r_1 \, [\cos \theta \, . \cos (l_1 - \theta) - \sin \theta \, . \sin (l_1 - \theta) \cos i] \\ y_1' &= r_1 \, [\sin \theta \, . \cos (l_1 - \theta) + \cos \theta \, . \sin (l_1 - \theta) \cos i] \\ z_1' &= r_1 \sin i \, . \sin (l_1 - \theta) \end{aligned}$$

Замѣнимъ здѣсь $\cos i$ чрезъ $1 - 2 \sin^2 \left(\frac{i}{2}\right)$; замѣтимъ кромѣ того, что выраженія $L_1 \, . \, dt$ и $M_1 \, . \, dt$ имѣютъ малаго множителя

$$\frac{1}{1 + \mu_1} \cdot \frac{n_1}{\rho} \cdot \frac{C - A}{C}$$

и что наклоненіе i не превышаетъ $5^0\ 9'$, а потому синусъ этой дуги можно считать за самую дугу и тогда $\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{i^2}{4}$. Слѣдовательно

$$x_1'=r_1\left[\cos l_1+\frac{i^2}{2}\sin\theta\,.\sin(l_1-\theta)\right]$$

$$y_1'=r_1\left[\sin l_1-\frac{i^2}{2}\cos\theta\,.\sin(l_1-\theta)\right]$$

$$z_1'=r_1\,.\,i\,.\sin(l_1-\theta)$$

Преобразуемъ эти координаты въ другія отнесенныя къ первоначальной системѣ осей, имѣющей основною плоскостію экваторъ. Мы означили координаты Луны отнесенныя къ этой системѣ чрезъ x_1, y_1, z_1, а потому

$$x_1=x_1'$$

$$y_1=y_1'.\cos\varepsilon-z_1'\sin\varepsilon$$

$$z_1=y_1'.\sin\varepsilon+z_1'\cos\varepsilon$$

Слѣдовательно

$$x_1=r_1\left[\cos l_1+\frac{i^2}{2}\sin\theta\,.\sin(l_1-\theta)\right]$$

$$y_1=r_1\left[\sin l_1\cos\varepsilon-\frac{i^2}{2}\cos\theta\,.\cos\varepsilon\,.\sin(l_1-\theta)-i\,.\sin\varepsilon\,.\sin(l_1-\theta)\right]$$

$$z_1=r_1\left[\sin l_1\sin\varepsilon-\frac{i^2}{2}\cos\theta\,.\sin\varepsilon\,.\sin(l_1-\theta)+i\,.\cos\varepsilon\,.\sin(l_1-\theta)\right]$$

Посредствомъ этого, ограничиваясь вторыми степенями i, легко составляемъ

$$\frac{y_1z_1}{r_1^2}=\sin^2 l_1\frac{\sin 2\varepsilon}{2}+i.\sin l_1\,.\sin(l_1-\theta)\left[\cos 2\varepsilon-\frac{i}{2}\sin 2\varepsilon\,.\cos\theta\right]$$
$$-\frac{i^2}{2}\sin 2\varepsilon\,.\sin^2(l_1-\theta)$$

$$\frac{x_1z_1}{r_1^2}=\sin\varepsilon\frac{\sin 2l_1}{2}+i\,.\sin(l_1-\theta)\left[\cos\varepsilon\,.\cos l_1-\frac{i}{2}\sin\varepsilon\,.\cos(l_1+\theta)\right]$$

Прецессія, производимая дѣйствіемъ Луны, должна быть найдена интегрированіемъ выраженія

$$d\psi=\frac{L_1\,.\,dt}{G\,.\sin\varepsilon}$$

которое по первому изъ выраженій (251) принимаетъ видъ

$$d\psi=\frac{2H_1}{1+\mu_1}\,\frac{y_1z_1}{r_1^2.\sin\varepsilon}\left[1+e_1\cos(l_1-\omega_1)\right]dl_1$$

гдѣ

$$H_1=\frac{3}{2\,(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{n_1}{\rho}\cdot\frac{C-A}{C}$$

отвергая періодическіе члены умноженные на малый эксцентриситетъ лунной орбиты и внося вмѣсто $\frac{y_1 z_1}{r_1^2}$ его предыдущую величину, получимъ

$$d\psi = \frac{2H_1}{1+\mu_1}\Big[\cos\varepsilon\,.\sin^2 l_1 + i\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sin l_1 \sin(l_1-\theta)$$

$$-i^2.\cos\varepsilon\,.\cos\theta\,.\sin l_1\,.\sin(l_1-\theta) - i^2.\cos\varepsilon\,.\sin^2(l_1-\theta)\Big]\,dl_1$$

при интегрированіи этого выраженія мы будемъ принимать за постоянныя ε и i. Чтобы упростить предыдущее выраженіе замѣтимъ еще слѣдующее. Во второй части предыдущаго выраженія входятъ двѣ перемѣнныя величины l_1 и θ. Мы примемъ

$$l_1 = n_1 t + \text{пост.} + F(L_1),$$

или пренебрегая періодическими членами содержащими въ коэффиціентахъ степени эксцентриситета лунной орбиты, прямо положимъ $l_1 = n_1 t$, гдѣ подъ n_1 разумѣемъ среднее суточное движеніе Луны. Что касается до θ, то долгота узла лунной орбиты уменьшается почти пропорціонально времени и отъ этого уменьшенія узелъ проходитъ по эклиптикѣ полную окружность въ 6788,5 дней; слѣдовательно можно считать, что $\theta = \theta_0 - \alpha t$, гдѣ θ_0 есть долгота узла лунной орбиты для опредѣленной эпохи и α среднее движеніе узла лунной орбиты по эклиптикѣ. Такимъ образомъ

$$n_1 = \frac{2\pi}{27{,}32}; \qquad \alpha = \frac{2\pi}{6788{,}5}$$

Слѣдовательно α значительно менѣе n_1. Принимая это во вниманіе, мы отвергнемъ періодическіе члены зависящіе отъ l_1 и умноженные на i, ибо эти члены по интегрированіи пріобрѣтутъ дѣлителя n_1, который значительно болѣе дѣлителя α, пріобрѣтаемаго по интегрированіи періодическими членами зависящими отъ θ. Первый членъ представимъ въ видѣ

$$\cos\varepsilon\,.\sin^2 l_1 = \frac{\cos\varepsilon}{2}(1-\cos 2l_1)$$

второй членъ приводится къ виду

$$i\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sin l_1 \sin(l_1-\theta) = i\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\Big[\sin^2 l_1\cos\theta - \sin\theta\sin l_1\cos l_1\Big]$$

$$i\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sin l_1 \sin(l_1-\theta) = i\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\Big[\frac{\cos\theta}{2}(1-\cos 2l_1) - \frac{\sin\theta}{2}\sin 2l_1\Big]$$

Отвергая здѣсь періодическіе члены зависящіе отъ l_1, примемъ

$$i\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sin l_1 \sin(l_1-\theta) = \frac{i}{2}\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\cos\theta$$

Третій и четвертый членъ представляются въ видѣ

$$-i^2.\cos\varepsilon.\cos^2\theta.\sin^2 l_1 + i^2.\cos\varepsilon.\cos\theta.\sin\theta.\sin l_1\cos l_1 - \frac{i^2}{2}\cos\varepsilon\,[1-\cos 2(l_1-\theta)]$$

или

$$-\frac{i^2}{2}\cos\varepsilon.\cos^2\theta(1-\cos 2l_1) + i^2.\cos\varepsilon.\cos\theta.\sin\theta.\sin l_1\cos l_1 - \frac{i^2}{2}\cos\varepsilon[1-\cos 2(l_1-\theta)]$$

отвергая періодическіе члены зависящіе отъ l_1, приводимъ это къ виду

$$-\frac{i^2}{2}\cos\varepsilon\,(1+\cos^2\theta)$$

или

$$-\frac{i^2}{4}\cos\varepsilon\,(3+\cos 2\theta)$$

и такъ

$$(252)\qquad d\psi=\frac{H_1}{1+\mu_1}\left[\cos\varepsilon-\cos\varepsilon.\cos 2l_1+i\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\cos\theta-\frac{i^2}{2}\cos\varepsilon\,(3+\cos 2\theta)\right]dl_1$$

помня, что $l_1=n_1t+$ пост.; $\theta=\theta_0-\alpha t$, интегрируемъ предыдущее выраженіе и находимъ

$$(253)\qquad \psi=\frac{H_1}{1+\mu_1}\left[\left(1-\frac{3}{2}i^2\right)n_1t.\cos\varepsilon-\frac{\cos\varepsilon}{2}\sin 2l_1-i\frac{n_1}{\alpha}\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sin\theta+\frac{i^2}{4}\frac{n_1}{\alpha}\cos\varepsilon.\sin 2\theta\right]$$

Эта величина и представляетъ собою лунную прецессію. Первый членъ ея, возрастающій пропорціонально времени, есть средняя лунная прецессія.

Опредѣлимъ наконецъ часть вліянія возмущающей пары M_1 зависящую отъ дѣйствія Луны на земной сфероидъ. Мы знаемъ, что

$$d\varepsilon=\frac{M_1\,.\,dt}{G}$$

посредствомъ втораго изъ выраженій (251) приводимъ это къ виду

$$d\varepsilon=\frac{-3n_1\,(C-A)}{(1+\mu_1)\,C.\rho\,(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{x_1z_1}{r_1^2}\left[1+e_1\cos(l_1-\omega_1)\right]dl_1$$

Отвергая здѣсь періодическіе члены, зависящіе отъ множителя e_1, приводимъ это къ виду

$$d\varepsilon=-\frac{2H_1}{1+\mu_1}\frac{x_1z_1}{r_1^2}\,dl_1$$

гдѣ H_1 имѣетъ тоже значеніе какъ прежде. Внося сюда вмѣсто $\frac{x_1z_1}{r_1^2}$ выше найденное выраженіе этой функціи, имѣемъ

$$d\varepsilon=-\frac{2H_1}{1+\mu_1}\left[\frac{\sin\varepsilon}{2}\sin 2l_1+i.\cos\varepsilon.\cos l_1\sin(l_1-\theta)-\frac{i^2}{2}\sin\varepsilon.\sin(l_1-\theta)\cos(l_1+\theta)\right]dl_1$$

Второй членъ легко приводится къ виду

$$\frac{i}{2}\cos\varepsilon.\cos\theta.\sin 2l_1-\frac{i}{2}\cos\varepsilon.\sin\theta\,[1+\cos 2l_1]$$

отвергая періодическіе члены, зависящіе отъ l_1, отсюда находимъ

$$-\frac{i}{2}\cos\varepsilon.\sin\theta$$

Послѣдній членъ выраженія $d\varepsilon$ преобразовывается въ форму

$$-\frac{i^2}{4}\sin\varepsilon\,[\sin 2l_1 - \sin 2\theta]$$

Что при тѣхъ же условіяхъ приводится къ виду

$$\frac{i^2}{4}\sin\varepsilon\,.\,\sin 2\theta$$

И такъ

$$d\varepsilon = -\frac{H_1}{1+\mu_1}\left[\sin\varepsilon\,.\,\sin 2l_1 - i\cos\varepsilon\,.\,\sin\theta + \frac{i^2}{2}\sin\varepsilon\,.\,\sin 2\theta\right]dl_1 \qquad (254)$$

Интегрируя это, получимъ

$$\varepsilon = \varepsilon' + \frac{H_1}{1+\mu_1}\left[\frac{\sin\varepsilon}{2}\cos 2l_1 + i\frac{n_1}{\alpha}\cos\varepsilon\,.\,\cos\theta - \frac{i^2}{4}\frac{n_1}{\alpha}\sin\varepsilon'\,.\cos 2\theta\right] \qquad (255)$$

Разность $\varepsilon - \varepsilon'$ представляютъ собою лунную нутацію земной оси. Наиболѣе значительный членъ этой разности зависитъ отъ множителя $\cos\theta$.

25. Представляя прецессію суммою выраженій (249) и (253), и считая за величину нутаціи сумму разностей $\varepsilon - \varepsilon'$ данныхъ выраженіями (250) и (255), мы получимъ выраженія, которыя представятъ движеніе земной оси съ достаточною точностію только для небольшаго числа лѣтъ; если же хотимъ имѣть аналитическія выраженія, посредствомъ которыхъ опредѣлялось бы движеніе земной оси въ теченіи значительнаго промежутка времени, напр. въ продолженіи нѣсколькихъ столѣтій, то при выводѣ этихъ аналитическихъ выраженій мы должны будемъ обратить вниманіе на измѣненія положенія эклиптики, которыя производятся возмущающимъ дѣйствіемъ планетъ, составляющихъ солнечную систему.

Имѣя въ виду вычислить поправки найденныхъ выраженій прецессіи и нутаціи, зависящія отъ движенія эклиптики, мы примемъ за основную плоскость эклиптику опредѣленнаго момента. Эту эклиптику мы будемъ называть *неподвижной;* тогда ψ будетъ представлять собою уголъ, на который перемѣстилась по неподвижной эклиптикѣ равноденственная линія въ промежутокъ времени протекшій отъ эпохи. Подъ ε мы будемъ разумѣть уголъ между экваторомъ и неподвижной эклиптикой. Назовемъ чрезъ γ наклоненіе истинной эклиптики къ неподвижной и чрезъ β долготу узла подвижной эклиптики на неподвижной, другими словами, β будетъ уголъ, заключающійся между линіями пересѣченія экватора съ неподвижной эклиптикой и подвижной эклиптики съ эклиптикой неподвижной.

Найдемъ тѣ поправки, которыя должно ввести въ выраженія прецессіи и нутаціи и которыя обусловливаются дѣйствіемъ планетъ. Движеніе земли около солнца по подвижной эклиптикѣ совершенно подобно движенію Луны около земли. Принимая эклиптику извѣстнаго момента за постоянную плоскость, мы можемъ разсматривать подвижную эклиптику какъ нѣкоторую орбиту, наклоненную къ постоянной плоскости подъ угломъ γ. Слѣдовательно части прецессіи и нутаціи, обусловливающіяся подвижностію эклиптики, можно представить формами (253) и (255), если только поставимъ въ этихъ послѣднихъ γ на мѣсто i и замѣнимъ θ чрезъ β, кромѣ того въ этихъ формахъ величины, относящіяся къ Лунѣ, слѣдуетъ замѣнить величинами относящимися къ Солнцу. Замѣтимъ еще, что въ упомянутыхъ выраженіяхъ для

рѣшенія разсматриваемаго теперь вопроса члены, независящіе отъ γ, должны быть опущены, ибо они уже получены въ томъ предположеніи, что эклиптика неподвижна. Наконецъ по малости γ безъ чувствительной погрѣшности можно опустить члены умноженные на γ^2. И такъ по выраженіямъ (252) и (254) заключаемъ, что разсматриваемыя поправки прецессіи и нутаціи имѣютъ видъ:

$$\frac{H.n}{1+\mu}\frac{\cos 2\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}\int\gamma.\cos\beta.dt; \qquad \frac{H.n}{1+\mu}\cos\varepsilon'\int\gamma.\sin\beta.dt$$

ибо мы принимаемъ теперь $l = nt +$ пост. По малости μ, дѣлитель $1+\mu$ можетъ быть опущенъ. По уравненіямъ (135) и (139)

$$\sin i.\cos\theta = B.\cos(kt+\delta); \qquad \sin i.\sin\theta = B.\sin(kt+\delta)$$

что при сдѣланныхъ теперь означеніяхъ представимъ въ видѣ

$$\gamma.\cos\beta = g.\cos(kt+\delta); \qquad \gamma.\sin\beta = g.\sin(kt+\delta) \text{ *)}$$

Въ выраженіяхъ (139) долгота узла считается отъ подвижной равноденственной точки, если же хотимъ считать ее отъ равноденственной точки эпохи, то въ предыдущихъ выраженіяхъ должны уменьшить уголъ β на ψ и взять сумму подобныхъ выраженій, въ которой отдѣльныя слагаемыя относятся къ отдѣльнымъ планетамъ солнечной системы. И такъ

$$\gamma.\cos(\beta-\psi) = \sum g.\cos(kt+\delta); \qquad \gamma.\sin(\beta-\psi) = \sum g.\sin(kt+\delta)$$

откуда легко выводимъ

(256) $$\gamma.\cos\beta = \sum g.\cos(kt+\psi+\delta); \quad \gamma.\sin\beta = \sum g.\sin(kt+\psi+\delta)$$

Такимъ образомъ поправки солнечной прецессіи и нутаціи, обусловливающіяся подвижностію эклиптики, будутъ имѣть видъ

(257) $$\begin{aligned} &Hn\frac{\cos 2\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}\sum\frac{g}{k+50''.3}\sin[(k+50''.3)\,t+\delta] \\ &-Hn\cos\varepsilon'\sum\frac{g}{k+50''.3}\cos[(k+50''.3)\,t+\delta] \end{aligned}$$

гдѣ мы принимаемъ прямо $\psi = 50''.3$ и за единицу, въ которой выражено t, считаемъ годъ.

Посмотримъ какой видъ имѣютъ поправки лунной прецессіи и нутаціи обусловливающіяся перемѣщеніемъ эклиптики. Пусть i' будетъ наклоненіе лунной орбиты къ истинной эклиптикѣ и θ' долгота узла лунной орбиты на истинной эклиптикѣ. Въ выраженіи лунной прецессіи и нутаціи измѣнятся только тѣ члены, которые зависятъ отъ i и θ. Эти измѣненія будутъ весьма незначительны въ членахъ зависящихъ отъ квадрата i и потому въ этихъ членахъ для нашей цѣли достаточно поставить i' и θ' на мѣсто i и θ. Болѣе сложнымъ измѣненіямъ подвергнутся члены, зависящіе отъ пер-

*) Мы замѣнили B чрезъ g, чтобы не смѣшивать эту постоянную съ величиной, означенной въ этой главѣ чрезъ B.

вой степени i. Эти члены, какъ видно изъ выраженій (252) и (254), происходятъ отъ интегрированія выраженій

$$\frac{H_1}{1+\mu_1}\, i\, \frac{\cos 2\varepsilon'}{\sin \varepsilon'} \cos \theta\, .\, dl_1 \quad \text{и} \quad \frac{H_1}{1+\mu_1}\, i \cos \varepsilon' . \sin \theta\, .\, dl_1$$

прежде интегрированія въ этихъ членахъ произведенія $i \cos \theta$ и $i \sin \theta$ должны быть замѣнены функціями i', θ', γ и β. Пусть ET (фиг. 13) представляютъ собою неподвижную эклиптику. Пусть $E'T'$ будетъ истинная эклиптика и LL' лунная орбита. Въ треугольникѣ abc противъ сторонъ $ab = \theta - \beta$ и $ac = \theta' - \beta$ лежатъ углы i' и $180 - i$; третій уголъ есть γ. Изъ этого треугольника имѣемъ

$$\sin i . \sin(\theta - \beta) = \sin i' . \sin(\theta' - \beta)$$

$$\sin i . \cos(\theta - \beta) = \cos i' . \sin \gamma + \sin i' . \cos \gamma . \cos(\theta' - \beta)$$

синусы угловъ i, i' и γ мы замѣнимъ самыми дугами, тогда

$$i . \sin(\theta - \beta) = i' . \sin(\theta' - \beta)$$

$$i . \cos(\theta - \beta) = \gamma + i' . \cos(\theta' - \beta)$$

Помноживъ первое изъ этихъ выраженій на $\cos \beta$, а второе на $\sin \beta$, сложимъ произведенія и тогда получимъ

$$i . \sin \theta = i' . \sin \theta' + \gamma . \sin \beta$$

легко также найдемъ

$$i \cos \theta = i' . \cos \theta' + \gamma . \cos \beta$$

поэтому два указанные выше члена дифференціальныхъ выраженій (252) и (254) примутъ видъ

$$\frac{H_1}{1+\mu_1} \frac{\cos 2\varepsilon'}{\sin \varepsilon'} [i' . \cos \theta' + \gamma . \cos \beta]\, dl_1; \qquad \frac{H_1}{1+\mu_1} \cos \varepsilon' [i' . \sin \theta' + \gamma . \sin \beta]\, dl_1$$

Внося сюда вмѣсто $\gamma . \cos \beta$ и $\gamma . \sin \beta$ ихъ величины изъ выраженій (256), замѣняя dl_1 чрезъ $n_1 . dt$, а θ' чрезъ $\theta_0 - \alpha t$ и интегрируя такимъ образомъ составленные дифференціалы, найдемъ

$$-\frac{H_1}{1+\mu_1} i' \frac{n_1}{\alpha} \frac{\cos 2\varepsilon'}{\sin \varepsilon'} \sin \theta' + \frac{H_1}{1+\mu_1} n_1 \frac{\cos 2\varepsilon'}{\sin \varepsilon'} \sum \frac{g}{k+50''.3} \sin[(k+50''.3)\, t + \delta]$$

$$\frac{H_1}{1+\mu_1} \cos \varepsilon' \left\{ i' \frac{n_1}{\alpha} \cos \theta' - n_1 \sum \frac{g}{k+50''.3} \cos[(k+50''.3)\, t + \delta] \right\}$$

Первымъ изъ этихъ выраженій долженъ быть замѣненъ въ уравненіи (253) членъ зависящій отъ i_1 а вторымъ замѣняется членъ содержащій того же множителя въ выраженіи (255).

Слѣдовательно полныя выраженія прецессіи и нутаціи составленныя, принимая во вниманіе дѣйствіе Солнца и Луны на земной сфероидъ, а также и подвижность эклиптики, будутъ имѣть видъ

$$\psi = (c + c')\,t - \frac{b}{\sin\varepsilon'}\sin\theta' - F.\cos\varepsilon'.\sin 2l - F'.\cos\varepsilon'.\sin 2l_1$$

$$+ G.\cos\varepsilon'.\sin 2\theta' + \frac{K.\cos 2\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}\sum\frac{g}{(k + 50''.3)}\sin\left[(k + 50''.3)\,t + \delta\right]$$

$$\varepsilon = \varepsilon' + a.\cos\theta' + F.\sin\varepsilon'.\cos 2l + F'.\sin\varepsilon'.\cos 2l_1$$

$$- G.\sin\varepsilon'.\cos 2\theta' - K.\cos\varepsilon'\sum\frac{g}{(k + 50''.3)}\cos\left[(k + 50''.3)\,t + \delta\right]$$

гдѣ для краткости положено

$$c = \frac{3}{2}\,\frac{C - A}{C}\,\frac{n^2.\cos\varepsilon'}{\rho\,(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad c' = \frac{3}{2}\,\frac{C - A}{C}\,\frac{n_1^2\,(1 - \frac{3}{2}\,i'^2)\cos\varepsilon'}{\rho\,(1 + \mu_1)\,(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a = \frac{3}{2}\,\frac{C - A}{C}\,\frac{n^2 i'.\cos\varepsilon'}{\alpha\rho\,(1 + \mu_1)(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}}; \; b = \frac{3}{2}\,\frac{C - A}{C}\,\frac{n_1^2 i'.\cos 2\varepsilon'}{\alpha\rho\,(1 + \mu_1)\,(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F = \frac{3}{4}\,\frac{C - A}{C}\,\frac{n}{\rho\,(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad F' = \frac{3}{4}\,\frac{C - A}{C}\,\frac{n_1}{\rho\,(1 + \mu_1)\,(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$G = \frac{3}{8}\,\frac{C - A}{C}\,\frac{n_1 i'^2}{\alpha\rho\,(1 + \mu_1)\,(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}}; K = \frac{3}{2}\,\frac{C - A}{C}\left[\frac{n^2}{\rho\,(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n_1^2}{\rho\,(1 + \mu_1)(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Суммы, входящія въ послѣдніе члены выраженій прецессіи и нутаціи, могутъ быть разложены въ ряды по возрастающимъ степенямъ t, при этомъ разложеніи слѣдуетъ удержать только первыя и вторыя степени этого перемѣннаго, ибо, какъ извѣстно изъ теоріи вѣковыхъ неравенствъ, постоянныя k, g и δ суть весьма малыя величины. И такъ полагая для краткости $k + 50''.3 = f$, можемъ принять

$$\sum\frac{g}{f}\sin(ft + \delta) = \sum\frac{g}{f}\sin\delta + t\sum g.\cos\delta - t'\sum\frac{gf}{2}\sin\delta$$

$$\sum\frac{g}{f}\sin(ft + \delta) = \sum\frac{g}{f}\sin\delta + t\sum g.\cos\delta - t^2\sum\frac{gf}{2}\sin\delta$$

Но легко понять, что эти выраженія не могутъ содержать членовъ зависящихъ отъ первой степени t. Въ самомъ дѣлѣ, множитель при t во второмъ выраженіи есть $\Sigma\, g.\sin\delta$; но мы видѣли, что вообще

$$\gamma.\sin(\beta - \psi) = \Sigma\, k.\sin(gt + \delta)$$

при $t = 0$ это обращается въ

$$\gamma.\sin\beta = \Sigma\, k.\sin\delta$$

Но такъ какъ въ эпоху, т. е. при $t = 0$ истинная эклиптика совпадаетъ съ неподвижной, то при $t = 0$ имѣемъ $\gamma = 0$, а слѣдовательно $\Sigma\, k.\sin\delta = 0$. По той же причинѣ $\Sigma\, k.\cos\delta = 0$. И такъ

$$\sum \frac{g}{(k+50''.3)} \sin[(k+50''.3)\,t+\delta] = \sum \frac{g}{(k+50''.3)} \sin\delta - t^2 \sum \frac{g(k+50''.3)}{2} \sin\delta$$

$$\sum \frac{g}{(k+50''.3)} \cos[(k+50''.3)\,t+\delta] = \sum \frac{g}{(k+50''.3)} \cos\delta - t^2 \sum \frac{g(k+50''.3)}{2} \cos\delta$$

Вводя это въ предыдущія выраженія ψ и ε и полагая

$$D = c + c' \qquad E = \varepsilon' - K.\cos\varepsilon' \sum \frac{g}{(k+50''.3)} \cos\delta$$

$$D_1 = -\frac{K.\cos 2\varepsilon'}{\sin\varepsilon'} \sum \frac{g(k+50''.3)}{2} \sin\delta; \quad E_1 = -K.\cos\varepsilon' \sum \frac{g(k+50''.3)}{2} \cos\delta$$

$$D_2 = -\frac{b}{\sin\varepsilon'} \qquad E_2 = a$$

$$D_3 = -F.\cos\varepsilon' \qquad E_3 = F.\sin\varepsilon'$$

$$D_4 = -F'.\cos\varepsilon' \qquad E_4 = F'.\sin\varepsilon'$$

$$D_5 = -G.\cos\varepsilon' \qquad E_5 = -G.\sin\varepsilon'$$

находимъ

$$\begin{aligned} \psi &= Dt + D_1 t^2 + D_2 \sin\theta' + D_3 \sin 2l + D_4 \sin 2l_1 + D_5 \sin 2\theta' \\ \varepsilon &= E + E_1 t^2 + E_2 \cos\theta' + E_3 \cos 2l + E_4 \cos 2l_1 + E_5 \cos 2\theta' \end{aligned} \qquad (258)$$

Чтобы привести въ числа эти коэффиціенты, необходимо одинъ изъ нихъ опредѣлить изъ наблюденій, ибо величина $\frac{C-A}{C}$ можетъ быть найдена только этимъ путемъ. Для этого можно напр. коэффиціентъ при t въ аналитическомъ выраженіи прецессіи приравнять средней прецессіи, выводимой изъ наблюденій, и изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія опредѣлить $\frac{C-A}{C}$. Какъ скоро эта величина будетъ извѣстна, то всѣ другіе коэффиціенты легко опредѣлятся. По опредѣленію Петерса для начала 1800 года имѣемъ

$$\begin{aligned} \psi &= 50''.3798\,t - 0''.0001084\,t^2 \\ &\quad - 17''.2405 \sin\theta' + 0''.2073 \sin 2\theta' - 1''.2694 \sin 2l - 0''.2041 \sin 2l_1 \\ \varepsilon &= 23^\circ\ 27'\ 54''.22 + 0''.00000735\,t^2 \\ &\quad + 9''.2231 \cos\theta' - 0''.0897 \cos 2\theta' + 0''.5510 \cos 2l + 0''.0886 \cos 2l_1 \end{aligned}$$

Въ этомъ выраженіи ψ первые два члена представляютъ луно-солнечную прецессію для промежутка времени t, остальные четыре члена составляютъ нутацію равноденствій; точно также въ выраженіи для ε первые два члена представляютъ наклоненіе экватора $1800 + t$ года къ неподвижной эклиптикѣ, а четыре послѣдніе члена этого выраженія составляютъ нутацію наклонности.

Найденными выраженіями ψ и ε опредѣляются перемѣщенія экватора относительно неподвижной эклиптики, но необходимо также знать положеніе экватора относительно истинной эклиптики. Пусть SE (фиг. 14) будетъ неподвижная эклиптика и SA положеніе *средняго* экватора также соотвѣтствующее эпохѣ. Пусть $S''E'$ будетъ истинная эклиптика разсматриваемаго времени и $S'A'$ соотвѣтствующее поло-

женіе средняго экватора. Въ точкѣ S'' будетъ слѣдовательно находиться средняя равноденственная точка разсматриваемаго времени. При сдѣланныхъ теперь означеніяхъ $ENE' = \gamma$; $SN = \beta$. Пусть кромѣ того $S''S'N = \varepsilon_0$ и $SS' = \psi_0$, понятно, что по найденнымъ выше выраженіямъ

$$\varepsilon_0 = E + E_1 . t^2 ; \qquad \psi_0 = Dt + D_1 . t^2$$

Проведемъ чрезъ S'' большой кругъ перпендикулярный къ неподвижной эклиптикѣ и точку пересѣченія обеихъ круговъ означимъ чрезъ F. Положимъ

$$NS''A' = \varepsilon_1 ; \qquad SF = \psi_1 ; \qquad S'S'' = a$$

Слѣдовательно ε_1 есть среднее наклоненіе эклиптики къ экватору для разсматриваемаго времени, a есть такъ называемая прецессія отъ планетъ, дуга GS'' называется общей прецессіей. Рѣшеніе нашего вопроса приводится къ опредѣленію величинъ ε_1, ψ_1 и a. По соотношенію существующему для сферическаго треугольника $S'S''N$, въ которомъ сторона $S'N = \psi_0 + \beta$, имѣемъ

(259)
$$\begin{aligned} \cos \varepsilon_1 &= \cos \varepsilon_0 \cos \gamma - \sin \varepsilon_0 \sin \gamma \cos (\psi_0 + \beta) \\ \sin a . \sin \varepsilon_1 &= \sin \gamma \sin (\psi_0 + \beta) \end{aligned}$$

а изъ прямоугольнаго треугольника $S'S''F$ получаемъ

(260)
$$\operatorname{tang} (\psi_0 - \psi_1) = \operatorname{tang} a . \cos \varepsilon_0$$

принимая какъ прежде $\cos \gamma = 1$ и $\sin \gamma = \gamma$, по уравненіямъ (259) имѣемъ

$$\cos \varepsilon_1 - \cos \varepsilon_0 = - \gamma . \sin \varepsilon_0 \cos (\psi_0 + \beta) ; \qquad \sin a = \frac{\gamma . \sin (\psi_0 + \beta)}{\sin \varepsilon_1}$$

отсюда видимъ, что разность $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$, а также a суть величины порядка γ, поэтому примемъ

$$\sin \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{2} ; \qquad \sin \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2} = \sin \varepsilon_0 ; \qquad \sin a = a$$

тогда

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \gamma . \cos (\psi_0 + \beta); \qquad a = \frac{\gamma . \sin (\psi_0 + \beta)}{\sin \varepsilon_0}$$

Изъ элементарнаго прямоугольнаго треугольника $S'S''F$ имѣемъ $\psi_0 - \psi_1 = a . \cos \varepsilon_0$, поэтому

$$\psi_0 - \psi_1 = \gamma . \sin (\beta + \psi_0) \operatorname{cotg} \varepsilon_0$$

И такъ,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \gamma . \cos (\psi_0 + \beta); \qquad \psi_1 = \psi_0 - \gamma . \sin (\beta + \psi_0) \operatorname{cotg} \varepsilon_0$$

Пренебрегая величиной ψ_0 въ членахъ умноженныхъ на γ и обращая вниманіе на выраженія (256), представимъ ε_1 и ψ_1 въ видѣ

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_0 + \Sigma g . \cos [(k + 50''.3)\, t + \delta] \\ \psi_1 &= \psi_0 - \operatorname{cotg} \varepsilon_0 \, \Sigma g . \sin [(k + 50''.3)\, t + \delta] \end{aligned}$$

Разлагая входящія сюда тригонометрическія линіи по степенямъ времени и ограничиваясь вторыми степенями t, приводимъ это къ виду

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + a_1 t + b_1 t^2$$
$$\psi_1 = \psi_0 - a_2 t - b_2 t^2$$

Если приведемъ коэффиціенты a_1, b_1, a_2, b_2 въ числа, то этими выраженіями можемъ пользоваться для вычисленія ε_1 и ψ_1. Первая изъ этихъ величинъ называется *среднимъ наклоненіемъ эклиптики къ экватору* для разсматриваемаго времени, а ψ_1 *общей прецессіей*.

Этимъ краткимъ изложеніемъ механической теоріи прецессіи и нутаціи, я заключаю мой астрономическій трактатъ. Въ немъ я коснулся всѣхъ наиболѣе существенныхъ вопросовъ математической астрономіи и рѣшенія многихъ изъ нихъ развилъ съ подробностями соотвѣтствующими современному состоянію науки.

Излагая математическую астрономію въ этомъ видѣ, я преслѣдовалъ двоякую цѣль: старался сообщить всему изложенію простую и ясную форму и кромѣ того хотѣлъ наглядно показать связь, существующую между разнообразными вопросами, входящими въ область астрономіи. Насколько удалось мнѣ выполнить то и другое, пусть судятъ безпристрастные читатели.

КОНЕЦЪ.

Оглавленіе.

Часть четвертая.

Поправка. Въ первомъ томѣ этого трактата, въ статьѣ „О преобразованіи координатъ", въ уравненіяхъ (12), на стр. 23 поставленъ невѣрный знакъ и вмѣсто разности $N - \epsilon$ введена сумма $N + \epsilon$. Эта погрѣшность произошла отъ невѣрно составленной фигуры 3-й. Если, какъ указано въ текстѣ, ν есть точка весенняго равноденствія, то полюсъ экватора долженъ находиться въ точкѣ P, а полюсъ эклиптики—въ точкѣ P'. Тогда въ треугольникѣ $SP'P$ сторона $P'S = 90^\circ - \beta$, а сторона $PS = 90^\circ - \delta$ и уголъ при точкѣ P, т. е. $P'PS = 90^\circ + \alpha$, а при точкѣ P', т. е. $SP'P = 90^\circ - \lambda$. Поэтому

$$\sin\beta = \sin\delta \, . \cos\epsilon - \cos\delta \, . \sin\epsilon \, . \sin\alpha$$

$$\cos\beta \, . \sin\lambda = \sin\delta \, . \sin\epsilon + \cos\delta \, . \cos\epsilon \, . \sin\alpha$$

$$\cos\beta \, . \cos\lambda = \cos\delta \, . \cos\alpha$$

Если какъ прежде

$$\sin\delta = n \, . \sin N; \qquad \sin\alpha \, . \cos\delta = n \, . \cos N$$

то

$$\sin\beta = n \, . \sin(N - \epsilon)$$

$$\cos\beta \, . \sin\lambda = n \, . \cos(N - \epsilon)$$

$$\cos\beta \, . \cos\lambda = \cos\delta \, . \cos\alpha$$

Вычисляя по этимъ формуламъ примѣръ, приведенный на стр. 24, находимъ слѣдующія вѣрныя координаты звѣзды α Leonis

$$\lambda = 148^\circ \; 7' \; 44''.53; \qquad \beta = 0^\circ \; 27' \; 38''.75$$

По той же причинѣ уравненія (16) на стр. 25 должны быть замѣнены слѣдующими

$$\sin\delta = n \, . \sin(N + \epsilon)$$

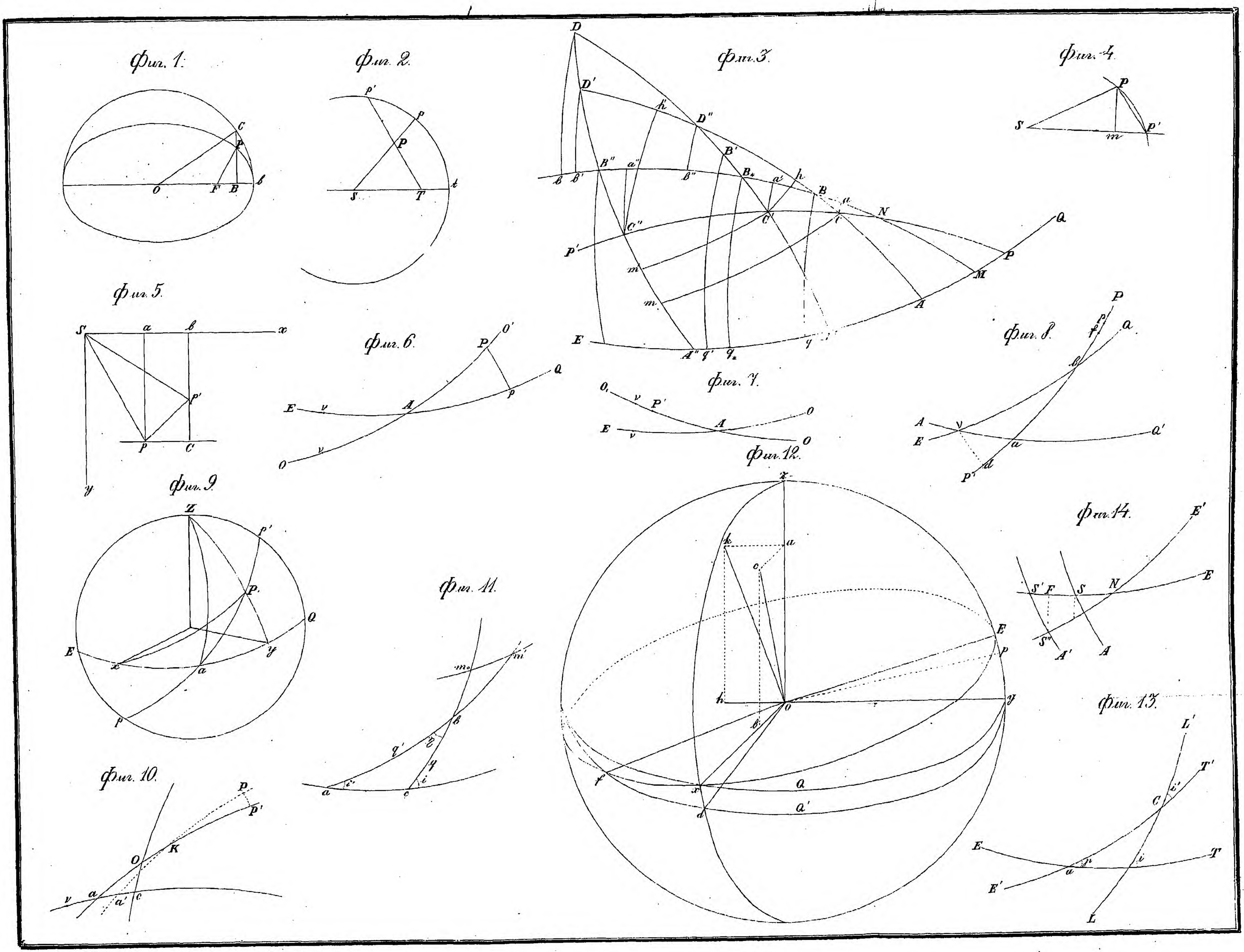
$$\cos\delta \, . \sin\alpha = n \, . \cos(N + \epsilon)$$

$$\cos\delta \, . \cos\alpha = \cos\beta \, . \cos\lambda$$

Впрочемъ указанная теперь погрѣшность въ знакѣ исправлена уже въ послѣдующемъ изложеніи. Такъ, въ третьемъ томѣ трактата на страницахъ 70 и 72 уравненія, служащія для вычисленія широты и долготы свѣтила по его склоненію и прямому восхожденію, представлены въ надлежащей формѣ.

ОПЕЧАТКИ ЗАМѢЧЕННЫЯ ВЪ ТРЕТЬЕМЪ ТОМѢ.

НА СТРАН.:	СТРОКА:	НАПЕЧАТАНО.	ДОЛЖНО БЫТЬ:
16	6 снизу	Ausdrücke	Ausdrücke
50	3 снизу	$= \tang x . \tang y . \sin (\alpha'' - \alpha_*)$	$= \tang x . \sin y . \sin (\alpha'' - \alpha_*)$
00	5 снизу	$= \frac{\sin^2 \left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos \gamma}$	$- \frac{\sin^2 \left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos \gamma}$
72	2 снизу	ξ и ξ'	ξ и ξ''
88	10 снизу	$\frac{a-q}{a}$	$\frac{a-g}{a}$
99	1 сверху	сложивъ	сложимъ
99	4 снизу	$= b$	$= \sin b$
102	9 сверху	приближается $\frac{0}{0}$	приближается къ $\frac{0}{0}$
103	7 снизу	$- \sin \omega . \sin i$	$\sin \omega . \sin i$
139	2 снизу	Варкера	Варкера,
141	2 снизу	$\tang^2 \left(\frac{v''}{2}\right)$	$\tang^3 \left(\frac{v''}{2}\right)$
224	6 сверху	$\frac{r . m}{\Delta} \cos (N - \beta)$	$\frac{r . m}{\Delta} \sin n . \cos (N - \beta)$
235	17 сверху	$\log Q = 9.5284024$	$\log Q = 9.5284024_n$
238	4 снизу	$\log r = 9.8355636$	$\log r'' = 9.8355636$
239	15 сверху	$\log r = 9.8355598$	$\log r'' = 9.8355598$
245	8 сверху	$\Delta M_0 = + 11.98$	$\Delta M_0 = + 11''.98$
272	9 снизу	$\frac{d\eta'}{dl}$	$\frac{d\eta}{dl}$
302	9 снизу	$\overset{(s)}{b_k} = \overset{(s)}{b_0} q_1 q_2 q_4 \ldots\ldots$	$\overset{(s)}{b_k} = \overset{(s)}{b_0} q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots$
309	12 снизу	F	F_1
312	8 снизу	$\sin^2 \left(\frac{i'}{2}\right) + \sin^2 \left(\frac{i'}{2}\right)$	$\sin^2 \left(\frac{i}{2}\right) + \sin^2 \left(\frac{i'}{2}\right)$
361	2 снизу	$t = t_0 + dt$	$t = t_0 + \tau$
362	5 сверху	промежутка времени dt	промежутка времени τ
406	5 снизу	$Z_1 = \alpha X + \cdots\cdots$	(212_*) $Z_1 = \alpha X + \cdots\cdots$
468	3 снизу	(250)	(240)


Фиг. 1.
Фиг. 2.
Фиг. 3.
Фиг. 4.
Фиг. 5.
Фиг. 6.
Фиг. 7.
Фиг. 8.
Фиг. 9.
Фиг. 10.
Фиг. 11.
Фиг. 12.
Фиг. 13.
Фиг. 14.